This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

math3008.46.6

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE LIBRARY OF

GUSTAVUS HAY

(A.B. 1850, M.D. 1857)

OF BOSTON

GIFT OF MRS. HAY

MAY 16, 1908

123142

32555

Vorlesungen

über die

Integralrechnung.

Vorlesungen

über die

Integralrechnung.

Vorzüglich nach den Methoden

von

A. L. Cauchy

bearbeitet von

Moigno.

Deutsch herausgegeben

von

Dr. C. H. Schnuse.

Braunschweig, 1846.

Verlag von G. C. E Meyer sen.

Math 3005.46.6

HARVARD COLLEGE
MAY 15 1908
LIBRARY

From the estate
of Dr. Gustavus Hay

Vorwort des Uebersetzers.

Ich halte eine ausführliche Rechtfertigung der deutschen Herausgabe eines Werkes, wie das gegenwärtige, welches vorzüglich nach Cauchy's Methoden und unter dessen unmittelbarer Mitwirkung und Aufsicht verfasst ist, für ganz überflüssig; denn auch eine nur oberflächliche Vergleichung desselben mit den ähnlichen deutschen Werken, namentlich mit den Werken der Schriftsteller, welche sich so sehr gegen Uebersetzungen klassischer ausländischer Werke und deren Verbreitung ereifern, zeigt, daß es sowohl hinsichtlich der Vollständigkeit, als der Eleganz und Strenge der Methoden, wesentliche Vorzüge hat. Was aber das Verlegen und Verbreiten von Uebersetzungen ausländischer klassischer mathematischer Werke anlangt, so haben darüber Recensenten nichts zu befehlen. Das ist lediglich Sache des Uebersetzers und Verlegers, und Letzterer muß aus Erfahrung wissen, wie er sich dabei steht. — Wer den Werth des Werkes nicht zu beurtheilen vermag, oder nicht dazu geneigt ist, braucht ja dasselbe nicht zu kaufen, so wenig ich die gehaltlosen Producte vieler deutscher originell sein wollender Autoren anschaffe. —

Eben so wenig gebe ich auf das Urtheil unwissender anonymer Recensenten etwas; denn jeder Kenner, dem ein Werk von Männern, wie Cauchy, Poisson, etc. in die

kommt, was gerade durch die deutsche Herausgabe besonders bezweckt werden soll, wird selbst besser zu beurtheilen wissen, was daran ist. — Als der größte aller jetzt lebenden Geometer meine Vorrede zu Cauchy's Vorlesungen über die Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie gelesen hatte, worin ich eine elende Recension über Cauchy's Differenzialrechnung in der Jenaschen Literaturzeitung in jeder Beziehung als absurd darstellte, schrieb er mir Folgendes: »Es ist nicht das erste Mal, daß Cauchy's Werke in Deutschland verkannt werden; denn noch in den Göttingenschen Gelehrten Anzeigen wird Cauchy bei Gelegenheit einer Recension seines Lehrbuchs der algebraischen Analysis sehr getadelt, daß er aus $u^2 + v^2 = 0$ schließt $u = 0$, $v = 0$. — etc. etc. Ein anderer sehr weiser Recensent sagt von Cauchy's Résumé des Leçons etc.: dieses Werk dürfe nicht in's Deutsche übersetzt werden; denn es sei darin von »unendlich kleinen Größen« die Rede!? —

Obgleich ich nun den kleinlichen Recensenten von Cauchy's Differenzialrechnug ad absurdum geführt hatte und über Cauchy's Infinitesimalrechnung in derselben Literaturzeitung bereits eine gründliche und mit Sachkenntniß geschriebene Recension erschienen war; so hat sich jener Anonymus doch nicht enthalten können, seinen Schulmeistermaßstab an das zweite Werk Cauchy's zu legen. — Es würde sich nicht der Mühe lohnen, hier auch diese zweite Recension als nichtig darzustellen, bin aber sofort dazu bereit, sobald sich derselbe Recensent erfrechen sollte, in Zukunft ähnliche Recensionen zu verfassen. — Was schließt man aber aus der Vergleichung zweier so entgegengesetzt lautender Recensionen über dasselbe Werk? —

Dergleichen Recensionen sind jedoch, besonders in der Jenaschen Literaturzeitung nichts Neues. Schon Lich-

tenberg sagt (Physikal. und math. Schriften Bd. 4 S. 875) vor einem halben Jahrhundert:

»Ich meine damit nicht den Ton gegen Ihren Recensenten, der hätte wohl eine noch beissendere Lauge verdient. Hierbei merke ich in Parenthesi an, daß bei der Jenaschen Literaturzeitung auf der physischen Bank ein Paar gar elende Leute sitzen müssen; zum Beweise führe ich noch die Recension von Gren's Physik an, die offenbar von einem Ignoranten herrührt, dessen Recension desto gefährlicher ist, als er sich dabei das Ansehen eines vielwissenden gutmüthigen Mannes zu geben weiß. Gutmüthig mag er vielleicht sein; aber ein Ignorant ist er gewiß. —«

Wer also nicht betrogen sein will, muß das Buch selbst prüfen, was bei dem jetzigen Zustande des deutschen Buchhandels glücklicherweise mit keinen Schwierigkeiten verbunden ist. —

Was den Vortrag in dem gegenwärtigen Werke anlangt, so findet man darin zwar keine Thibautschen Declamationen, aber eine einfache, gehaltvolle, ächt mathematische Darstellung. Ich kann nicht umhin, in dieser Beziehung einige Zeilen Holland's aus Lambert's deutschen gelehrten Briefwechsel (Bd. I, Brief XXI) hieher zu setzen:

»Ich glaube, daß das, was man jetzt unter dem schönen und angenehmen Vortrage versteht, beinahe keiner einzigen Wissenschaft gut anstehe. Mir wenigstens ist es immer verdrießlich, wenn mich der Verfasser eines Buches, aus dem ich lernen will, unnöthiger Weise zu belustigen und seinen Vortrag durch eine gewisse Beredsamkeit süße zu machen sucht. Die Sprache gibt ohnehin schon zu unendlich viel Irrthümern Gelegenheit und bene-

helt so oft den Verstand, wenn er auf den Grund der Dinge gehen will. — Der sogenannte schöne Vortrag häuft aber mit Vorsatz uneigentliche Redensarten, und ist über alle Nothdurft und bis zur Verschwendung wortreich. Man könnte deswegen in gewisser Art, so paradox es auch scheinen möchte, sagen, daß dieser schöne Vortrag, anstatt die Wissenschaften leichter zu machen, die Schwierigkeiten darin vermehre. Für denkende Leser nämlich, die jeden figürlichen Ausdruck auf seinen eigentlichen Sinn reduciren und immer sorgen, daß sie nicht irgendwo durch einen Galimathias geblendet werden. Der große Hause glaubt da zu verstehen, wo seine Einbildungskraft beschäftigt ist. Er ist nicht gewohnt die Schale zu zerbrechen und zu suchen, ob und was für einen Kern sie enthalte. —«

Für die äußere Ausstattung und Correctheit ist, wie man bei näherer Prüfung finden wird, die nöthige Sorge getragen, und am Schlusse des Werkes sollen auch die etwa nöthig werdenden Ergänzungen beigefügt werden, obgleich ich mich nie entschließen werde, solche Zusätze zu machen, wie sie der oben erwähnte anonyme Recensent anführt, nämlich jede leichte Zwischenreduction und Transformation. Denn wenn das Gerüste stehen bleibt, so wird uns durch dasselbe der Anblick des Gebäudes entzogen — sagt A. v. Humboldt. —

Dr. S.

Vorrede des Verfaſſers.

Während die Differenzialrechnung in den letzten Jahren faſt ſtationär blieb, machte die Integralrechnung außerordentliche Fortſchritte, und es ſcheint eine neue Aera für ſie zu beginnen; denn Probleme, deren Schwierigkeiten ſich bis dahin nicht hatten beſiegen laſſen, fanden eine leichte und einfache Auflöſung, und die Grenzen, vor welchen Euler, Lagrange, Laplace, Legendre,.... ſtehen bleiben mußten, wurden weit hinausgerückt. Eine große Anzahl von Geometern, wie Cauchy, Liouville, Sturm, Binet, Lamé, Catalan, Blanchet, Bertrand in Frankreich, Gauß, Jacobi, Lejeune-Dirichlet, Richelot in Deutſchland, Labatto in den Niederlanden, Oſtrogradzky und Bouniakowsky in Rußland und Tortolini in Rom wetteiferten im Gebiete der Integralrechnung. Die wiſſenſchaftlichen Sammlungen, deren es jetzt ſchon eine ſo große Anzahl giebt, bieten faſt jede Woche mehrere Abhandlungen über allgemeinere und vereinfachte Theorien, über glückliche Anwendungen ꝛc. zum Studium dar. Cauchy allein hat ſeit dem Zeitpuncte der Ankündigung des vorliegenden Werkes mehr als achtzig Noten und Abhandlungen über die Integralrechnung geſchrieben, welche wir in dem gegenwärtigen Werke analyſiren mußten, woraus ſich die verzögerte Erſcheinung dieſes bereits im Jahre 1841 im Drucke begonnenen Werkes erklärt. Daſſelbe ſollte nach der urſprünglichen Ankündigung nur einen Band bilden; allein alsdann würde

das Werk zu unvollständig geworden sein, und hätte die Wissenschaft der Integralrechnung nicht nach ihren gegenwärtigen Interessen und Fortschritten darstellen können. Das große Werk von *Lecroix:* Traité du Calcul différentiel et du Calcul Intégral, 3 Vol. in 4°. 1810 — 1819 ist jetzt veraltet und noch durch kein neueres ersetzt, obgleich den so zahlreichen Freunden der mathematischen Wissenschaft die Entdeckungen und Verbesserungen der neuern großen Geometer größtentheils nicht leicht zugänglich sind, so daß ein Werk, welches den gegenwärtigen Zustand der Wissenschaft darstellt, für Viele erwünscht sein muß.

Wir haben daher das gegenwärtige Werk über die Integralrechnung in zwei Bände eintheilen müssen, wovon der erste die eigentliche Integralrechnung, d. h. die Integration der verschiedenen Arten Differenzialausdrücke und der gewöhnlichen, so wie der partiellen Differenzialgleichungen enthalten sollte; allein da alsdann dieser erste Band zu voluminös geworden sein würde, so mußten wir die Integration der partiellen Differenzialgleichungen, die analytischen und geometrischen Anwendungen, welche von der Integration der Differenzialgleichungen abhängen, die Variationsrechnung, die Anwendung der Cauchyschen Restrechnung auf die Integralrechnung, die umgekehrte endliche Differenzenrechnung, die Theorie der elliptischen Functionen ꝛc. ꝛc. für einen zweiten Band aufsparen, welcher zugleich eine genaue und specielle tabellarische Uebersicht der Leistungen der verschiedenen Geometer, deren Arbeiten wir benutzt haben, enthalten wird. Historische Bemerkungen haben wir nicht hinzugefügt, um die Klarheit und den Zusammenhang der Beweise nicht zu stören, und was die von uns gewählten Methoden betrifft, so haben wir uns so viel als möglich an die von Cauchy gehalten, welcher alle Zweige der Mathematik, und besonders die Integralrechnung, sowohl in Beziehung auf die Strenge und Eleganz der Methoden, als in Beziehung auf neue Resultate so

außerordentlich bereichert hat. Jedoch haben wir uns nicht ausschließlich an Cauchy gehalten, sondern auch die werthvollen Methoden anderer Geometer angegeben. Auch haben wir metaphysische Betrachtungen über die unendlich kleinen Größen und über die verschiedenen Methoden, welche bei mündlichen Vorträgen sehr wohl angestellt werden können, vermieden, und hauptsächlich nur die Einfachheit und Strenge der Beweise im Auge gehabt. In wie fern wir nun vermittelst einer so kräftigen Stütze wie Cauchy in dieser letzten Beziehung mehr geleistet haben, als unsere Vorgänger, mag der Leser aus der Vergleichung unseres Werkes mit den besten der bereits früher erschienenen Werke über denselben Gegenstand selbst ersehen, und wir haben hier nur noch einige Bemerkungen über die nähere Einrichtung des Werkes hinzuzufügen.

Mit Cauchy halten wir dafür, daß man den Namen und den Zweck der Integralrechnung, so wie die Bezeichnungen und den Zusammenhang derselben mit der Differenzialrechnung nur dann deutlich erklären kann, wenn man von dem bestimmten Integrale ausgeht, welches wir als die Grenze betrachten, gegen welche die Summe der unendlich kleinen Werthe ohne Ende convergirt, welche das Differenzial annimmt, wenn man die unabhängige Veränderliche x von einem endlichen reellen Werthe x_0 zu einem andern ebenfalls endlichen und reellen Werthe X stetig übergehen läßt. Später gelangen wir zu dem unbestimmten Integrale, dessen Existenz auf diese Weise unabhängig von geometrischen Betrachtungen, deren man sich wohl sonst bedient hat, dargethan wird. Hierauf entfernen wir uns von Cauchy und verweisen die schwierigere Berechnung der bestimmten Integrale in die sechste Vorlesung, indem wir die vier vorhergehenden Vorlesungen den unbestimmten Integrationsmethoden widmen.

Wenn die Function unter dem Integralzeichen aufhört, endlich und stetig zu sein, und zuweilen auch, wenn die Grenzen des Integrales unendlich werden; so kann das bestimmte Integral unendlich werden, oder unter einer unbestimmten Form erscheinen. Oft ist diese Unbestimmtheit nur scheinbar und das Integral hat in der That nur einen einzigen und bestimmten Werth, wogegen in andern Fällen die Unbestimmtheit auch wirklich statt finden kann, so daß das Integral unendlich viele Werthe hat, worunter aber blos einer besonders bemerkenswerth ist, welchen Cauchy den Hauptwerth genannt hat. Endlich kann das Integral, welches im Allgemeinen sehr klein ist, wenn die Grenzen einander sehr genähert sind, einen endlichen Werth bekommen und ein sogenanntes singuläres bestimmtes Integral werden, wenn die Function unter dem Integralzeichen aufhört, stetig zu sein.

Die nähere Betrachtung dieser wichtigen Eigenthümlichkeiten bilden den Gegenstand der sechsten und siebenten Vorlesung. Die Theorie der singulären Integrale ist sehr fruchtbar; denn sie liefert den Werth einer großen Anzahl von Integralen, welcher sich auf andere Weise nur schwer würde berechnen lassen, und führt sogar auf allgemeine Formeln, welche zur Berechnung bestimmter Integrale dienen können.

Cauchy hat auch noch eine andere Bemerkung gemacht, wodurch er auf ganz unerwartete Resultate geführt ist. Die durch eine doppelte Integration erhaltenen Ausdrücke können nämlich von einander verschieden sein und von der Aufeinanderfolge der Integrationen abhängen, wenn die unter dem doppelten Integralzeichen stehende Function, oder ihre Ableitungen aufhören endlich und stetig zu sein. Die neunte Vorlesung lehrt diesen Unterschied selbst in dem Falle berechnen, wo die unter dem Zeichen $\int\int$ stehende Function imaginär ist. Es ist fast nicht zu begreifen, weshalb diese so wichtige Bemerkung noch so wenig bekannt ist, so daß sich noch täglich

selbst geübte Geometer erlauben, die Ordnung der Integrationen umzukehren, ohne sich zum Voraus zu überzeugen, daß diese Umkehrung zulässig ist, wodurch viele Beweise unvollständig werden.

Um Anfänger im Calcul zu üben und sie auf ein tieferes Studium der vielfachen Integrale vorzubereiten, haben wir die vorhergehenden Theorien auf die Lösung der drei Probleme der Rectification der Curven, der Quadratur der Flächen und der Cubatur der Körper angewandt und diesen Fundamentalanwendungen, welche Cauchy so elegant behandelt hat, vier Vorlesungen gewidmet. Eine interessante Note, welche Tortolini in dem Gionarle arcadico bekannt gemacht hat, hat den Stoff zur zwölften Vorlesung gegeben. Dieser italienische Geometer löst in dieser Note mit großer Geschicklichkeit die Aufgabe: »Wenn die zwischen dem Bogen einer Curve und einer der Coordinaten seines Endpunctes stattfindende Relation gegeben ist, die Gleichung dieser Curve zu finden,« und wir haben diese Theorie auf einige ausgewählte Beispiele, worin sich die Rechnung verrichten läßt, angewandt.

In der sechszehnten Vorlesung haben wir das Problem der Quadratur der Flächen und der Cubatur der Körper aus einem allgemeinern Gesichtspuncte betrachtet. Diese neue von Cauchy herrührende Methode giebt nicht blos die Fläche oder das Volumen, welche zwischen gegebenen Grenzen liegen, sondern auch jede andere Größe, welche mit dieser Fläche oder diesem Volumen gleichzeitig zu- oder abnehmen muß.

Mit der siebenzehnten Vorlesung beginnt die genaue Angabe der Arbeiten der neuern Geometer über die Reduction der vielfachen Integrale. Da die fruchtbarste Reductionsmethode auf einer Transformation schicklich gewählter Coordinaten beruht, so haben wir geglaubt, zuvor die nöthigen

Begriffe über die Coordinatensysteme, deren sich die Geometer mit dem meisten Glücke bedient haben, mittheilen zu müssen. Insbesondere haben wir die vom Lamé sogenannten elliptischen Coordinaten betrachtet, bei deren Anwendung ein beliebiger Punct des Raumes als der Durchschnittspunct dreier Flächen des zweiten Grades betrachtet wird, wovon jede von einem veränderlichen Parameter abhängt. Diese homofocalen Flächen haben merkwürdige Eigenschaften, welche wir kurz angeführt haben.

Nach diesen vorläufigen Betrachtungen mußte die allgemeine Formel aufgestellt werden, vermittelst welcher man in der Integralrechnung eine Vertauschung der Veränderlichen bewerkstelligt. In dieser Beziehung befindet sich auch in den vollständigsten Werken über Integralrechnung eine Lücke, welche wir auszufüllen gesucht haben, und für das Wenige, welches man in den bekannten Werken findet, haben wir zwei strenge Methoden von Cauchy und Catalan substituirt, und bedauern, daß wir die Jacobische Methode nicht haben mittheilen können, weil sie zu viel Raum erfordert haben würde.

Hierauf schreiten wir unmittelbar zu dem Probleme der Transformation oder Reduction der merkwürdigsten vielfachen Integrale und leiten mehrere von Cauchy, Poisson, Liouville, Lamé, Lejeune-Dirichlet, Chasles, Catalan, Tortolini aufgestellte Formeln ab.

Die von Leujeune-Dirichlet und von Catalan angewandten Verfahrungsarten sind besonders merkwürdig. Der erste dieser Geometer multiplicirt den zu integrirenden Ausdruck mit einem Factor, dessen Werth innerhalb der Integrationsgrenzen der Einheit gleich ist, und außerhalb derselben verschwindet. Der zweite Geometer stützt sich auf sehr feine geometrische Betrachtungen, vermöge welcher derselbe

für ein schwierig zu integrirendes Flächen- oder Volumenelement ein anderes gleichbedeutendes Element von solcher Beschaffenheit substituirt, daß man eine oder zwei Integrationen unmittelbar verrichten kann. Sehr einfache analytische Betrachtungen erweitern alsdann diese Methode auf den Fall einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen. Vielleicht haben wir uns bei diesen Untersuchungen ihrer Originalität wegen zu lange aufgehalten; allein nach unserer eigenen Erfahrung kann man die Integralrechnung nur dann wahrhaft studiren, wenn man die geebnete Bahn der gewöhnlichen Lehrbücher verläßt und den Meistern der Wissenschaft in ihren neuen Wegen folgt.

Die Reductionsmethode von Dirichlet beruht auf einer zuerst von Euler aufgestellten sehr fruchtbaren Formel, welche Poisson, von der Integration eines Systemes gleichzeitiger Differenzialgleichungen ausgehend, zuerst bewiesen hat, welches aber ein Umweg ist, und wir haben es daher für besser gehalten, zwei höchst merkwürdige und wenig bekannte Abhandlungen von Cauchy zu analysiren, wovon die eine den Titel: Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires, und die andere den Titel: Recherche d'une formule générale qui fournit la valeur de la plupart des intégrales définies connues, et celles d'un grand nombre d'autres führt. Man findet übrigens in dieser ein- und zwanzigsten Vorlesung sowohl die wahren Grundlagen des Ueberganges vom Reellen zum Imaginären, als ein sehr sinnreiches und allgemeines Verfahren, welches die Werthe einer Menge bestimmter Integrale giebt, und um von dieser Methode eine Anwendung zu geben, haben wir die bekannte merkwürdige Wallis'sche Formel abgeleitet, welche das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser ausdrückt.

Hierauf kommen wir zu dem zweiten Theile der Integralrechnung, nämlich zu der Integration der Differenzialgleichungen. Die Vorlesungen 22, 23, 24 und 25 bieten

nichts Neues dar; aber in der Vorlesung 26 wird eine neue Methode auseinandergesetzt, vermittelst welcher Cauchy die Existenz eines Werthes nachweis't, welcher einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung genügt und diesen Werth mit einem gegebenen Grade von Annäherung berechnen lehrt. Diese Methode, welche einen wesentlichen Fortschritt der Wissenschaft bildet, ist zwar gedruckt, aber nicht in's Publikum gekommen, und folglich sehr wenig bekannt. In Vorlesung 28 wird gelehrt, wie man die Grenze der Fehler bestimmt, welche man begehen kann, wenn man vermittelst des eben erwähnten Verfahrens die particulären Integrale einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung berechnet.

Die singulären Auflösungen haben eigenthümliche Merkmale, vermittelst welcher man sie vor der Integration unmittelbar aus der gegebenen Differenzialgleichung ableiten kann, und welche Euler, Lagrange, Laplace, Poisson successive untersucht haben.

Diese großen Geometer haben zu beweisen gesucht, daß die characteristische Eigenschaft der singulären Auflösungen darin bestehe, den Differenzialcoefficienten $\frac{dy'}{dy}$ unendlich, oder unbestimmt zu machen; allein diese Eigenschaft ist nicht so allgemein, als sie geglaubt haben, und der von ihnen gegebene Beweis hängt von Reihenentwickelungen ab, deren Convergenz durch nichts bewiesen wird. In Vorlesung 29 wird aber gezeigt, wie Cauchy den eigenthümlichen Character der singulären Auflösungen streng definirt und sie von der particulären Integralen unterscheidet.

In Vorlesung 31 haben wir als Anwendungen außer der Riccatischen Differenzialgleichung auch die neuerlich von Jacobi behandelte Gleichung:

$$(A+A'x+A''y)(xdy-ydx)-(B+B'x+B''y)dy \\ -(C+C'x+C''y)dx=0,$$

so wie die Differenzialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4}} \\ =\frac{dy}{\sqrt{a_0y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4}},$$

integrirt.

Die Vorlesung **32** beschäftigt sich mit der Integration der totalen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung mit einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen, und man findet daselbst eine elegante Transsformation des Ausdruckes $Xdx+Ydy+Zdz$, woraus sich unmittelbar ergiebt, in welchem Falle dieses Trinom ein genaues Differenzial ist.

In Vorlesung **33** wird die bereits in Vorlesung **27** auf eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung mit zwei Veränderlichen angewandte Integrationsmethode auf ein System von n gleichzeitigen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung mit $n+1$ Differenzialen oder mit n Ableitungen erweitert, und diese Arbeit Cauchy's, welche bisher noch nicht veröffentlicht war, zeichnet sich besonders durch Eleganz und Einfachheit aus.

Ein bemerkenswerthes Factum ist es, daß man in der Integralrechnung große Schwierigkeiten nur dann beseitigen kann, wenn man die correspondirenden particulären Werthe der ursprünglichen und der neuen Unbekannten unmittelbar in die Rechnung einführt, oder was auf dasselbe hinausläuft, gleich zum Voraus für die willkührlichen Constanten, welche durch die Integration eingeführt werden müssen, particuläre Werthe der Veränderlichen und ihrer Ableitungen substituirt.

In Vorlesung **34**, welche von der Integration der gleichzeitigen linearen Differenzialgleichungen der ersten Ord-

nung handelt, findet man die einfache Methode, durch welche man das Integral vervollständigt, wenn die von Cauchy sogenannte characteristische Gleichung, deren n Wurzeln auf die gesuchten n Integrale führen, gleiche Wurzeln hat.

Bei der Integration einer Differenzialgleichung von einer beliebigen Ordnung haben wir zugleich die Bedingungen der Integrabilität des Differenzialausdruckes $F(x, y, D_x y, \ldots, D_n^x y)$ der n^{ten} Ordnung streng abzuleiten gesucht. Lexell, Lagrange und Poisson scheinen nicht beachtet zu haben, daß Euler nicht blos gesagt hat, daß die Bedingung:

$$D_y F - D_x D_{y'} F + D_x^2 D_{y''} F - \ldots = 0$$

erforderlich, sondern auch, daß sie hinreichend ist. Die Methoden, durch welche Lagrange, Poisson und Bertrand die Euler'sche Formel unabhängig von der Variationsrechnung zu beweisen gesucht haben, sind nicht ganz streng, und die Methode, welche wir mitgetheilt haben, rührt von J. Binet her, und scheint von jedem gegründeten Einwurfe frei zu sein.

Die beiden folgenden Vorlesungen, welche von den allgemeinen Eigenschaften der linearen Differenzialgleichungen der n^{ten} Ordnung mit veränderlichen oder constanten Coefficienten und mit, oder ohne zweiten Theil handeln, verdienen eine besondere Beachtung, und wir glauben alles bisher über diesen Gegenstand Gesagte bündig und mit der gehörigen Klarheit zusammengestellt zu haben, weil sich hier eine günstige Gelegenheit darbot, den Anfängern die Methoden der verschiedenen Geometer und die so vielfachen Hülfsmittel der Analysis kennen zu lehren. Liouville hat im zweiten Bande seines Journales gezeigt, daß d'Alembert zuerst das Integrationsverfahren angewandt hat, welches sich Libri zugeeignet hatte und auf folgender Fundamentaleigenschaft beruht: Wenn man m particuläre Integrale der linea-

ren Differenzialgleichung ohne zweiten Theil kennt, so kann man die Integration derselben Gleichung mit einem zweiten Theile auf die Integration einer neuen linearen Differenzialgleichung der $(n-m)^{\text{ten}}$ Ordnung zurückführen, und wir waren nicht wenig erstaunt, als wir bei einem zu wenig bekannten Schriftsteller, Dubourguet, diese ganze Theorie fanden, mit Ausnahme der Formel, welche das allgemeine Integral der linearen Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile vermittelst eines vielfachen Integrales als Function der n particulären Integrale der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil ausdrückt.

In Vorlesung 38, welche sich mit der Integration einiger linearen Differenzialgleichungen der n^{ten} Ordnung mit veränderlichen Coefficienten beschäftigt, haben wir besonders die Integrationsmethode der Riccati'schen Differenzialgleichung:

$$D_x^2 z - ax^m z = 0$$

vermittelst eines bestimmten Integrales hervorgehoben, welche Wantzel neulich der Academie der Wissenschaften zu Paris als neu vorgelegt hat; aber welche man schon in der 1817 von Bugnot besorgten Ausgabe von Cauchy's Vorlesungen an der polytechnischen Schule zu Paris findet.

Das Verfahren, durch welches Lobatto die beiden Differenzialgleichungen:

$$D_x^n y - xy = 0, \quad D_x^2 y + abx^m y = 0$$

integrirt, ist ebenfalls sehr instructiv.

Um endlich die vorhergehenden Theorien in ein noch helleres Licht zu setzen, und mit den Rechnungskunstgriffen vertraut zu machen, durch welche man fortwährend in der Integralrechnung die Mangelhaftigkeit der allgemeinen Theorien

zu suppliren suchen muß, und um den gegenwärtigen Zustand der Wissenschaft näher kennen zu lehren, haben wir es für nöthig gehalten, die verschiedenen Classen von Differenzialgleichungen kurz durchzugehen, welche die Geometer entweder direct, oder durch mehr oder weniger indirecte Methoden integrirt haben. Unter diesen Anwendungen kommt die Integration des folgenden Systemes von Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung:

$$D_t^2 x = D_x R, \quad D_t^2 y = D_y R, \quad D_t^2 z = D_z R, \ldots$$

vor, welche Binet durch sehr sinnreiche Betrachtungen bewerkstelligt hat.

In dem Vorhergehenden hat man gesehen, wie man die Integration einer Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung auf die Integration von n gleichzeitigen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung zurückführt, und in Vorlesung **39** zeigen wir, wie man umgekehrt die Integration eines Systemes von n gleichzeitigen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung auf die einer einzigen Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung zurückführen kann.

Wenn keine der bisherigen zur Integration der Differenzialgleichungen angeführten Methoden anwendbar ist, so muß man zu der Integration durch Reihen seine Zuflucht nehmen, welche wir unter allen bisher angegebenen Formen auseinander setzen und nur mit großer Vorsicht angewandt werden muß. Einige Betrachtungen über die singulären Auflösungen der Differenzialgleichungen von einer beliebigen Ordnung bilden den Schluß von Vorlesung **39**.

Die näherungsweise Integration der Differenzialgleichungen ist illusorisch, so lange man kein Mittel hat, wodurch man sich überzeugt, wie wir in Vorlesung **27**, **33** gethan haben, daß die erhaltenen Werthe convergent, oder die Grenzen,

welchen sie sich ohne Ende nähern, Functionen sind, welche den gegebenen Differenzialgleichungen genügen. Die Methode, welche wir auseinander gesetzt hatten, läßt in theoretischer Beziehung nichts zu wünschen übrig, und wir haben sie zugleich auf ein System von Differenzialgleichungen von einer beliebigen Ordnung, deren Integration sich auf die Integration gleichzeitiger Differenzialgleichungen der ersten Ordnung zurückführen läßt, erstreckt. Cauchy hat seitdem aber ein neues Integrationsverfahren durch Reihen angegeben, welches in praktischer Beziehung und auch in andern Rücksichten viele Vorzüge darbietet. Wenn sich die Integrale nicht unter endlicher Form erhalten lassen, so kann man durch diese schöne Methode wenigstens die Existenz der allgemeinen Integrale streng beweisen und sie mit jedem beliebigen Grade von Annäherung berechnen, weil diese Methode sowohl die Bedingungen angiebt, unter welchen die diese Integrale ausdrückenden Reihen convergent bleiben, als die obern Grenzen der Fehler, welche man begeht, wenn man von jeder Reihe blos ihre n ersten Glieder beibehält.

Dieses ist der letzte Zustand der Wissenschaft in Beziehung auf die Integration der Differenzialgleichungen, und es folgen nun blos noch eine Note und ein Zusatz. In der ersten wird nach Cauchy gelehrt, wie man die absoluten Maxima, oder Minima leichter berechnet, und in dem letztern wird gezeigt, wie man nach Poisson und Jacobi in vielen Fällen die Integrale eines Systemes gegebener Differenzialgleichungen ohne Integration aus einander ableiten kann.

Der in der ersten Vorlesung bewiesene Fundamentalabsatz: »daß ein bestimmtes Integral dem Producte aus der Differenz der Grenzen und aus einem

mittlern Werthe der unter dem Zeichen $\int$ stehenden Function gleich ist,« beruht nebst vielen andern wichtigen Resultaten auf folgendem sehr fruchtbaren Lehrsatze: Wenn $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ Größen von einerlei Zeichen sind, so ist die Summe:

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots$$

gleich dem Producte aus der Summe $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots$ und einer Mittelgröße zwischen den Coefficienten $a, a', a'' \ldots$, und dieser Lehrsatz ist selbst nur ein besonderer Fall des folgenden allgemeinern Satzes, welchen wir hier noch beweisen wollen.

Wenn $b, b', b'', \ldots$ Größen von einerlei Zeichen sind, und man hat die Brüche $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots$, so ist der Bruch $\frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots}$ eine Mittelgröße zwischen diesen Brüchen, d. h. größer als der kleinste und kleiner als der größte derselben. Denn wenn g den größten und p den kleinsten dieser Brüche bezeichnet, so hat man:

$$\frac{a}{b} \gtrless p, \quad \frac{a'}{b'} \gtrless p, \quad \frac{a''}{b''} \gtrless p, \ldots,$$

und folglich, wenn $b, b' b'' \ldots$ positiv sind:

$$a \gtrless bp, \quad a' \gtrless b'p, \quad a'' \gtrless b''p, \ldots,$$

also: $$a + a' + a'' + \ldots \gtrless (b + b' + b'' + \ldots)p$$
$$ \lessgtr (b + b' + b'' + \ldots)g,$$

und: $$\frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots} \gtrless p;$$

aber wenn $b, b', b'' \ldots$ negativ sind:

$$a \lessgtr bp, \quad a' \lessgtr bp, \quad a'' \lessgtr bp, \ldots,$$

folglich: $a+a'+a''+\ldots \begin{matrix}<(b+b'+b''\ldots)p\\ >(b+b'+b''\ldots)g\end{matrix}$

und: $$\frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots}\begin{matrix}>p\\ <g\end{matrix}$$

Wenn $\alpha, \alpha', \alpha''\ldots.$ eben sowohl als $b, b', b''\ldots.$ Größen von einerlei Zeichen sind, so haben auch die Nenner der Brüche:

$$\frac{a\alpha}{b\alpha'},\ \frac{a'\alpha'}{b'\alpha'},\ \frac{a''\alpha''}{b''\alpha''},\ldots$$

einerlei Zeichen, und man hat folglich:

$$\frac{a\alpha+a'\alpha'+a''\alpha''+\ldots}{b\alpha+b'\alpha'+b''\alpha''+\ldots}\begin{matrix}>p\\ <g\end{matrix}$$

Setzt man nun:

$$b=b'=b''=\ldots=1,$$

so ist p die kleinste und g die größte der Größen $a, a', a'',\ldots.$ und wenn $M.(a, a', a''\ldots.)$ eine Mittelgröße zwischen diesen Größen bezeichnet; so hat man:

$$a\alpha+a'\alpha'+a''\alpha''+\ldots=(\alpha+\alpha'+\alpha''\ldots)M.(a, a', a'',\ldots).$$

Wir haben ohne Beweis und als eine offenbare Folgerung aus der Fundamentalformel:

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f[x_0+\vartheta(x-x_0)]$$

der Differenzialrechnung angenommen, daß jede Function $f(x)$, deren Ableitung $f'(x)$ beständig Null ist, nothwendig eine Constante sein muß; denn wenn beständig $f'(x)=0$ ist, so hat man:

$$f'[x_0+\vartheta(x-x_0)]=0,\ f(x)=f(x_0)=c,$$

und wir fügen noch hinzu, daß die Constante c völlig willkührlich ist, und daß es, wenn die Function $f(x)$ für ver-

schiedene Werthe von x Stetigkeitsunterbrechungen darbieten kann, nicht nothwendig ist, daß sie von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ denselben Werth behält, sondern sie kann blos zwischen zwei auf einander folgenden Gliedern der Reihe:

$$-\infty, x_1, x_2, \ldots, x_m, +\infty$$

constant bleiben, indem sie successive die Werthe $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m$ annimmt. Wenn man mit Cauchy durch $\sqrt{a^2}$ immer die positive Wurzel, d. h. $+a$ oder $-a$ bezeichnet, jenachdem a positiv, oder negativ ist; so wird die Function $f(x)$, welche den vorhin ausgesprochenen Bedingungen genügt, offenbar durch folgende Gleichung gegeben:

$$f(x) = \frac{c_0 + c_m}{2} + \frac{c_1 - c_0}{2} \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2}}$$

$$+ \frac{c_2 - c_1}{2} \frac{x - x_2}{\sqrt{(x - x_2)^2}} + \ldots + \frac{c_m - c_{m-1}}{2} \frac{x - x_m}{\sqrt{(x - x_m)^2}}.$$

Denn die so bestimmte Function ist zwischen den Grenzen $x = -\infty$, $x = x_1$, beständig $= c_0$, zwischen den Grenzen $x = x_1$, $x = x_2$ beständig $= c_1, \ldots$ und endlich zwischen den Grenzen $x = x_m$, $x = \infty$ beständig $= c_m$.

Berichtigung. Auf der ersten Seite der Vorrede des Uebersetzers am Ende der letzten Zeile fehlt das Wort: Hände.

Inhaltsverzeichniß.

Erster Theil.

Integration der entwickelten Differenzialausdrücke. — Analytische und geometrische Anwendungen.

Seite

Erste Vorlesung.

Definitionen. Bestimmte und unbestimmte Integrale . . . . 1 — 7

Zweite Vorlesung.

Unbestimmte Integrale. — Integrationsmethoden durch Substitution, Zerlegung und theilweise Integration . . . . . 8 — 12

Dritte Vorlesung.

Integration algebraischer Functionen . . . . . 13 — 18

Vierte Vorlesung.

Fortsetzung der Integration algebraischer Functionen. — Binomische Differenziale . . . . . 19 — 26

Fünfte Vorlesung.

Integration der exponentiellen, logarithmischen und trigonometrischen oder Kreisfunctionen . . . . . 27 — 34

Sechste Vorlesung.

Verschiedene Eigenschaften der bestimmten Integrale. — Methoden zur Bestimmung der Werthe dieser Integrale . . . . . 35 — 45

Siebente Vorlesung.

Von den bestimmten Integralen, deren Werthe unendlich oder unbestimmt sind. — Hauptwerthe der als unbestimmt erscheinenden bestimmten Integrale. — Singuläre bestimmte Integrale . . . . . 46 — 55

Achte Vorlesung.

Bestimmung eines bestimmten Integrales: 1) vermittelst der Integration durch Reihen und 2) vermittelst der Differenzirung oder Integrirung unter dem Zeichen f. — Fundamentaleigenschaften der Function: . . . . . 56 — 65

$$\Gamma(\mu)=\int_0^1\left(1\frac{1}{x}\right)^{\mu-1}dx=\int_0^\infty z^{\mu-1}\,e^{-z}\,dz.$$

Seite

Neunte Vorlesung.

Vergleichung der beiden Werthe, welche ein doppeltes Integral in gewissen Fällen annimmt, wenn man die Ordnung der Integration umkehrt. — Anwendung dieser Principien auf die Bestimmung bestimmter Integrale. — Wie man vermittelst gewisser besonderer Transformationen verschiedene bestimmte Integrale:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},\quad \int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \ldots .$$

berechnen kann . . . . . 66 — 72

Zehnte Vorlesung.

Integrale der verschiedenen Ordnungen für die Functionen von einer einzigen Veränderlichen. — Anwendung auf die Entwickelung beliebiger Functionen von x oder $x+h$ in Reihen, welche nach den ganzen Potenzen von x oder h fortschreiten. — Taylor'sche und Maclaurin'sche Reihe. Reste dieser Reihen 73 — 79

Elfte Vorlesung.

Geometrische Anwendungen des ersten Theiles der Integralrechnung. — Rectification ebener Curven. — Berechnung von Ellipsen- oder Hyperbelbogen durch convergente Reihen. — Bestimmung der Differenz zwischen zwei schicklich gewählten Ellipsenbogen unter endlicher Form. — Lehrsatz von Fagnano. — Bestimmung der Differenz zwischen zwei sehr großen Längen, wovon die eine auf der Asymptote der Hyperbel vom Anfangspuncte aus, und die andere auf der Hyperbel vom Scheitel aus gezählt wird, und deren Endpuncte derselben Abscisse entsprechen . . . . . 80 — 89

Zwölfte Vorlesung.

Wenn die Relation gegeben ist, welche zwischen dem Bogen einer Curve und einer der Coordinaten seines Endpunctes statt findet, die Gleichung der Curve zu finden. — Gleichung der Curve, deren Bogen mit der Abscisse durch die Gleichung einer Parabel der zweiten, dritten oder fünften Ordnung, einer Ellipse, Hyperbel, Cycloide oder einer logarithmischen Spirale verbunden ist. — Evolventen der so erhaltenen Curven . . . . . 90 — 103

Dreizehnte Vorlesung.

Fortsetzung der geometrischen Anwendungen. — Quadratur ebener Curven. — Verhältnisse zwischen den Flächen, welche von den durch die Gleichungen:

$$f(x, y) = 0,\quad f\left(\frac{x}{a}, y\right) = 0,$$

$$f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = 0,\quad f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) = 0$$

ausgedrückten Curven eingeschlossen werden. — Flächen eines Segmentes des Kreises, der Ellipse und der Hyperbel. — Fläche eines hyperbolischen Sectors, welcher zwischen der Axe der x, dem Hyperbelbogen und dem vom Mittelpuncte nach dem Endpuncte des Bogens gezogenen Radiusvector liegt. Wenn sich dieser letzte Punct in's Unendliche entfernt,

Seite

so wird die Fläche dieses Sectors unendlich groß. — Werth der in den geschlossenen Curven:

$$x^{2m}+y^{2m}=1,\quad x^{\frac{2m}{2n+1}}+y^{\frac{2m}{2n+1}}=1$$

liegenden Fläche. — Fläche der Evolute der Ellipse . . . 104 — 111

Vierzehnte Vorlesung.

Fortsetzung der geometrischen Anwendungen. — Quadratur der krummen Oberflächen. — Verhältniß zwischen einer krummen Oberfläche und ihrer Projection auf eine beliebige Ebene. — Bestimmung einer Fläche auf einer krummen Oberfläche, welche in allen ihren Puncten gegen eine der Coordinatenebenen dieselbe Neigung hat. — Flächeninhalt des Theiles der cylindrischen Fläche $x^2-Rx+z^2=0$, welcher in der Kugel $x^2+y^2+z^2=R^2$ liegt. — Flächeninhalt des Stückes der Kugeloberfläche, welches auf der Seite der positiven y durch die cylindrische Fläche abgeschnitten wird. — Flächeninhalt einer Rotationsoberfläche . . . . . 112 — 127

Funfzehnte Vorlesung.

Fortsetzung der geometrischen Anwendungen. — Cubatur der Körper. — Verhältniß zwischen dem Volumen eines Körpers und den Durchschnitten desselben mit Ebenen, welche zu den den Körper begrenzenden Ebenen parallel sind. — Verhältniß zwischen den von den geschlossenen krummen Flächen:

$$f(x,y,z)=0,\quad f\left(\frac{x}{a},y,z\right)=0,\quad f\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b},z\right)=0,$$

$$f\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{c}\right)=0,\quad f\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)=0$$

begrenzten Volumen. — Inhalt der von Rotationsoberflächen begrenzten Volumen . . . . . 128 — 142

Sechszehnte Vorlesung.

Andere Ableitungsart der Formeln für die Quadratur ebener Flächen und für die Cubatur der Körpers. — Ausdruck des Volumens in Polarcoordinaten . . . . . 143 — 154

Siebenzehnte Vorlesung.

Reduction der vielfachen Integrale. — Erste Methode vermittelst einer Coordinatenveränderung. — Elliptische Coordinaten von Lamé. Binet's Eliminationsmethode, welche auf eine beliebige Anzahl von Gleichungen von der Form:

$$\frac{\xi}{\xi_1-\alpha}+\frac{\eta}{\xi_1-\beta}+\frac{\zeta}{\xi_1-\gamma}+\ldots=1,$$

$$\frac{\xi}{\xi_2-\alpha}+\frac{\eta}{\xi_2-\beta}+\frac{\zeta}{\xi_2-\gamma}+\ldots=1,\ldots.$$

anwendbar ist. — Eigenschaften der homofocalen Oberflächen. — Allgemeineres Coordinatensystem als das von Lamé . . . 155 — 161

Achtzehnte Vorlesung.

Fortsetzung. — Allgemeine Formel für die Transformation der Veränderlichen in den vielfachen Integralen. — Alte unvoll-

Seite

ständige Methode. — Cauchy's Methode. — Jacobi's Lehrsatz. — Catalan's Methode . . . . . 162 — 171

Neunzehnte Vorlesung.

Fortsetzung. — Reduction der vielfachen Integrale durch eine Transformation der Coordinaten. — Ableitung der Formeln:

$$\int_0^{2\pi} f(\alpha\cos u+\alpha'\sin u,\ \beta\cos u+\beta'\sin u)du = \int_0^{2\pi} f(\cos u,\ \sin u)du,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha\mathfrak{u}+\alpha'\mathfrak{v}+\alpha''\mathfrak{w},\beta\mathfrak{u}+\beta'\mathfrak{v}+\beta''\mathfrak{w},\gamma\mathfrak{u}+\gamma'\mathfrak{v}+\gamma''\mathfrak{w})\sin u\,du\,d\vartheta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\mathfrak{u},\ \mathfrak{v},\ \mathfrak{w})\sin u\,du\,d\vartheta,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha\cos u+\alpha'\sin u\cos\vartheta+\alpha''\sin u\sin\vartheta)\sin u\,du\,d\vartheta = 2\pi\int_0^{\infty} f[(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2)\cos u]\sin u\,du,$$

$$\int_{-1}^{+1} f\left\{\frac{hx}{[(a-b)x^2+b]^{\frac12}}\right\}\frac{dx}{[(a-b)x^2+b]^{\frac12}} = \frac{1}{b\sqrt{a}}\int_{-1}^{+1} f\left(\frac{hx}{\sqrt{a}}\right)dx,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u\,du\,d\vartheta}{(A\mathfrak{u}^2+B\mathfrak{v}^2+C\mathfrak{w}^2)^{\frac32}} = \frac{4\pi}{A^{\frac12}B^{\frac12}C^{\frac12}},$$

$$\int_0^b\int_b^c\frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{\beta^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Geometrischer Beweis der Formel:

$$\int_0^b\int_0^c\int_c^{\lambda}\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{ghiklmn} = \frac{\pi}{\sigma}\lambda\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-m^2\sin^2\vartheta-n^2\sin^2u}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}\sqrt{1-n^2\sin^2u}}\,du\,d\vartheta = \frac{\pi}{2}.$$

Legendre's Theorem über die elliptischen Functionen . . 172 — 192

Zwanzigste Vorlesung.

Verschiedene andere Methoden zur Reduction oder Transformation der vielfachen Integrale. — Cauchy's Methode, welche darin besteht, daß man in dem gegebenen Integrale für einen Factor der Function unter dem Zeichen f ein schicklich gewähltes bestimmtes Integral setzt. — Beweis der Formeln:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\frac{x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}e^{-ax}e^{-by}e^{-cz}\cdots}{(1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)^{\mu}}\,dx\,dy\,dz\ldots = \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(\mu)}\int_0^{\infty}\frac{t^{\mu-1}e^{-t}dt}{(a+\alpha t)^l(b+\beta t)^m(c+\gamma t)^n\ldots},$$

Seite

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \frac{x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\ldots}{(1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)^\mu}\,dx\,dy\,dz\ldots$$
$$= \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots\Gamma(\mu-l-m-n\ldots)}{\Gamma(\mu)} \frac{1}{\alpha^l\beta^m\gamma^n\ldots},$$

$$\Gamma(1+a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi a}{\sin a\pi},$$

$$\iiiint \ldots x^{\frac{l}{p}-1} y^{\frac{m}{q}-1} z^{\frac{n}{r}-1} \ldots dx\,dy\,dz\ldots$$
$$= \frac{a^l b^m c^n \ldots}{pqr\ldots} \frac{\Gamma\left(\frac{l}{p}\right)\Gamma\left(\frac{m}{q}\right)\Gamma\left(\frac{n}{r}\right)\ldots}{\Gamma\left(1+\frac{l}{p}+\frac{m}{q}+\frac{n}{r}+\ldots\right)}.$$

Dieſes letzte Integral muß auf alle poſitive Werthe von $x, y, z, \ldots$, welche der Ungleichheit:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \ldots < 1$$

genügen, erſtreckt werden. — Methode von Lejeune-Dirichlet, welche darin beſteht, daß man den zu integrirenden Ausdruck mit einem Factor multiplicirt, deſſen Werth innerhalb der Integrationsgrenzen $= 1$ iſt, und welcher außerhalb dieſer Grenzen verſchwindet. — Beſtimmung des dreifachen Integrales:

$$S = \frac{1}{n-1} \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]^{n-1}},$$

welches zur Berechnung der Anziehung des Ellipſoides:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dient. — Catalan's Methode, welche darin beſteht, daß man mit Hülfe geometriſcher Betrachtungen für ein Flächen- oder Volumenelement ein anderes leichter zu integrirendes ſetzt. — Anwendung auf die Beſtimmung der ganzen Oberfläche des Ellipſoides durch die Gleichung:

$$S = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}\left[(a^2-c^2)\,E(k,\mu) + c^2\,F(k,\mu)\right]$$

Beweis der Formel:

$$S = \iiint dx\,dy\,dz\,\sqrt{\frac{1-m^2x^2-n^2y^2-p^2z^2}{1-x^2-y^2-z^2}}$$
$$= \frac{1}{b}\,\pi\left(\frac{1-m^2}{m}\frac{dU}{dm} + \frac{1-n^2}{n}\frac{dU}{dn} + \frac{1-p^2}{p}\frac{dU}{dp}\right).$$

— Analytiſche Erweiterung dieſer Methode auf eine beliebige Anzahl von Veränderlichen. — Verſchiedene Anwendun-

Seite

gen. — Note über die Bestimmung der Grenzen der Veränderlichen $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, welche mit $x, y, z, \ldots$ durch die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\lambda^2-a^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}+\ldots=1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2-a^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}+\ldots=1,\ldots$$

verbunden sind, und der Bedingung:

$$\frac{x^2}{k^2-a^2}+\frac{y^2}{k^2-b^2}+\frac{z^2}{k^2-c^2}+\ldots \leqq 1$$

entsprechen. — Note von Liouville und Plana über die Realität der Wurzeln der Gleichungen: . . . . . 193 — 226

$$\frac{x^2}{t-a^2}+\frac{y^2}{t-b^2}+\frac{z^2}{t-c^2}+\ldots-h^2=0, \quad \sum \frac{x^2}{t-a^2}=h^2.$$

Ein und zwanzigste Vorlesung.

Ueber den Uebergang vom Reellen zum Imaginären bei der Bestimmung bestimmter Integrale. — Beweis der Euler'schen Formeln:

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{bx\sqrt{-1}}=\frac{e^{\frac{a\pi}{2}\sqrt{-1}}}{b^a}\Gamma(a),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(by^2+2b\beta y)\sqrt{-1}}\,dy=\sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-b\beta^2}\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

Beweis der Gleichung $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx=\Delta$, welche die Bestimmung der darin vorkommenden Integrale auf die Bestimmung der Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{F(x)}=0$ zurückführt. — Der Fall, wo $\Delta=0$ ist. — Anwendung dieser letzten Formel auf die Summirung gewisser Reihen. — Wallis'sche Formel:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\cdots.$$

Directer Beweis derselben Formel. — Beweis der Gleichung:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+re^{t\sqrt{-1}})\,dt,$$

wodurch eine Function, welche nebst ihrer Ableitung stetig ist, in ein bestimmtes Integral verwandelt wird . . . . 227 — 248

Seite

Zweiter Theil.

Integration der Differenzialgleichungen.

Zwei und zwanzigste Vorlesung.

Allgemeine Principien. — Differenzialgleichungen der ersten Ordnung. — Unmittelbare Integration. — Nähere Bestimmung der Differenzialgleichung:

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Das allgemeine Integral einer solchen Gleichung muß immer eine willkührliche Constante enthalten. — Particuläre und singuläre Integrale. — Bedingungen der Integrabilität . . 249 — 257

Drei und zwanzigste Vorlesung.

Integration durch Substitution. — Integration vermittelst eines schicklichen Factors. — Wenn man annimmt, daß das allgemeine Integral existirt, so kann man leicht die Existenz des integrirenden Factors nachweisen. — Cauchy's Beweis. — P. Binet's Beweis. — Partielle Differenzialgleichung, von welcher der integrirende Factor abhängt. — Bestimmung dieses Factors in einigen besondern Fällen. — Lineare Differenzialgleichung. — Homogene Differenzialgleichung. — Integration der Differenzialgleichung: . . . . . 258 — 274

$$(Ax+By+E)\,dx+(Cx+Dy+F)\,dy=0.$$

Vier und zwanzigste Vorlesung.

Integration durch Differenzirung oder durch Substitution der Ableitung y' für die unbekannte Function y . . . . . 275 — 278

Fünf und zwanzigste Vorlesung.

Verfahren, durch welches man aus dem allgemeinen Integrale gewisse singuläre Integrale ableiten kann. — Bestimmung der in dem allgemeinen Integrale vorkommenden Constante 279 — 287

Sechs und zwanzigste Vorlesung.

Strenge Methode zur Nachweisung der Existenz eines Werthes von y, welcher einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung genügt, und zur Berechnung dieses Werthes mit einem gegebenen Grade von Annäherung. — Warum diese Methode nur zur Berechnung des Integrales dienen kann, wenn der der unabhängigen Veränderlichen beigelegte Werth zwischen gewissen Grenzen liegt . . . . . 288 — 295

Sieben und zwanzigste Vorlesung.

Anwendung der in der vorhergehenden Vorlesung auseinandergesetzten Methode auf die Integration einer beliebigen Differenzialgleichung der ersten Ordnung mit zwei Veränderlichen x, y . . . . . 296 — 304

Acht und zwanzigste Vorlesung.

Grenze der Fehler, welche man begehen kann, wenn man die in den vorhergehenden Vorlesungen auseinandergesetzte Methode zur numerischen Berechnung der particulären Integrale einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung anwendet. — Wenn man a priori annimmt, daß das Integral

Seite

existirt, so kann der Fehler auf die Hälfte reducirt werden. — Andere Methode zur näherungsweisen Integration. — Numerische Anwendungen. — Berechnung eines der particulären Integrale der Differenzialgleichung:

$$dy = (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})\, dx$$

bis auf 0, 1 genau . . . . . 305 — 323

Neun und zwanzigste Vorlesung.

Bestimmung aller particulären, oder singulären Integrale, welche einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung angehören können. — Eigenschaften einiger dieser Integrale. — Merkmale der singulären Integrale. — Ein gegebenes Integral ist eine particuläre, oder singuläre Auflösung, jenachdem ein gewisses bestimmtes Integral ein bestimmtes singuläres Integral ist, oder nicht . . . . . 324 — 339

Dreißigste Vorlesung.

Integration der Differenzialgleichungen der ersten Ordnung, worin die Ableitung y' auf ganze, oder gebrochene, positive, oder negative Potenzen erhoben, vorkommt. — Anwendung auf die Bestimmung der Gleichung einer Curve, wenn man die Relation zwischen dem Curvenbogen s und den Coordinaten x, y kennt. — Die Integration läßt sich jedesmal bewerkstelligen, wenn der Bogen s eine homogene Function der Veränderlichen x, y ist. — Betrachtung der Fälle, wo man hat:

$s^2 = 2xy$, $s = ax + by$, $s^2 = x^2 + y^2$, $s^2 = y^2 + mx^2$.... 340 — 350

Ein und dreißigste Vorlesung.

Integration einiger der merkwürdigsten besondern Differenzialgleichungen der ersten Ordnung. — Riccati's Gleichung:

$$dy = (ay^2 + bx^m)dx.$$

Betrachtung des Falles, wo die Trennung der Veränderlichen möglich ist. — Numerische Anwendung auf die Gleichung:

$$dy = y^2 dx + 2x^{-\frac{8}{3}} dx.$$

Im Allgemeinen zu befolgender Gang. — Die Differenzialgleichung:

$$dy = by^2 x^n dx + ax^m dx$$

läßt sich auf die Riccati'sche zurückführen. Dasselbe ist in gewissen Fällen mit der Differenzialgleichung:

$$dy = ay^2 dx + byx^m dx + cx^n dx$$

und in allen Fällen mit den Gleichungen:

$$D_t^2 z + \frac{2n}{t} D_t z = Bz,\quad D_t^2 u - \frac{n(n-1)}{t^2} u = Bu$$

der Fall. — Integration der Differenzialgleichung:

Seite

$$(A+A'x+A''y)(xdy-ydx)-(B+B'x+B''y)dy + (C+C'x+C''y)dx=0.$$

Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4}} = \frac{dy}{\sqrt{a_0y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4}}.$$

Lagrange's, Richelot's und Cauchy's Verfahren: . . . 351 — 366

Zwei und dreißigste Vorlesung.

Integration der totalen Differenzialgleichungen mit einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen. — Differenzialgleichungen mit drei Veränderlichen. — Unmittelbare Integration, oder vermittelst eines integrirenden Factors. — Bedingungen der Integrabilität. — Die Bestimmung des Integrales läßt sich auf die Integration zweier Differenzialgleichungen mit zwei Veränderlichen zurückführen. — Verschiedene Anwendungen. — Wenn die Integration nicht möglich ist, so kann man der gegebenen Gleichung, welche eine gemeinsame Eigenschaft unendlich vieler Curven von doppelter Krümmung ausdrückt, doch immer durch das System der beiden Gleichungen genügen. — Transformation des Trinomes $Xdx+Ydy+Zds$. Merkmal, woran man erkennt, daß dasselbe ein genaues Differenzial ist. — Betrachtung des Falles, wo die Differenziale auf höhere Potenzen erhoben sind. — Der Fall, wo die gegebene Differenzialgleichung eine beliebige Anzahl von Veränderlichen enthält . . . . . 367 — 386

Drei und dreißigste Vorlesung.

Ueber die Integration eines Systemes von n gleichzeitigen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung mit $n+1$ Differenzialen oder mit n Ableitungen. — Beweis der Existenz der allgemeinen Integrale. — Genäherte Berechnung derselben. — Grenzen der begangenen Fehler. — Das System der allgemeinen Integrale muß nothwendig n willkührliche Constanten enthalten, und es giebt nur ein solches System. — Singuläre Integrale . . . . . 387 — 402

Vier und dreißigste Vorlesung.

Integration der gleichzeitigen linearen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung und einiger andern Differenzialgleichungen. — Die Integration hängt von der Auflösung einer characteristischen Gleichung ab. — Betrachtung des Falles, wo diese Gleichung gleiche Wurzeln hat . . . . . 403 — 411

Fünf und dreißigste Vorlesung.

Integration einer Differenzialgleichung von einer beliebigen Ordnung mit zwei Veränderlichen. — Allgemeine Principien. — Bedingungen der Integrabilität einer solchen Gleichung. — Das allgemeine Integral enthält nothwendige Constanten. — Jedes singuläre Integral enthält nothwendig weniger, als n Constanten. Soll der Ausdruck $F[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}]$ ein genaues Differenzial sein, so ist erforderlich, aber auch hinreichend, daß man habe:

Seite

$$D_y F - D_x D_{y'} F + D_x^2 D_{y'^2} F - \ldots = 0.$$

Beweis von J. Binet. Bedingungen, welche erfüllt werden müssen, wenn die Function F eine gewisse Anzahl von Malen integrabel sein soll. — Erweiterung dieser Methode auf eine Differenzialgleichung von einer beliebigen Ordnung und irgend einer Anzahl von Veränderlichen. — Euler's merkwürdige Folgerungen hieraus . . . . . 412 — 425

Sechs und dreißigste Vorlesung.

Allgemeine Eigenschaften und Integration der linearen Differenzialgleichungen der n^{ten} Ordnung mit veränderlichen, oder constanten Coefficienten und mit, oder ohne zweiten Theil. — Erste Eigenschaft: Die Integration der Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile läßt sich immer auf die Integration derselben Gleichung ohne zweiten Theil zurückführen. — Zweite Eigenschaft: Das allgemeine Integral der linearen Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile ergiebt sich vermittelst eines vielfachen Integrales aus den Integralen von n linearen Differenzialgleichungen ohne zweiten Theil. — Dritte Eigenschaft: Das allgemeine Integral der Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile ergiebt sich vermittelst eines vielfachen Integrales aus n particulären Integralen der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil. — Vierte Eigenschaft: Wenn man m particuläre Integrale der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil kennt, so kann man die Integration der Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile immer auf die Integration einer neuen linearen Differenzialgleichung von der $(n-m)^{ten}$ Ordnung zurückführen. — Fünfte Eigenschaft: Wenn $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, n particuläre Integrale der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil sind, und y_1 ist ein particuläres Integral der Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile; so sind die allgemeinen Integrale der Differenzialgleichung mit, oder ohne zweiten Theil resp.:

$$y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 + \ldots + C_n Y_n + y_1,$$
$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 + \ldots + C_n Y_n.$$

Analogie zwischen den linearen Differenzialgleichungen und den algebraischen Gleichungen. — Lehrsatz von Libri und Beweis desselben von Liouville. — Beispiel der Erniedrigung der Ordnung linearer Differenzialgleichungen . . . 426 — 441

Sieben und dreißigste Vorlesung.

Integration der linearen Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung mit constanten Coefficienten und mit, oder ohne ein letztes veränderliches Glied. — Erste Methode: Reduction der linearen Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung auf ein System von n linearen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung. — Zweite Methode: Durch successive Erniedrigung der Ordnung der gegebenen Differenzialgleichung. — Dritte Methode: Durch den Uebergang von der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil zu der mit einem zweiten Theile. — Betrachtung des Falles, wo man $n-m$ Integrale dieser letzten Gleichung kennt. — Betrachtung des Falles, wo die characteristische Gleichung gleiche Wurzeln hat. Verschiedene Verfahrungsarten, wodurch man dem Integrale seine ganze Allgemeinheit wieder giebt. — Untersuchung des Falles, wo die characteristische Gleichung gleiche Wurzeln hat.

Seite

— Verschiedene Anwendungen auf Differenzialgleichungen ohne oder mit einem constanten, oder veränderlichen zweiten Theile . . . . . 462 — 481

Acht und dreißigste Vorlesung.

Integration einiger linearer Differenzialgleichungen der n^{ten} Ordnung mit veränderlichen Coefficienten. — Betrachtung der Differenzialgleichung:

$$D_x^n y + \frac{A_1}{a+bx} D_x^{n-1} y + \ldots + \frac{A_n y}{(a+bx)^n} = X.$$

Untersuchung des Falles, wo die characteristische Gleichung gleiche Wurzeln hat. — Integration der Differenzialgleichung:

$$D_x^2 z = ax^m z$$

vermittelst eines bestimmten Integrales. — Betrachtung des Falles, wo man das allgemeine Integral der Differenzialgleichung:

$$D_x^2 z = ax^{a-2} z$$

unter endlicher Form erhalten kann. — Lobatto's Verfahren zur Integration der beiden Differenzialgleichungen:

$$D_x^n y - xy = 0, \quad D_x^2 y + abx^n y = 0.$$

Verschiedene Anwendungen: I. Gleichungen, worin eine Ableitung von irgend einer Ordnung als Function der um eine oder zwei Einheiten niedrigern Ableitung ausgedrückt ist. — II. Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung, worin eine der Veränderlichen x, y fehlt. — III. Homogene Differenzialgleichungen. — IV. Differenzialgleichung, welche homogen wird, wenn man darin y als vom m^{ten} Grade betrachtet. — V. Differenzialgleichung, worin die Veränderliche y und ihre Differenziale dy, d^2y, ... überall einerlei Dimension haben. — VI. Integration der Differenzialgleichung:

$$d^2y + \frac{ay dx^2}{(by^2+c+2dx+ex^2)^2}$$

vermittelst eines unbestimmten Factors. — Integration der Differenzialgleichungen:

$$D_x^2 y + f(x) D_x y + F(y) D_x y^2 = 0,$$
$$zD_y f + D_x z D_{y'} f + D_x^2 z D_{y''} f \ldots + D^n z D_y^{(n)} f = 0.$$

Integration der gleichzeitigen Differenzialgleichungen:

$$D_t^2 x = D_x R, \quad D_t^2 y = D_y R, \quad D_t^2 z = D_z R, \ldots.$$

Eliminationsmethode, welche auf die beiden Differenzialgleichungen:

$$M_1 D_t^{m_1} y + M_2 D_t^{m_2} y + M_3 D_t^{m_3} y + \ldots = T_1,$$
$$N_1 D_t^{n_1} y + N_2 D_t^{n_2} y + N_3 D_t^{n_3} y + \ldots = T_2$$

anwendbar ist . . . . . 482 — 536

Seite

Neun und dreißigste Vorlesung.

Reduction eines Systems von n Differenzialgleichungen der ersten Ordnung auf eine einzige Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung. — Integration durch Reihen, und zwar vermittelst der Taylor'schen und Maclaurin'schen Formel, oder durch die Methode der unbestimmten Coefficienten. — Anwendung auf die Riccati'sche Differenzialgleichung. — Transformation der erhaltenen Reihen in bestimmte Integrale. — Betrachtung des Falles, wo sich die Integration verrichten läßt. Besondere, auf die Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y + X_1 D_x y + X_2 y = 0$$

anwendbare Methode. — Ausdruck des Integrales vermittelst einer Reihe vielfacher Integrale. — Besonders auf die Gleichung:

$$D_x^2 z = X z$$

anwendbares Verfahren. — Einige Eigenschaften der Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$D_x^2 y + X_1 D_x y + X_2 y = 0.$$

Note über die singulären Integrale der Differenzialgleichungen einer beliebigen Ordnung . . . . . 537 — 569

Vierzigste Vorlesung.

Neue Methode zur Integration eines beliebigen Systemes gleichzeitiger Differenzialgleichungen der ersten Ordnung. — Die Integration dieses Systemes von Differenzialgleichungen wird auf die Bestimmung der particulären Integrale einer Hülfsgleichung mit partiellen Differenzialen zurückgeführt. — Anwendung auf verschiedene Beispiele. — Entwickelung der gesuchten Integrale in Reihen . . . . . 570 — 589

Ein und vierzigste Vorlesung.

Bestimmung der Grenzen, zwischen welchen die Reihen, welche die allgemeinen Integrale eines Systemes von Differenzialgleichungen ausdrücken, convergent bleiben, und der Fehler, welche man begeht, wenn man von jeder Reihe nur die n ersten Glieder nimmt. — Note über die Bestimmung der absoluten Maxima und Minima. — Zusatz über die Methode, vermittelst welcher man in gewissen Fällen alle Integrale eines Systemes gegebener Differenzialgleichungen aus einigen derselben ohne Integration ableiten kann . . . . . 590 — 618

Integralrechnung.

Erster Theil.

Integration der entwickelten Differenzialausdrücke. — Analytische und geometrische Anwendungen.

Erste Vorlesung.

Definitionen. — Bestimmte und unbestimmte Integrale.

§. 1. Die Integralrechnung ist das Umgekehrte der Differenzialrechnung. Ihr Hauptobject besteht darin: die Function zu finden, welche, wenn sie differenzirt wird, ein gegebenes Differenzial wiedergiebt, oder die Intetegralrechnung lehrt: wie man von den Differenzialen und Ableitungen zu den ursprünglichen Functionen, wovon sie abgeleitet sind, zurückgeht.

§. 2. Da das Differenzial $f(x)\,dx$ einer stetigen Function $F(x)$, wenn es stetig und unendlich klein ist, dem Zuwachse der Function gleich ist, wenn die unabhängige Veränderliche x einen unendlich kleinen Zuwachs bekommt; so folgt unmittelbar, daß, wenn man die Summe der unendlich kleinen Werthe bildet, welche dieses Differenzial annimmt, wenn man x stetig, d. h. nach unendlich kleinen Incrementen dx von einem endlichen und reellen Werthe x_0 zu einem andern ebenfalls endlichen und reellen Werthe X übergehen läßt, man nothwendig die Summe der Zuwächse erhält, welche die Function $F(x)$ annimmt, indem sie von dem Werthe $F(x_0)$ zu dem Werthe $F(X)$ übergeht, und daß diese Summe folglich dem Gesammtzuwachse $F(X) - F(x_0)$ dieser Function gleich ist. Man erhält folglich, bis auf eine Constante $-F(x_0)$, den Werth der Function $F(x)$, welcher irgend einem reellen Werthe X von x entspricht, wenn man die Summe der unendlich kleinen Werthe des Differenziales $f(x)\,dx$ bildet, indem x von x_0 zu X übergeht. Dieser Fundamentalsatz, dessen Richtigkeit aus den folgenden Betrachtungen noch vollständiger hervorgehen wird, ist die Veranlassung gewesen, daß man die ursprüng-

liche Function $F(x)$ die Summe oder das Integral und den Inbegriff der Methoden, vermöge welcher man von dem Differenziale $f(x)dx$ zu der ursprünglichen Function $F(x)$ oder zu gewissen bestimmten Werthen dieser Function übergeht, die Integralralrechnung genannt hat.

§. 3. **Lehrsatz 1.** Es sei $f(x)$ eine zwischen den Grenzen x_0, X stetige Function, so wollen wir das Intervall $X-x_0$ in n Intervalle x_1-x_0, x_2-x_1, ..., $x_n-x_{n-1}=X-x_{n-1}$ zerlegen und jedes derselben mit dem Werthe der Function multipliciren, welcher dem Anfange jedes Intervalles oder Elementes entspricht, nämlich x_1-x_0 mit $f(x_0)$, x_2-x_1 mit $f(x_1)$, ... $X-x_{n-1}$ mit $f(x_{n-1})$; so hat die Summe dieser Producte, nämlich:

$$S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

nach einem bekannten Lehrsatze einen endlichen Werth, welcher dem Producte aus der Summe $X-x_0$ der Größen x_1-x_0, x_2-x_1, ..., $X-x_{n-1}$ von demselben Zeichen und einem Werthe von $f(x)$, welcher ein Mittel zwischen den Werthen $f(x_0)$, $f(x_1)$, ... $f(x_{n-1})$, d. h. größer, als der kleinste und kleiner, als der größte derselben ist, gleich ist.

Anmerkung 1. Da diese Größen oder Coefficienten besondere Werthe des Ausdruckes $f[x_0+\vartheta(X-x_0)]$ sind, welche zwischen 0 und 1 liegenden Werthen von ϑ entsprechen, so ist das Mittel auch ein Ausdruck von derselben Form, und man hat:

$$S=(X-x_0)\,f[x_0+\vartheta(X-x_0)].$$

Anmerkung 2. Wenn sich alle Elemente der Differenz $X-x_0$ auf ein einziges reducirten, welches offenbar diese Differenz selbst wäre; so hätte man blos:

$$S=(X-x_0)f(x_0)$$

und man brauchte, um von diesem letzten Falle zu dem vorhergehenden überzugehen für $f(x_0)$ nur einen Ausdruck von folgender Form zu setzen:

$$f[x_0+\vartheta(X-x_0)].$$

§. 4. **Lehrsatz 2.** Der Werth von S hängt im Allgemeinen von der Anzahl und von dem Werthe der Elemente x_1-x_0, x_2-x_1, ... $X-x_{n-1}$, und folglich von der gewählten Eintheilungsart des Intervalles $X-x_0$ ab; aber wenn die Zahlenwerthe dieser Elemente sehr klein und ihre Anzahl sehr groß werden, so hat die Eintheilungsart des genannten Intervalles auf den Werth von S keinen merklichen Einfluß mehr.

Beweis. Wir wollen zuvörderst annehmen, daß die zweite Eintheilungsart eine abermalige Eintheilung (Untereintheilung)

der Elemente x_1-x_0, x_2-x_1, ... sei, so sind die verschiedenen Glieder von S, nämlich:

$$(x_1-x_0)f(x_0),\ (x_2-x_1)f(x_1),\ \ldots.,\ (X-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

nach §. 3 resp.:

$$(x_1-x_0)f[x_0+\vartheta_0(x_1-x_0)]=(x_1-x_0)[f(x_0)+\varepsilon_0],$$
$$(x_2-x_1)f[x_1+\vartheta_1(x_2-x_1)]=(x_2-x_1)[f(x_1)+\varepsilon_1],\ldots.$$
$$(X-x_{n-1})f[x_{n-1}+\vartheta(X-x_{n-1})]=(X-x_{n-1})[f(x_{n-1})+\varepsilon_{n-1}],$$

wo ε_0, ε_1, ... ε_{n-1} Größen sind, welche mit den Differenzen x_1-x_0, x_2-x_1, ... $X-x_{n-1}$ verschwinden, und man hat folglich:

$$S'=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$$
$$+(x_1-x_0)\varepsilon_0+(x_2-x_1)\varepsilon_1+\ldots+(X-x_{n-1})\varepsilon_{n-1}=S+(X-x_0)\varepsilon',$$

wo ε' ein Mittel zwischen ε_0, ε_1, ... ε_{n-1} und folglich auch eine sehr kleine Größe ist, wenn die Intervalle $x_1-x_0, x_2-x_1, \ldots.$ sehr klein sind, und welche mit diesen Intervallen verschwindet. Der Werth von S wird also nicht merklich geändert, wenn man zu einer zweiten Eintheilung schreitet, worin jedes der schon sehr kleinen Elemente der ersten Eintheilung wieder in mehrere Elemente zertheilt wird. Wenn die zweite Eintheilung keine abermalige Eintheilung der ersten wäre, so könnte man sie beide mit einer dritten vergleichen, welche aus ihrer Verbindung entsteht, oder so beschaffen ist, daß jedes ihrer Elemente durch die Vereinigung mehrerer Elemente der dritten Eintheilung entstände. Dieses fände statt, wenn alle in den beiden ersten Eintheilungsarten zwischen die Grenzen x_0, X eingeschobenen Werthe von x_0, x_1, $x_2\ldots.$, x_{n-1} bei der dritten Eintheilung angewandt würden. Da alsdann der Werth von S nahezu derselbe bleibt, wenn man von der ersten, oder von der zweiten zu der dritten Eintheilung übergeht, so ändert er sich auch nicht merklich, wenn man von der ersten Eintheilung zu der zweiten übergeht.

§. 5. Anmerkung 1. Wenn die Elemente der Differenz $X-x_0$ unendlich klein werden, so hat folglich die Eintheilungsart auf den Werth von S nur noch einen unmerklichen Einfluß, und wenn man die Zahlenwerthe dieser Elemente immer kleiner werden läßt, indem man ihre Anzahl immer größer nimmt; so wird der Werth von S zuletzt nahezu constant, oder erreicht eine gewisse Grenze, welche einzig und allein von der Form der Function $f(x)$ und von den der Veränderlichen x beigelegten Grenzwerthen x_0, X abhängt. Diese Grenze ist in Beziehung auf die Function $f(x)$ ein sogenanntes, zwischen den Grenzen x_0, X genommenes bestimmtes Integral.

§. 6. Anmerkung 2. Jedes der Glieder der Summe S oder des bestimmten Integrales ist ein besonderer Werth des Productes:

$$f(x)\,dx=hf(x),$$

woraus man diese Glieder ableitet, wenn man successive setzt:

$x=x_0$, $h=x_1-x_0$; $x=x_1$, $h=x_2-x_1$, ...; $x=x_{n-1}$, $h=X-x_{n-1}$, so daß das bestimmte Integral wirklich die Grenze der Summe der Werthe ist, welche das Differenzial zwischen den Grenzen x_0, X annimmt, weshalb man dieses bestimmte Integral auch durch:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

bezeichnet, und man hat folglich:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx =$$

$$\text{lim.}\,[(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})]$$
$$=(X-x_0)f[x_0+\vartheta(X-x_0)].$$

§. 7. Wenn man in dem bestimmten Integrale $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ beide Grenzen, oder blos eine derselben, z. B. X, sich ändern läßt, so ändert sich auch der Werth des Integrales, und wenn man x für die veränderlich gewordene Grenze X setzt; so erhält man eine neue Function $F(x)$ von x, welche durch die Gleichung:

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=(x-x_0)f[x_0+\vartheta(x-x_0)]$$

bestimmt wird, für $x=x_0$ verschwindet und mit $f(x)$ zu gleicher Zeit stetig ist. Außerdem ist aus der Differenzialrechnung bekannt, daß man, wenn $F'(x)$ die Ableitung von $F(x)$ bezeichnet, hat:

$$F(x)=(x-x_0)F'[x_0+\vartheta(x-x_0)],$$

weil $F(x_0)=0$ ist. Man hat folglich auch:

$$F'[x_0+\vartheta(x-x_0)]=f[x_0+\vartheta(x-x_0)],$$

woraus folgt, wenn man $x=x_0$ setzt:

$$F'(x_0)=f(x_0),$$

und da x_0 beliebig ist:

$$F'(x)=f(x).$$

Folglich hat das als Function von x betrachtete Integral:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=F(x)$$

die unter dem Integralzeichen $\int$ stehende Function $f(x)$ zur Ableitung, und man hat daher die Gleichung:

$$d\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=f(x).$$

§. 8. Wenn man durch $F(x)$ den allgemeinen Werth der Function bezeichnet, deren Differenzial $f(x)\,dx$ ist, oder den Werth, welcher der Gleichung:

$$dF(x)=f(x)\,dx$$

genügt; so ist $F(x)$ nothwendig von der Form:

$$F(x)+C=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+C,$$

wo C eine von x unabhängige willkührliche Constante bezeichnet; denn die Function $F(x)$ hat selbst $f(x)$ zum Differenziale, und bekanntlich können sich zwei Functionen, welche dasselbe Differenzial haben, nur durch eine Constante von einander unterscheiden. Wenn man in der Gleichung:

$$F(x)=F(x)+C$$

$x=x_0$ setzt, so erhält man:

$$F(x_0)=F(x_0)+C,$$

woraus folgt, weil $F(x_0)=0$ ist:

$$F(x_0)=C,\ F(x)=F(x)+F(x_0),$$

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=F(x)-F(x_0),$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx=F(X)-F(x_0).$$

Das bestimmte Integral von $f(x)\,dx$, zwischen den Grenzen x_0, X genommen, ist folglich die Differenz der Werthe, welche die Function, deren Differenzial $f(x)\,dx$ ist, annimmt, wenn man successive $x=x_0$ und $x=X$ setzt.

§. 9. Die Function $F(x)$, welche differenzirt, $f(x)\,dx$ wiedergiebt und als besondern Fall das bestimmte Integral $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ unter sich begreift, welches man daraus ableitet, wenn man $C=0$ setzt, wird das unbestimmte Integral genannt und in der Integralrechnung durch $\int f(x)\,dx$ bezeichnet, so daß der allgemeine Werth von y, welcher der Gleichung:

$$dy=f(x)\,dx$$

genügt, durch die Gleichung:

$$y=\int f(x)\,dx=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+C$$

gegeben wird, und man identisch hat:

$$d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx.$$

Die beiden Zeichen d und $\int$, wovon das eine die Differenzirung und das andere die Integration andeutet, heben sich also gegenseitig auf und es ist immer:

$$\int du=u+C;\ d\int du=du.$$

§. 10. Ein gegebenes Differenzial $f(x)\,dx$ integriren, heißt, das unbestimmte Integral $F(x)$ suchen; dasselbe Differenzial von x_0 aus integriren, heißt, das bestimmte Integral:

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)dx=F(x)-F(x_0)$$

suchen, welches man leicht erhält, wenn man von dem unbestimmten Integrale seinen Werth für $x=x_0$ abzieht, und endlich heißt das Integriren zwischen zwei gegebenen Grenzen x_0, X nichts anders, als das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ nehmen, welches der Unterschied zwischen den $x=x_0$, und $x=X$ entsprechenden Werthen des unbestimmten Integrales ist.

§. 11. Man braucht nur einen besondern Werth $F(x)$ von y zu kennen, welcher der Gleichung $dy=f(x)dx$ genügt, um daraus sofort das unbestimmte Integral:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

und die beiden bestimmten Integrale:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx=F(x)-F(x_0),\quad \int_{x_0}^{X} f(x)dx=F(X)-F(x_0)$$

abzuleiten; aber blos in dem Falle, wo, wie wir vorausgesetzt haben, die Functionen $f(x)$ und $F(x)$ zwischen den Grenzen dieser beiden Integrale stetig bleiben.

Beispiel. Man genügt der Gleichung $dy=\frac{dx}{1+x^2}$, wenn man $y=\text{arc tang } x$ setzt, und da die beiden Functionen $\frac{1}{1+x^2}$, arc tang x zwischen den Grenzen $x=-\infty$, $x=+\infty$ stetig bleiben; so hat man:

$$\int \frac{dx}{1+x^2}=\text{arc tang } x+C,\quad \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\text{arc tang } x,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}=0,785.$$

§. 12. Die Existenz des bestimmten Integrales:

$$F(X)=\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

wenn man es berechnen könnte, ohne X einen besondern Werth beizulegen, würde unmittelbar die Existenz des unbestimmten Integrales, welches man daraus ableitete, wenn man X in x verwandelte und zu $F(x)$ eine willkührliche Constante C addirte, zur Folge haben.

Obgleich man aber das bestimmte Integral nicht immer genau berechnen kann, so existirt es doch in der That und ist die endliche Grenze der Summe:

$$S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1}),$$

welcher man ſich ohne Ende, und ſo weit man will, nähern kann, wenn man die Intervalle $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... hinreichend klein oder ihre Anzahl hinreichend groß macht. Mithin exiſtirt auch das unbeſtimmte Integral, d. h., es gibt immer einen Werth von y, welcher der Gleichung $dy = f(x)\,dx$ genügt.

§. 13. Man kann auch die Exiſtenz des beſtimmten Integrales und folglich die des unbeſtimmten Integrales geometriſch nachweiſen. Denn wenn $f(x)\,dx$ das gegebene Differenzial iſt, und man denkt ſich die Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ iſt; ſo iſt die zwiſchen den den Abſciſſen x_0, x entſprechenden Ordinaten y_0, y dieſer Curve liegende Fläche eine reelle Function $F(x)$ von x. Nun wird aber in der Differenzialrechnung bewieſen, daß die in Beziehung auf die veränderliche Abſciſſe x genommene Ableitung dieſer Fläche die Function $f(x)$ iſt, welche die Ordinate der Curve ausdrückt. Es exiſtirt folglich immer eine Function $F(x)$, deren Differenzial $= f(x)\,dx$ iſt.

§. 14. Umgekehrt könnte man ſehr leicht ein beliebiges beſtimmtes Integral $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ erhalten, ſobald man das unbeſtimmte Integral hätte, und da die Beſtimmung der unbeſtimmten Integrale ſicherer und leichter iſt; ſo bildet dieſe ganz natürlich den erſten und Hauptgegenſtand der Integralrechnung.

Zweite Vorlesung.

Unbestimmte Integrale. — Integrationsmethoden durch Substitution, Zerlegung und theilweise Integration.

---

§. 15. Da die Integralrechnung das Umgekehrte der Differenzialrechnung ist und jede Operation eine umgekehrte zur Folge hat, so hat jeder Lehrsatz der Differenzialrechnung seinen correspondirenden in der Integralrechnung. Geht man also von der Definition des unbestimmten Integrales aus, so ergeben sich aus den bekannten Gleichungen:

$d.au = adu,$
$d(u \pm v \pm w \pm \ldots) = du \pm dv \pm dw \pm \ldots = (u' + v' + w' \ldots)\,dx,$
$d(au \pm bv \pm cw \pm \ldots) = adu \pm bdv \pm cdw \pm \ldots,$
$d(u + v\sqrt{-1} = du + dv\sqrt{-1},\ d(uv) = udu + vdu,$

die folgenden umgekehrten Gleichungen:

1. $\int adu = a\int du$

2. $\int (u \pm v \pm w \pm \text{etc.})\,dx = \int udx \pm \int vdx \pm \int wdx \text{ etc.}$

3. $\int (au \pm bv \pm cw \pm \text{etc.})dx = a\int udx \pm b\int vdx \pm c\int wdx \pm \text{etc}$

4. $\int (u \pm v\sqrt{-1})\,dx = \int udx \pm \sqrt{-1}\int vdx,$

5. $uv + C = \int udv + \int vdu = \int uv'dx + \int vu'dx,$

oder einfacher:

$$uv = \int udv + \int vdu,$$

wo die Constante C als in den Integralen des zweiten Theiles mitbegriffen betrachtet werden kann.

§. 16. Wenn man in dem zu integrirenden Ausdrucke $f(x)dx$ das genaue Differenzial einer bestimmten Function $F(x)$ erkennt, so braucht man zu dieser Function nur eine willkührliche Constante zu addiren, um unmittelbar das verlangte unbestimmte Integral zu erhalten.

Beispiele:

$$\int a dx = ax + C; \quad \int (a+1)x^a dx = x^{a+1} + C; \quad \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C;$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C; \qquad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} lx^2 + C = lx + C; \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang } x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x + C = \frac{\pi}{2} - \text{arc cos } x + C;$$

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc cos } x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C; \quad \int a^x la dx = a^x + C; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{la} + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tang } x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$$

Wenn man in den vorhergehenden Formeln für x eine beliebige Function $z = \varphi(x)$ dieser Veränderlichen setzt, so kann man neue Integrale erhalten, welche allgemeiner sind, als die ersten.

Beispiele:

$$\int [\varphi(x)]^m d.\varphi(x) = \int z^m dz = \frac{[\varphi(x)]^{m+1}}{m+1} + C;$$

$$\int e^{\varphi(x)} d.\varphi(x) = \int e^z dz = e^{\varphi(x)} + C.$$

Der zweite Theil der Gleichung:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

scheint für $m = -1$ unendlich zu werden; allein da man denselben auf folgende Form bringen kann:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1} + C,$$

so wird er wirklich unbestimmt. Man erhält daher seinen wahren Werth, wenn man das Verhältniß $x^{m+1} lx - a^{m+1} la$ der Ableitungen des Zählers und Nenners nimmt und darin $m = -1$ setzt, wodurch man erhält:

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = lx - la + C = lx + C,$$

wie auch schon a priori bekannt war.

§. 17. Wenn man für die Veränderliche x eine andere z

ſubſtituirt, welche mit der erſten durch eine Gleichung $z=\varphi(x)$ verbunden iſt; ſo hat man:

$$x=\chi(z),\ dx=\chi'(z)\,dz,$$

$$f(x)\,dx=f[\chi(z)]\chi'(z)\,dz=\mathrm{F}(z)\,dz,\ \int f(x)dx=\int \mathrm{F}(z)\,dz.$$

Wenn man die Function $\varphi(x)$ ſchicklich wählt, ſo kann es oft geſchehen, daß man das Integral $\mathrm{f}(z)$ von $\mathrm{F}(z)\,dz$ leicht finden kann, und alsdann iſt das geſuchte Integral $\int f(x)\,dx$ auch vollſtändig beſtimmt; denn man hat:

$$\int f(x)\,dx=\int \mathrm{F}(z)\,dz=\mathrm{f}(z)+C=\mathrm{f}[\varphi(x)]+C.$$

Beiſpiele. Wenn man ſucceſſive:

$$x\pm a=z,\ \frac{x}{a}=z,\ x^2+a^2=z,\ x^n=z,\ \mathrm{l}x=z,$$

$$e^x=z,\ \sin x=z,\ \cos x=z$$

und:

$$\int f(z)\,dz=\mathrm{f}(z)$$

ſetzt, ſo findet man:

$$\int f(x\pm a)\,dx=\int f(z)\,dz=\mathrm{f}(x\pm a)+C;$$

$$\int f(ax)\,dx=\frac{1}{a}\int f(z)\,dz=\frac{1}{a}\mathrm{f}(ax)+C;$$

$$\int f\left(\frac{x}{a}\right)dx=a\int f(z)\,dz=a\,\mathrm{f}\left(\frac{x}{a}\right)+C;$$

$$\int x f(x^2+a^2)\,dx=\frac{1}{2}\int f(z)\,dz=\frac{1}{2}\mathrm{f}(x^2+a^2)+C;$$

$$\int x^{a-1} f(x^a)\,dx=\frac{1}{a}\int f(z)\,dz=\frac{1}{a}\mathrm{f}(x^a)+C;$$

$$\int \frac{dx}{x} f(\mathrm{l}x)=\int f(z)\,dz=\mathrm{f}(\mathrm{l}x)+C;$$

$$\int e^x f(e^x)\,dx=\int f(z)\,dz=\mathrm{f}(e^x)+C;$$

$$\int \cos x f(\sin x)\,dx=\int f(z)\,dz=\mathrm{f}(\sin x)+C;$$

$$\int \sin x f(\cos x)\,dx=-\int f(z)\,dz=-\mathrm{f}(\cos x)+C;$$

$$\int \frac{dx}{x-a}=\int \frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\mathrm{l}(x-a)^2+C=\mathrm{l}(x-a)+C;$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m}=\int \frac{dz}{z^m}=-\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}}+C;$$

$$\int \frac{dx}{1+a^2x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}(ax) + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{ds}{s} = \tfrac{1}{2}l(x^2+a^2) + C;$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{ds}{\sqrt{s}} = \sqrt{x^2+a^2} + C;$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\int e^z dz = \frac{e^{ax}}{a} + C;$$

$$\int e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}\int e^z dz = -\frac{1}{a}\,e^{-ax} + C;$$

$$\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int \cos z\,dz = \frac{1}{a}\sin ax + C;$$

$$\int \sin(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int \sin z\,dz = -\cos ax + C;$$

$$\int lx\,\frac{dx}{x} = \int z\,dz = \frac{1}{2}(lx)^2 + C;$$

$$\int \frac{dx}{x\,lx} = \int \frac{ds}{s} = l\,lx + C;$$

$$\int \frac{dx}{x(lx)^m} = \int \frac{ds}{s^m} = -\frac{1}{(m-1)(lx)^{m-1}} + C;$$

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{ds}{1+s^2} = \operatorname{arc\,tang}(e^x) + C;$$

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{\cos x} + C = \sec x + C;$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{\sin x} + C.$$

§. 18. Wenn die Function unter dem Integralzeichen $\int$ in mehrere Theile zerlegt werden kann, so daß sich jeder dieser Theile leicht integriren läßt; so kann man die Integration vermittelst der folgenden Formeln erleichtern:

$$\int(du \pm dv \pm dw \pm \text{etc.}) = \int du \pm \int dv \pm \int dw \pm \text{etc.}$$

$$\int(a\,du \pm b\,dv \pm c\,dw \pm \text{etc.}) = a\int du \pm b\int dv \pm c\int dw + \text{etc.}$$

Beispiele:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arc\,sin} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tang} x - \cot x + C;$$

$$\int (a+bx+cx^2\ldots)\,dx = a\int dx + b\int x\,dx + c\int x^2 dx + \ldots$$
$$= ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \ldots + C.$$

§. 19. Die Gleichung $\int u\,dv = \int uv'\,dx = uv - \int v\,du$ führt die Bestimmung des Integrales $\int u\,dv$ auf die des Integrales $\int v\,du$ zurück, welche sich in gewissen Fällen leichter bewerkstelligen läßt.

Beispiele:

$$\int 1(x)\,dx = x1x - \int x\frac{dx}{x} = x1(x) - \int dx = x(1x-1) + C,$$

$$\int xe^x dx = e^x x - \int e^x dx = e^x(x-1) + C,$$

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C,$$

$$\int x\sin x\,dx = -x\cos x + \sin x + C,$$

$$\int x^m \cos x\,dx = x^m \sin x - m\int x^{m-1}\sin x\,dx.$$

Dieses letzte Integral läßt sich auf ein anderes zurückführen worin der Exponent von x wieder um eine Einheit niedriger, nämlich $= m-2$ ist, u. s. f., so daß man zuletzt auf $\int \sin x\,dx$ oder $\int \cos x\,dx$ kommt, jenachdem m eine ungerade, oder eine gerade Zahl ist.

Dritte Vorlesung.

Integration algebraischer Functionen.

§. 20. Die algebraischen Functionen sind rational, wenn sie blos ganze Potenzen der Veränderlichen enthalten, und im entgegengesetzten Falle heißen sie irrational. Jeder rationale Bruch kann als aus einem ganzen Bestandtheile in Beziehung auf x und aus einem Bruche, dessen Zähler einen um eine Einheit niedrigeren Grad hat, als der Nenner, bestehend betrachtet werden.

Der ganze Bestandtheil läßt sich immer sofort integriren und der gebrochene Bestandtheil kann, wie die Differenzialrechnung lehrt, in mehrere einfache Brüche von folgender Form zerlegt werden:

$$\frac{A\,dx}{x-a},\quad \frac{A\,dx}{(x-a)^m},\quad \frac{A\mp B\sqrt{-1}}{x-a\mp b\sqrt{-1}}\,dx,$$

$$\frac{A\mp B\sqrt{-1}}{(x-a\mp b\sqrt{-1})^m},$$

wo a, b, A, B reelle Constanten bezeichnen. Diese verschiedenen Brüche lassen sich aber mit Hülfe der folgenden Gleichungen integriren:

$$\int\frac{A\,dx}{x-a}=\frac{A}{2}\,l(x-a)^2+C,\quad \int\frac{A\,dx}{(x-a)^m}=-\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}}+C,$$

$$\int\frac{(A\mp B\sqrt{-1})\,dx}{x-a\mp b\sqrt{-1}}=\int\frac{(A\mp B\sqrt{-1})(x-a\pm b\sqrt{-1})\,dx}{(x-a)^2+b^2}$$

$$=(A\mp B\sqrt{-1})\int\frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2}+(B\pm A\sqrt{-1})\int\frac{b\,dx}{(x-a)^2+b^2}$$

$$=\tfrac{1}{2}(A\mp B\sqrt{-1})\,l[(x-a)^2\pm b^2]+(B\pm A\sqrt{-1})\,\text{arc tang}\,\frac{x-a}{b}+C,$$

$$\int\frac{(A\mp B\sqrt{-1})\,dx}{(x-a\mp b\sqrt{-1})^m}=-\frac{A\mp B\sqrt{-1}}{(m-1)(x-a\mp b\sqrt{-1})^{m-1}}+C.$$

Beispiele:

$$\int\frac{dx}{x^2-1}=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{4}\,l\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+C,$$

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{6} l\left[\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right] - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tang} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Einige der vorhergehenden Formeln erscheinen unter einer imaginären Form; allein sie sind in der That reell, weil die imaginären Wurzeln immer conjugirt sind.

§. 21. Wenn die algebraische Function $f(x)$ irrational ist, so giebt es keine allgemeinen Regeln mehr, vermittelst welcher man das Integral $\int f(x)\,dx$ bestimmen könnte. Alsdann muß man für die Veränderliche x eine neue Veränderliche z substituiren, welche so gewählt ist, daß der in $F(z)\,dz$ transformirte Ausdruck $f(x)\,dx$ rational wird, oder man muß das Verfahren der theilweisen Integration wiederholt anwenden.

§. 22. Das Verfahren der Substitution führt nur in sehr wenigen besondern Fällen zum Zwecke.

Beispiel: Wenn f eine rationale Function bezeichnet und man setzt successive:

$$(ax+b)^{\frac{1}{n}} = z, \quad \left(\frac{a_1x+b_1}{a_0x+b_0}\right)^{\frac{1}{n}} = z,$$

$$\frac{a_1x+b_1+\sqrt{(a_1x+b_1)^2+(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}}{a_0x+b_0} = z,$$

so werden x und z durch Gleichungen des ersten Grades mit einander verbunden, welche folglich auf rationale Werthe von x und dx führen, und die Ausdrücke:

$$f\left[x, (ax+b)^{\frac{1}{n}}\right] dx, \quad f\left[x, \left(\frac{a_1x+b_1}{a_0x+b_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right] dx,$$

$$f\left[x, \frac{a_1x+b_1+\sqrt{(a_1x+b_1)^2+(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}}{a_0x+b_0}\right] dx,$$

so wie auch der Ausdruck:

$$f\left[x, \sqrt{(a_1x+b_1)^2+(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}\right] dx$$

werden rational gemacht; denn die darin vorkommende Wurzelgröße wird ebenfalls durch eine rationale Function von x ausgedrückt.

Betrachten wir z. B. den Ausdruck:

$$f(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C})\,dx$$

so läßt sich derselbe zunächst auf die Form:

$$f\left[x, \sqrt{(a_1x+b_1)^2+(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}\right] dx$$

zurückführen, indem man a und b so wählt, daß die Differenz:

$$Ax^2+Bx+C-(a_1x+b_1)^2 = A'x^2+B'x+C',$$

welche von der Form $(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)$ iſt, ſich in reelle Factoren des erſten Grades zerlegen läßt. Dieſes findet ſtatt, wenn:

$$B^2-4A'C=4Ab_1^2+4Ca_1^2-4Ba_1b_1+B^2-4AC>0$$

iſt. Nun kann man aber dieſer letzten Bedingung ſehr leicht genügen, wenn man ſetzt: 1) wenn $B^2-4AC>0$ iſt:

$$b_1=0,\ a_1=0,\ (a_0x+b_0)(a_2x+b_2)=Ax^2+Bx+C;$$

2) wenn A poſitiv iſt:

$$b_1=0,\ a_1=\sqrt{A};$$

3) wenn C poſitiv iſt;

$$b_1=\sqrt{C},\ a_1=0.$$

Da ferner:

$$Ax^2+Bx+C-(x\sqrt{A})^2=1\times(Bx+C),$$
$$Ax^2+Bx+C-(\sqrt{C})^2=x(Ax+B)$$

iſt, ſo kann man im zweiten Falle ſetzen:

$$a_0x+b_0=x,\ a_0=1,\ b_0=0,\ a_2x+b_2=Bx+C$$

und im dritten Falle:

$$a_0x+b_0=1,\ a_0=0,\ b_0=1,\ a_2x+b_2=Ax+B.$$

Sind dieſe Transformationen vorgenommen, ſo braucht man, um den Ausdruck:

$$f(x,\sqrt{Ax^2+Bx+C})\,dx$$

rational zu machen, nur zu ſetzen:

$$z=\frac{a_1x+b_1+\sqrt{(a_1x+b_1)^2+(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}}{a_0x+b_0},$$

d. h. 1) wenn $B^2-4AB>0$ iſt, zu ſetzen:

$$z=\frac{\sqrt{(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}}{a_0x+b_0},$$

$$\sqrt{(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}=\sqrt{Ax^2+Bx^2+C}=(za_0x+b_0);$$

2) wenn $A>0$ iſt, zu ſetzen:

$$z=x\sqrt{A}+\sqrt{Ax^2+Bx+C},\ \sqrt{Ax^2+Bx+C}=z-x\sqrt{A}$$

und 3) wenn $C>0$ iſt, zu ſetzen:

$$z=\frac{\sqrt{C}+\sqrt{Ax^2+Bx+C}}{x},\ \sqrt{Ax^2+Bx+C}=zx-\sqrt{C}.$$

Es iſt leicht a posteriori einzuſehen, daß vermittelſt dieſer verſchiedenen Vorausſetzungen x, dx und $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ rational durch z ausgedrückt werden, und daß folglich der Ausdruck $f(x,\sqrt{Ax^2+Bx+C})\,dx$, worin f übrigens eine rationale Function bezeichnet, wirklich integrabel wird.

Beiſpiel 1. Es ſei:

$$\int f(x, \sqrt{Ax^2+Bx+C})\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}},$$

ſo ſetze man 1) wenn A poſitiv iſt:

$$\sqrt{Ax^2+Bx+C} = z - x\sqrt{A},$$

woraus folgt:

$$Bx+C = z^2 - 2zx\sqrt{A},\ Bdx = 2zdz - 2x\sqrt{A}dz - 2z\sqrt{A}dx,$$
$$dx(B+2z\sqrt{A}) = 2dz(z-x\sqrt{A}) = 2dz\sqrt{Ax^2+Bx+C},$$
$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} = \frac{dz}{\frac{B}{2}+z\sqrt{A}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} = \int \frac{dz}{\frac{B}{2}+z\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{A}} l\left(\frac{B}{2}+z\sqrt{A}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{A}} l\left(Ax+\frac{B}{2}+\sqrt{A}\sqrt{Ax^2+Bx+C}\right)+C.$$

2) Wenn C poſitiv iſt, ſo ſetze man:

$$\sqrt{Ax^2+Bx+C} = zx - \sqrt{C},\ Ax+B = z^2x - 2z\sqrt{C},$$
$$Adx = z^2dx + 2zxdz - 2dz\sqrt{C},\ dx(A-z^2)$$
$$= 2dz(zx-\sqrt{C}) = 2dz\sqrt{Ax^2+Bx+C},$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} = \int \frac{2dz}{A-z^2} = -\int \frac{2dz}{z^2-A}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\int \frac{dz}{z+\sqrt{A}} - \int \frac{dz}{z-\sqrt{A}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{A}} l\left(\frac{z+\sqrt{A}}{z-\sqrt{A}}\right)^2 + C,$$

und man ſieht leicht ein, daß dieſer Ausdruck auf den bereits weiter oben gefundenen zurückkommt.

Beiſpiel 2. Es ſei:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{C+Bx-x^2}}$$

zu integriren, wenn C poſitiv iſt, ſo ſetze man:

$$\sqrt{C+Bx-x^2} = zx - \sqrt{C},$$

und alsdann findet man:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{C+Bx-x^2}} = -2\int \frac{dz}{1+z^2} = -z^2 \operatorname{arc\,tang} z + C$$
$$= -2 \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{C+Bx-x^2}+\sqrt{C}}{x} = \operatorname{arc\,sin} \frac{x-\frac{B}{2}}{\sqrt{\frac{B^2}{4}+C}} + C.$$

Man hätte auch unmittelbar schreiben können:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{C+Bx-x^2}} =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{B^2}{4}+C-\left(x-\frac{B}{2}\right)^2}} = \int \frac{\frac{dx}{\sqrt{\frac{B^2}{4}+C}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{B}{2}}{\sqrt{\frac{B^2}{4}+C}}\right)^2}}$$

$$= \arcsin \frac{x-\frac{B}{2}}{\sqrt{\frac{B^2}{4}+C}} + C.$$

Wenn die Gleichung $x^2 - Bx - C = o$ zwei reelle Wurzeln α und β hätte, so könnte man setzen:

$$\sqrt{C+Bx-x^2} = (x-\alpha)z,$$

woraus folgt:

$$C+Bx-x^2 = -(x-\alpha)(x-\beta) = (x-\alpha)^2 z^2,$$

$$\beta - x = (x-\alpha)z^2, \quad -dx = z^2 dx + 2(x-\alpha)z\,dz,$$

$$\frac{dx}{z(x-\alpha)} = \frac{dx}{\sqrt{C+Bx-x^2}} = -\frac{2dz}{1+z^2}, \text{ etc.}$$

Beispiel 3. Es ist:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = l(x+\sqrt{x^2+1})+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = l(x+\sqrt{x^2-1})+C.$$

Nur ein einziger Fall, nämlich wenn $B^2 - 4AC < o$, $A < o$, $C < o$ ist, fügt sich der Methode nicht, weil alsdann die Wurzelgröße nothwendig imaginär wird. Man muß daher setzen:

$$\sqrt{Ax^2+Bx+C} = \sqrt{-1}\,\sqrt{-Ax^2-Bx-C},$$

und wie weiter oben integriren.

Wenn man Ausdrücke von folgender Form:

$$\int f\left[x, (ax+b)^{\frac{1}{p}}, (ax+b)^{\frac{1}{q}}, (ax+b)^{\frac{1}{r}}, \ldots\right]dx,$$

$$\int f\left[x, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{1}{p}}, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{1}{q}}, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{1}{r}} \ldots\right]dx$$

zu integriren hätte, so müßte man setzen:

$$ax+b = z^n \text{ oder } \frac{ax+b}{a_1x+b_1} = z^n,$$

wo n der kleinste gemeinschaftliche Divisor von p, q, r,.... ist, und ebenso würde eine rationale Function der Monome $x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{r}{s}}$, etc. rational gemacht.

Auch die Ausdrücke:

$$f\left[x^m, (ax^m + b)^{\frac{1}{n}}\right] x^{m-1}\,dx,$$

$$f\left[x^m, \left(\frac{a_1 x^m + b_1}{a_0 x^m + b_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right] x^{m-1}\,dx$$

lassen sich auf die vorhergehenden Formen zurückführen, wenn man $x^m = z$ setzt.

Vierte Vorlesung.

Fortsetzung der Integration algebraischer Functionen. — Binomische Differenziale.

---

§. 23. Unter binomischen Differenzialen versteht man Ausdrücke von der Form:

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

worin man m und n immer als ganze Zahlen voraussetzen kann; denn wenn sie gebrochene wären, so ließe sich der Ausdruck vermittelst der im vorhergehenden § angegebenen Transformation auf einen ähnlichen Ausdruck zurückführen, worin die Exponenten der Veränderlichen x ganze Zahlen wären. Der Exponent p dagegen ist gebrochen; denn wenn derselbe eine ganze Zahl wäre, so könnte man $(a+bx^n)^p$ entwickeln, und man hätte alsdann blos eine endliche Anzahl von Gliedern von der Form Ax^m zu integriren.

Man kann zunächst den vorhergehenden Ausdruck rational zu machen suchen, wenn man setzt:

$$a+bx^n=z,$$

woraus folgt:

$$x=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},\quad dx=\frac{1}{nb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}dz,$$

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{1}{nb}z^p\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}dz.$$

Wenn also $\frac{m+1}{n}$ eine ganze Zahl ist, so enthält der transformirte Ausdruck keine andere Irrationalgröße, als $z^p=z^{\frac{q}{r}}$, welche rational gemacht wird, wenn man $z=t^r$, oder gleich anfangs $a+bx^n=z^r$ gesetzt hätte.

Da man hat:

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx=x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p\,dx,$$

und da der zweite Theil dieser Gleichung nach dem eben Gesagten integrabel ist, wenn $\frac{m+n\,p+1}{-n}$, und folglich $\frac{m+n\,p+1}{n}$ oder $\frac{m+1}{n}+p$ eine ganze Zahl ist; so genügt es, um den Ausdruck:

$$x^m(a+bx^n)dx$$

integriren zu können, daß $\frac{m+1}{n}$ oder $\frac{m+1}{n}+p$ eine ganze Zahl ist.

Derselbe Ausdruck $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ verwandelt sich, wenn man x für x^n, $\frac{dx}{nx^{n-1}}$ für dx und x^n für x^m setzt, in folgenden:

$$\frac{1}{n}\int (ax+a)^p x^{\frac{m}{n}-n+1}\,dx,$$

und ist nur ein besonderer Fall des allgemeinern Ausdruckes:

$$\int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu\,dx,$$

worin μ und ν beliebige Zahlen sind, und welcher offenbar rational gemacht wird, wenn wenigstens eine der drei Größen μ, ν, $\mu+\nu$ eine ganze Zahl ist; dann alsdann erscheint der in Rede stehende Ausdruck unter einer der drei Formen:

$$(ax+b)^{\pm l}(a_1x+b_1)^{\pm\frac{m}{n}}dx, (ax+b)^{\frac{\pm m}{n}}(a_1x+b_1)^{\pm l}\,dx,$$

$$(ax+b)^{\frac{\pm m}{n}}(a_1x+b_1)^{\pm l\mp\frac{m}{n}},$$

worin l, m, n ganze Zahlen sind, und welche man rational, folglich integrabel macht, wenn man für die erste $a_1x+b_1=z^n$, für die zweite $ax+b=z^n$ und für die dritte $\frac{ax+b}{a_1x+b_1}=z^n$ setzt.

§. 24. Wenn die beiden Ausdrücke:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,\quad \int (ax+b)^\mu(a_1x+b_1)^\nu\,dx$$

nicht integrabel sind, so muß man sie auf einfachere Formen zurückzuführen suchen, indem man die Exponenten m oder p, μ oder ν vermittelst der theilweisen Integration oder der Gleichung:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

so viel als möglich zu erniedrigen sucht, wo man für u immer den Factor nimmt, dessen Exponenten man erniedrigen will, und für dv den Factor, dessen Exponenten man ungeändert lassen, oder erhöhen will. Wir wollen zunächst den zweiten Ausdruck, welcher am meisten symmetrisch ist, umformen.

Erster Fall. Man will μ erniedrigen und ν erhöhen. Nimmt man $(ax+b)^\mu$ für u und $(a_1x+b_1)^\nu dx$ für dv, so hat man:

$$(1)\quad \int (ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}\,dx = \frac{(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\nu+1)a_1} - \frac{\mu a}{(\nu+1)a_1}\int (ax+b)^{\mu-1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}dx.$$

Zweiter Fall. Man will μ vermindern und ν ungeändert laſſen. Wenn man in der vorhergehenden Formel $(a_1x+b_1)^{\nu+1}$ durch:

$$(a_1x+b_1)^{\nu}(a_1x+b_1) = (a_1x+b_1)^{\nu}\left[\frac{a_1}{a}(ax+b)+\frac{ab_1-a_1b}{a}\right],$$

erſetzt und die ähnlichen Integrale vereinigt; ſo findet man:

$$(2)\quad \int (ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}\,dx = \frac{(ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+\nu+1)a_1} - \frac{\mu(ab_1-a_1b)}{(\mu+\nu+1)a_1}\int (ax+b)^{\mu-1}\ (a_1x+b_1)^{\nu}\,dx.$$

Dritter Fall. Man will μ erhöhen, ohne ν zu ändern. Wenn man die vorhergehende Gleichung in Beziehung auf das Integral im zweiten Theile auflöſt und μ in $\mu+1$ verwandelt; ſo findet man:

$$(3)\quad \int (ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}\,dx = \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+1)\ (ab_1-a_1b)} - \frac{(\mu+\nu+2)a_1}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)}\int (ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu}\,dx.$$

Wenn man in den Formeln (1), (2), (3) reſp. a, b, μ in a_1, b_1, ν und umgekehrt verwandelt, ſo erhält man drei neue Formeln, welche man in den folgenden Fällen anwenden kann.

Vierter Fall. Man will μ vergrößern und ν verkleinern. Hier hat man die Formel:

$$(4)\quad \int (ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}\,dx = \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu}}{(\mu+1)a} - \frac{\nu a_1}{(\mu+1)a}\int (ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu-1}\,dx,$$

welche man direct erhielte, wenn man $(a_1x+b_1)^{\nu}$ für u nähme.

Fünfter Fall. Man will ν erniedrigen, ohne μ zu verändern. In dieſem Falle hat man die Formel:

$$(5)\quad \int (ax+b)^{\mu}\,(a_1x+b_1)^{\nu}\,dx = \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu}}{(\mu+\nu+1)a} - \frac{\nu(a_1b-ab_1)}{(\mu+\nu+1)a}\int (ax+b)^{\mu}\,(a_1x+b_1)^{\nu-1}\,dx,$$

welche ſich aus der Formel (4) ergiebt, wenn man:

$$(ax+b)^{\mu}(ax+b) = (ax+b)^{\mu}\left[\frac{a}{a_1}(a_1x+b_1)+\frac{a_1b-ab_1}{a_1}\right]$$

für $(ax+b)^{\mu+1}$ ſetzt.

Sechster Fall. Man will ν vergrößern, ohne μ zu verändern. Hier hat man die Formel:

$$(6)\quad \int (ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}\,dx = \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\nu+1)\,(a_1b-ab_1)} - \frac{(\mu+\nu+2)\,a}{(\nu+1)(a_1b-ab_1)}\int (ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu+1}\,dx,$$

welche man erhielte, wenn man die Gleichung (5) in Beziehung auf das zweite Integral auflöste und ν in $\nu+1$ verwandelte.

Wenn man die vorhergehenden Formeln ein oder mehrere Male anwendet, so wird das gegebene Integral auf ein anderes zurückgeführt, worin jedes der Binome $ax+b$, a_1x+b_1 einen zwischen o und 1 liegenden Exponenten hat. Wenn die Exponenten μ und ν ganze Zahlen wären, so würden sie zuletzt auf o und -1 reducirt und das gegebene Integral würde auf eins der folgenden zurückgeführt:

$$\int dx = x + C, \quad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{2a}\,l(ax+b)^2 + C,$$

$$\int \frac{dx}{a_1x+b_1} = \frac{1}{2a_1}\,l(a_1x+b_1)^2 + C,$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)\;\;(a_1x+b_1)} = \frac{1}{ab_1-a_1b}\int d\,l\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right) = \frac{1}{2(ab_1-a_1b)}\,l\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^2 + C.$$

§. 25. Wenn man das Integral:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

unmittelbar vereinfachen will, so nimmt man zunächst x^m für z, und man erhält:

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \int \frac{x^{m-n+1}}{b}\,(a+bx^n)^p bx^{n-1}\,dx = \frac{x^{m-n+1}\,(a+bx^n)^{p+1}}{nb\,(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb\,(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx.$$

Hieraus folgt: 1) wenn man m vermindern und p vergrößern will, die Formel:

$$(1)\quad \int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb\,(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb\,(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx.$$

2) Wenn man m vermindern will, ohne p zu verändern, so erhält man, indem man $(a+bx^n)^p\,(a+bx^n)$ für $(a+bx^n)^{p+1}$ setzt, die Formel:

$$(2)\quad \int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}\,(a+bx^n)^{p+1}}{b\,(m+np+1)} - \frac{(m-n+1)\,a}{b\,(m+np+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx.$$

3) Wenn man m vergrößern will, ohne p zu ändern, so löst man die Gleichung (2) in Beziehung auf das Integral im zweiten Theile auf und verwandelt m in $m+n$, wodurch man die Formel erhält:

$$(3)\quad \int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{b(np+m+n+1)}{a(m+1)}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p\,dx.$$

4) Wenn man p vermindern und m vergrößern will, so nimmt man $x^m\,dx$ für dv, und man erhält die Formel:

$$(4)\quad \int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1} - \frac{npb}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}dx.$$

5) Will man p verkleinern, ohne m zu vergrößern, so setzt man $x^m\left(\frac{a+bx^n-a}{b}\right)$ für x^{m+n} in der Gleichung (4), und man erhält die Formel:

$$(5)\quad \int x^m(a+bx^n)\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+np+1} + \frac{anp}{m+np+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}\,dx.$$

6) Will man endlich p vergrößern, ohne m zu ändern, so braucht man die Gleichung (5) nur in Beziehung auf das im zweiten Theile derselben vorkommende Integral aufzulösen und p in $p+1$ zu verwandeln, wodurch man folgende Formel enthält:

$$(6)\quad \int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{-an(p+1)} + \frac{m+np+n+1}{an(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^{p+1}\,dx.$$

Die vorhergehenden Formeln bieten zuweilen unendliche Glieder dar und können folglich nicht angewandt werden; allein man überzeugt sich leicht, daß in allen den Fällen, wo dieses geschieht, eine der Bedingungen der Integrabilität erfüllt wird, so daß sich das gegebene Differenzial immer auf eine rationale Function zurückführen läßt.

§. 26. Beispiel 1. Es ist:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Da der ganze Exponent m auf diese Weise um zwei Einheiten erniedrigt ist, so kommt man, wenn man dasselbe Verfahren mehrere Male wiederholt, auf einen der beiden Ausdrücke:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}+C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

je nachdem m eine ungerade oder eine gerade Zahl ist. Man erhält also die beiden folgenden Formeln:

1) wenn m eine ungerade Zahl ist:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left[x^{m-1} + \frac{m-1}{m-2}x^{m-3} + \frac{(m-1)\,(m-3)}{(m-2)\,(m-4)}x^{m-5}\ldots + \frac{(m-1)\,(m-3)\ldots 2}{(m-2)\,(m-4)\ldots 1}\right] + C;$$

2) wenn m eine gerade Zahl ist:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left[x^{m-1} + \frac{m-1}{m-2}x^{m-3}\ldots + \frac{(m-1)\,(m-3)\ldots 3}{(m-2)\,(m-4)\ldots 2}\right] + \frac{(m-1)\,(m-3)\ldots 3}{m(m-2)\,(m-4)\ldots 2}\arcsin x + C.$$

Wenn der Exponent negativ wäre und durch m bezeichnet würde, so hätte man die Gleichung:

$$\int \frac{x^{-m}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^{-m+1}\sqrt{1-x^2}}{-m+1} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^{-m+2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

welche man immer anwenden kann, ausgenommen in dem Falle, wo $m=1$ ist. Alsdann ist der zu integrirende Ausdruck:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}},$$

welcher rational gemacht wird, wenn man setzt:

$$\sqrt{1-x^2} = 1+zx,$$

und man findet:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dz}{z} = lz + C = l\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right) + C.$$

Beispiel 2. Es sei das Integral:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

zu bestimmen, welches bei der Berechnung der Schwingungen des Pendels vorkommt; so hat man:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \int \frac{x^{m-1}\left(x-\frac{a}{2}\right)dx}{\sqrt{ax-x^2}} + \frac{a}{2}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{ax-x^2}},$$

und wenn man theilweise integrirt:

$$\frac{x^{m-1}\left(x-\frac{a}{2}\right)dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{ax-x^2} + (m-1)\int x^{m-2}\,dx\sqrt{ax-x^2}$$

$$= -x^{m-1}\sqrt{ax-x^2} + (m-1)\int \frac{x^{m-2}(ax-x^2)\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}$$

$$=-x^{m-1}\sqrt{ax-x^2}+(m-1)a\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}}-(m-1)\int\frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

Subſtituirt man in die erſte Gleichung und reducirt, ſo kommt:

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}}=-\frac{x^{m-1}\sqrt{ax-x^2}}{m}+\frac{2m-1}{2m}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$$

Da der Exponent m auf dieſe Weiſe um eine Einheit erniedrigt iſt, ſo kommt man endlich, wenn man daſſelbe Verfahren auf das Integral im zweiten Theile der Gleichung wiederholt anwendet, auf das Integral:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2}}=\arccos\frac{a-2x}{a}+C.$$

§. 27. Um die Formeln, welche zur Reduction des Integrales:

$$\int(ax+b)^\mu(a_1x+b_1)^\nu dx$$

dienen, auf die directeſte Weiſe zu erhalten, kann man mit Cauchy die Gleichung:

$$\int uvd.\mathrm{l}v=uv-\int uvd.\mathrm{l}u$$

für die gewöhnliche $\int udv=uv-\int vdu$ ſubſtituiren und die Functionen u, v reſp. gewiſſen Potenzen von:

$$ax+b,\ a_1x+b_1,\ \frac{ax+b}{a_1x+b_1}$$

proportional nehmen, indem man die Gleichungen:

$$d\mathrm{l}(ax+b)=\frac{adx}{ax+b},\quad d\mathrm{l}(a_1x+b_1)=\frac{a_1dx}{a_1x+b_1},$$

$$d\mathrm{l}\frac{ax+b}{a_1x+b_1}=\frac{(ab_1-a_1b)dx}{(ax+b)(a_1x+b_1)}$$

berückſichtigt.

Auf dieſe Weiſe erhielte man unmittelbar die Formel (1) in §. 24, wenn man u einer Potenz von $ax+b$ und v einer Potenz von a_1x+b_1 proportional nähme. Eben ſo erhielte man die Formel (2), wenn man u einer Potenz von $\frac{ax+b}{a_1x+b_1}$ und v einer Potenz von a_1x+b_1 proportional ſetzte. Ferner wird die Formel (3) erhalten, wenn man u einer Potenz von a_1x+b_1 und v einer Potenz von $\frac{ax+b}{a_1x+b_1}$ proportional ſetzt; die Formel (4), wenn man u einer Potenz von a_1x+b_1 und v einer Potenz von $ax+b$ proportional ſetzt; die Formel (5), wenn man u einer Potenz von $\frac{a_1x+b_1}{ax+b}$ und v einer Potenz von $ax+b$ proportional ſetzt, und endlich die Formel (6), wenn man u einer Potenz von $ax+b$ und v einer Potenz von $\frac{a_1x+b_1}{ax+b}$ proportional ſetzt.

Auf dieſelbe Weiſe könnte man das Integral:

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

behandeln.

Beiſpiel. Geſetzt, man ſollte das Integral:

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\int(1+x^2)^{-n}dx$$

reduciren, wo n eine ganze größere Zahl als die Einheit bezeichnet, ſo ſetze man u und v reſp. Potenzen von x^2 und von $\frac{1+x^2}{x^2}$ proportional. Alsdann ergiebt ſich aus der Formel:

$$\int uvd.\,lv=uv-\int uvd.\,lu,$$

da man:

$$dl\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)=2\left(\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=-\frac{2dx}{x(1+x^2)}$$

hat, folgende Reductionsformel:

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}&=\int\frac{-x(1+x^2)^{-n+1}}{2}dl\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)\\&=\int\frac{x^{-2n+2}}{2(n-1)}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{-n+1}dl\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{-n+1}\\&=\frac{x(1+x^2)^{-n+1}}{2(n-1)}-\int\frac{x(1+x^2)^{-n+1}}{2(n-1)}dl(x^{-2n+2})\\&=\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}.\end{aligned}$$

Fünfte Vorleſung.

Integration der exponentiellen, logarithmiſchen und trigonometriſchen oder Kreisfunctionen.

§. 28. Bekanntlich verſteht man unter exponentiellen, logarithmiſchen und trigonometriſchen oder Kreisfunctionen diejenigen Functionen, welche veränderliche Exponenten, Logarithmen, trigonometriſche Linien oder Kreisbogen enthalten. Es würde ſehr zu wünſchen ſein, wenn man Differenzialausdrücke mit ſolchen Functionen unmittelbar integriren könnte; allein es giebt zu dieſem Zwecke keine allgemeine Methode, und es bleibt weiter nichts übrig, als ſolche Ausdrücke durch eine Subſtitution algebraiſch zu machen, oder ſie auf einfachere Integrale zurückzuführen.

Beiſpiel. Die Integrale:

$$\int f(\mathrm{l}x)\frac{dx}{x}, \quad \int f(e^x)e^x dx, \quad \int f(e^x)dx,$$

$$\int f(\cos x)\sin x dx, \quad \int f(\sin x)\cos x dx,$$

$$\int f(\sin x, \sin 2x, \ldots, \cos x, \cos 2x, \ldots)dx$$

werden in algebraiſche umgeformt, wenn man ſucceſſive $\mathrm{l}x$, e^x, $\sin x$, $\cos x$ gleich z ſetzt. Setzt man z. B. $\sin x = z$, ſo iſt:

$$\cos x = \sqrt{1-z^2}, \quad \cos x dx = dz, \quad dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Folglich verwandelt ſich das Integral $\int f(\sin x, \cos x)dx$ in:

$$\int f(z, \sqrt{1-z^2})\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

und erſcheint unter einer algebraiſchen Form.

§. 29. Wenn P und z zwei Functionen von x ſind, wovon die erſte algebraiſch bleibt, während die zweite blos eine algebraiſche Ableitung z' hat, und wenn man ferner, indem man ſetzt:

$$\int \mathrm{P}dx = \mathrm{Q}, \quad \int \mathrm{Q}z'dx = \mathrm{R}, \quad \int \mathrm{R}z'dx = \mathrm{S}, \ldots,$$

für Q, R, S, ... bekannte Functionen der Veränderlichen x erhält; ſo kann man vermittelſt mehrerer theilweiſer Integrationen

leicht das Integral $\int P z^n dx$, worin n eine ganze Zahl ist, bestimmen. Denn man hat:

$$\int P z^n dx = z^n \int P dx - n \int [z^{n-1} z' dx \times \int P dx] = Q z^n - n \int Q z' z^{n-1} dx,$$

$$\int Q z' z^{n-1} dx = z^{n-1} \int Q z' dx - (n-1) \int [z^{n-2} z' dx \times \int Q z' dx]$$
$$= R z^{n-1} - (n-1) \int R z' z^{n-2} dx \ldots,$$

und folglich:

$$\int P z^n dx = Q z^n - n R z^{n-1} + n(n-1) S z^{n-2} - \text{etc.} + C.$$

Man genügt den ausgesprochenen Bedingungen, wenn man für z die Functionen:

$$A \, l\,[f(x)], \; A \arctang f(x)$$

setzt, wo A eine Constante und $f(x)$ eine algebraische Function von x ist.

Beispiele. Es sei $P = 1$ und successive:

$$z = lx, \; z = \arcsin x, \; z = \arccos x, \; z = l(x + \sqrt{1+x^2}),$$

so hat man:

$$\int (lx)^n dx = x (lx)^n \left[1 - \frac{n}{lx} + \frac{n(n-1)}{(lx)^2} \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{(lx)^n}\right] + C,$$

$$\int (\arcsin x)^n dx =$$

$$(\arcsin x)^n \left[x + \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x} - \frac{n(n-1)x}{(\arcsin x)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\arcsin x)^3} + \ldots\right] + C,$$

$$\int (\arccos x)^n dx =$$

$$(\arccos x)^n \left[x - \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\arccos x} - \frac{n(n-1)x}{(\arccos x)^2} + \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\arccos x)^3} + \ldots\right] + C,$$

$$\int [l(x+\sqrt{1+x^2})]^n dx = [l(x+\sqrt{1+x^2})]^n \times$$

$$\left[x - \frac{n\sqrt{1+x^2}}{l(x+\sqrt{1+x^2})} + \frac{n(n-1)x}{[l(x+\sqrt{1+x^2})]^2} - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1+x^2}}{[l(x+\sqrt{1+x^2})]^3} + \ldots\right] + C.$$

Sehr leicht könnte man auch die Ausdrücke:

$$\int x^{a-1} (lx)^n dx, \; \int x^{a-1} (\arcsin x)^n dx, \ldots$$

integriren, welche sich von den vorhergehenden durch den Werth von P unterscheiden, der hier $= x^{a-1}$ ist, und man hat z. B.:

$$\int x^{a-1} (lx)^n dx =$$

$$\frac{x^a}{a} (lx)^n \left[1 - \frac{n}{alx} + \frac{n(n-1)}{a^2 (lx)^2} - \text{etc.} \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1.}{a^n (lx)^n}\right] + C.$$

Wenn man in den erhaltenen Formeln successive setzt:

$$lx = z, \quad x = e^z, \quad dx = e^z dz;$$

$$\arcsin x = z, \quad x = \sin z, \quad dx = \cos z dz;$$

$$\arccos x = z, \quad x = \cos z, \quad dx = -\sin z dz;$$

$$l(x + \sqrt{1+x^2}) = z, \quad x + \sqrt{1+x^2} = e^z,$$

$$\frac{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = e^z;$$

$$\sqrt{1+x^2} - x = e^{-z}, \quad x = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad dx = \frac{e^z + e^{-z}}{2} dz;$$

so findet man:

$$\int z^n e^z dz = z^n e^z \left[1 - \frac{n}{z} + \frac{n(n-1)}{z^2} - \text{etc} \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1.}{z^n}\right] + C,$$

$$\int z^n \cos z dz =$$

$$z^n \left\{\sin z \left[1 - \frac{n(n-1)}{z^2} + \ldots\right] + \cos z \left[\frac{n}{z} - \frac{n(n-1)(n-2)}{z^3} + \ldots\right]\right\} + C,$$

$$-\int z^n \sin z dz =$$

$$z^n \left\{\cos z \left[1 - \frac{n(n-1)}{z^2} + \ldots\right] - \sin z \left[\frac{n}{z} - \frac{n(n-1)(n-2)}{z^3} + \ldots\right]\right\} + C,$$

$$\int z^n \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right) dz =$$

$$z^n \left\{\frac{e^z - e^{-z}}{2}\left[1 + \frac{n(n-1)}{z^2} \ldots\right] - \frac{e^z + e^{-z}}{2}\left[\frac{n}{z} + \frac{n(n-1)(n-2)}{z^3} + \ldots\right]\right\} + C,$$

$$\int z^n e^{az} dz = \frac{z^n e^{az}}{a}\left[1 - \frac{n}{az} + \frac{n(n-1)}{a^2 z^2} - \text{etc.} \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{a^n z^n}\right] + C.$$

Diese Formeln könnte man direct erhalten, wenn man mehrere Male so theilweise integrirte, daß der Exponent n immer kleiner würde und zuletzt verschwände. So ergiebt sich z. B. das Integral:

$$\int z^n e^{az} dz$$

aus den Gleichungen:

$$\int z^n e^{az} dz = \frac{z^n e^{az}}{a} - \frac{n}{a} \int z^{n-1} e^{az} dz,$$

$$\int z^{n-1} e^{az} dz = \frac{z^{n-1} e^{az}}{a} - \frac{n-1}{a} \int z^{n-2} e^{az} dz, \text{ etc.}$$

Vermittelst der theilweisen Integration kann man auch die Werthe der beiden Integrale:

$$\int e^{az} \cos bz\, dz, \quad \int e^{az} \sin bz\, dz$$

bestimmen; denn man hat:

$$\int e^{ax} \cos bz dz = \frac{e^{ax} \cos bz}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bz\, dz,$$

$$\int e^{ax} \sin bz dz = \frac{e^{ax} \sin bz}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bz\, dz,$$

woraus folgt:

$$\int e^{ax} \cos bz\, dz = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bz + b \sin bz) + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bz\, dz = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bz - b \cos bz) + C.$$

Anmerkung: Die Formel, welche das Integral $\int z^n e^{ax} dz$ giebt, beruht auf dem Satze, daß $\int e^{ax} dz = \frac{e^{ax}}{a}$ ist. Diese letzte Gleichung findet aber auch noch statt, wenn man $a + b\sqrt{-1}$ für a und folglich:

$$\int e^{(a+b\sqrt{-1})z} dz = \int e^{ax} (\cos bz + \sqrt{-1} \sin bz)\, dz$$

für $\int e^{ax} dz$ setzt. Man kann folglich diese Substitution in die genannte Formel vornehmen, und man erhält:

$$\int z^n e^{ax} (\cos bz + \sqrt{-1} \sin bz) dz = \frac{z^n e^{ax} (\cos bz + \sqrt{-1} \sin bz)}{a + b\sqrt{-1}} \times \left[1 - \frac{n}{(a+b\sqrt{-1})z} + \cdots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{(a+b\sqrt{-1})^n z^n}\right] + C.$$

Diese Formel zerfällt in zwei andere, welche die Werthe der beiden Integrale:

$$\int z^n e^{ax} \cos bz\, dz, \quad \int z^n e^{ax} \sin bz\, dz$$

geben.

§. 30. Man kann auch das Integral:

$$\int \sin^\mu x \cos^\nu x dx,$$

worin μ und ν zwei constante Zahlen sind, rational machen, oder wenigstens reduciren. Setzt man:

$$\sin^2 x = z,$$

folglich:

$$\cos^2 x = 1 - z, \quad dz = 2 \sin x \cos x\, dx,$$

so verwandelt sich das gegebene Integral in folgendes:

$$\pm \frac{1}{2} \int z^{\frac{\mu-1}{2}} (1-z)^{\frac{\nu-1}{2}} dz,$$

und ist rational und integrabel, wenn sich die drei Größen:

$$\frac{\mu-1}{2}, \quad \frac{\nu-1}{2}, \quad \frac{\mu+\nu-2}{2}$$

auf drei rationale Zahlen reduciren, wovon wenigstens eine eine

ganze iſt, was nothwendig jedesmal ſtatt findet, ſo oft μ und ν ganze Zahlen ſind.

In allen Fällen kann man vermittelſt der Gleichung:

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

1) den Exponenten μ erniedrigen und ν erhöhen, wenn man $\sin^{\mu} x$ für den Factor u nimmt, wodurch man erhält:

$$(1)\quad \int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x dx = -\frac{\sin^{\mu-1} x \cos^{\nu+1} x}{\nu+1} + \frac{\mu-1}{\nu+1} \int \sin^{\mu-2} x \cos^{\nu+2} x dx;$$

2) kann man μ vermindern, ohne ν zu verändern, wenn man in der vorhergehenden Formel $\cos^{\nu+2} x$ durch:

$$\cos^{\nu} x \times \cos^{2} x = \cos^{\nu} x \times (1 - \sin^{2} x)$$

erſetzt und reducirt, woraus folgt:

$$(2)\quad \int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x dx = -\frac{\sin^{\mu-1} x \cos^{\nu+1}}{\mu+\nu} + \frac{\mu-1}{\mu+\nu} \int \sin^{\mu-2} x \cos^{\nu} x dx.$$

3) Man kann μ vergrößern, ohne ν zu verändern, wenn man die Gleichung (2) in Beziehung auf das im zweiten Theile vorkommende Integral auflöſt und μ in $\mu + 2$ verwandelt. Auf dieſe Weiſe findet man:

$$(3)\quad \int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x dx = \frac{\sin^{\mu+1} x \cos^{\nu+1} x}{\mu+1} + \frac{\mu+\nu+2}{\mu+1} \int \sin^{\mu+2} x \cos^{\nu} x dx.$$

Wenn man $\cos^{\nu} x$ für den Factor u nimmt und denſelben Gang befolgt, ſo kann man 4) den Exponenten ν vermindern und μ vergrößern, 5) den Exponenten ν vermindern, ohne μ zu verändern, 6) den Exponenten ν vergrößern, ohne μ zu ändern, und zwar vermittelſt der folgenden Formeln:

$$(4)\quad \int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x dx = \int \frac{\sin^{\mu+1} x \cos^{\nu-1} x}{\mu+1} + \frac{\nu-1}{\mu+1} \int \sin^{\mu+2} x \cos^{\nu-2} x dx,$$

$$(5)\quad \int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x dx = \int \frac{\sin^{\mu+1} x \cos^{\nu-1} x}{\mu+\nu} + \frac{\nu-1}{\mu+\nu} \int \sin^{\mu} x \cos^{\nu-2} x dx,$$

$$(6)\quad \int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x dx = \int -\frac{\sin^{\mu+1} x \cos^{\nu+1} x}{\nu+1} + \frac{\mu+\nu+2}{\nu+1} \int \sin^{\mu} x \cos^{\nu+2} x dx.$$

Alsdann kann man das gegebene Integral in ein anderes derſelben Art verwandeln, worin aber die Exponenten von $\sin x$, $\cos x$ zwiſchen -1 und $+1$ liegen. Wenn die Exponenten μ und ν beide ganze Zahlen ſind, ſo reducirt man ſie auf eine der drei Größen $+1, 0, -1$ und man erhält für das Integral:

$$\int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x\, dx$$

eins der neun folgenden:

$$\int dx = x + C, \int \sin x\, dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x \cos x\, dx = \tfrac{1}{2} \sin^2 x + C,$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\tfrac{1}{2} \mathrm{l} \cos^2 x + C,$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \tfrac{1}{2} \mathrm{l} \sin^2 x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \tfrac{1}{2} \mathrm{l} \operatorname{tang}^2 x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{1}{2} dx}{\sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \tfrac{1}{2} \mathrm{l} \operatorname{tang}^2 \frac{x}{2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \tfrac{1}{2} \mathrm{l} \operatorname{tang}^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Wenn man dieſe Principien auf die Beſtimmung der Integrale:

$$\int \sin^n x\, dx, \int \cos^n x\, dx, \int \frac{\sin^n x}{\cos^n x}\, dx,$$

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin^n x}\, dx, \int \frac{dx}{\cos^n x}, \int \frac{dx}{\sin^n x}$$

anwendet, wo n eine ganze Zahl iſt, ſo findet man:

1) wenn n eine gerade Zahl iſt:

$$\int \sin^n x\, dx =$$

$$-\frac{\cos x}{n}\left[\sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} \sin^{n-3} x + \ldots + \frac{3.5 \ldots (n-3)(n-1)}{2.4 \ldots (n-4)(n-2)} \sin x\right]$$

$$+ \frac{1.3 \ldots (n-3)(n-1)}{2.4 \ldots (n-2) n} x + C,$$

$$\int \cos^n x\,dx =$$

$$\frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3} + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-4)(n-2)}\cos x\right] + \frac{1.3\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-2)n}x + C,$$

$$\int \operatorname{tang}^n x\,dx = \frac{\operatorname{tang}^{n-1}x}{n-1} - \frac{\operatorname{tang}^{n-3}x}{n-3} + \frac{\operatorname{tang}^{n-5}x}{n-5} \ldots \pm \operatorname{tang} x \mp x + C,$$

$$\int \cot^n x\,dx = \frac{\cot^{n-1}x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3}x}{n-3} - \frac{\cot^{n-5}x}{n-5} \ldots \pm \cot x \mp x + C,$$

$$\int \sec^n x\,dx =$$

$$\frac{\sin x}{n-1}\left[\sec^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\sec^{n-3}x \ldots + \frac{2.4\ldots(n-4)(n-2)}{1.3\ldots(n-5)(n-3)}\sec x\right] + C,$$

$$\int \operatorname{cosec}^n x\,dx =$$

$$\frac{\cos x}{n-1}\left[\operatorname{cosec}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\operatorname{cosec}^{n-3}x \ldots + \frac{2.4\ldots(n-4)(n-2)}{1.3\ldots(n-5)(n-3)}\operatorname{cosec} x\right] + C,$$

1) wenn n eine ungerade Zahl ist:

$$\int \sin^n x\,dx =$$

$$-\frac{\cos x}{n}\left[\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\sin^{n-3}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\sin^{n-5}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-3)(n-1)}{1.3\ldots(n-4)(n-2)}\right] + C,$$

$$\int \cos^n x\,dx =$$

$$\frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\cos^{n-5}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-3)(n-1)}{1.3\ldots(n-4)(n-2)}\right] + C,$$

$$\operatorname{tang}^n x\,dx =$$

$$\frac{\operatorname{tang}^{n-1}x}{n-1} - \frac{\operatorname{tang}^{n-3}x}{n-3} + \frac{\operatorname{tang}^{n-5}x}{n-5} \ldots \pm \frac{\operatorname{tang}^2 x}{2} \pm \tfrac{1}{2}\operatorname{l}\cos^2 x + C,$$

$$\int \cot^n x\,dx =$$

$$-\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3}x}{n-3} - \frac{\cot^{n-5}x}{n-5} + \ldots \mp \frac{\cot^2 x}{2} \mp \tfrac{1}{2}\operatorname{l}\sin^2 x + C,$$

$$\int \sec^n x\,dx =$$

$$\frac{\sin x}{n-1}\left[\sec^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\sec^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-2)}{2,4\ldots(n-3)}\sec^2 x\right] + \frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\tfrac{1}{2}\mathrm{l}\tan g^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C,$$

$$\int \operatorname{cosec}^n x\,dx =$$

$$-\frac{\sin x}{n-1}\left[\operatorname{cosec}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\operatorname{cosec}^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\operatorname{cosec}^2 x\right] + \frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\tfrac{1}{2}\mathrm{l}\tan g^2 x + C.$$

Zur Bestimmung oder Ableitung der sechs Fundamentalformeln in §. 30 bedient sich Cauchy wieder der Gleichung:

$$\int uv\,d.\mathrm{l}v = uv = \int uv\,d.\mathrm{l}u,$$

und macht successive: 1) den Factor u einer Potenz von $\sin x$ und v einer Potenz von $\cos x$ proportional; 2) macht er u einer Potenz von $\tan g\,x$ und v einer Potenz von $\cos x$ proportional; 3) setzt er u einer Potenz von $\cos x$ und v einer Potenz von $\tan g\,x$ proportional; 4) setzt er u einer Potenz von $\cos x$ und v einer Potenz von $\sin x$ proportional; 5) macht er u einer Potenz von $\cot x$ und v einer Potenz von $\sin x$ proportional, und endlich 6) nimmt er u einer Potenz von $\sin x$ und v einer Potenz von $\cot x$ proportional und berücksichtigt außerdem die Gleichungen:

$$d.\mathrm{l}\sin x = \frac{\cos x}{\sin x}dx,\quad d.\mathrm{l}\cos x = -\frac{\sin x}{\cos x}dx,$$

$$d.\mathrm{l}\tan g\,x = -d.\mathrm{l}\cot x = \frac{dx}{\sin x\cos x}.$$

Auch andere Methoden können zur Reduction oder Bestimmung des Integrales:

$$\int \sin^{\pm m}x\cos^{\pm n}x\,dx$$

dienen, wo m und n zwei ganze Zahlen sind. Denn zunächst ist einleuchtend, daß das Integral:

$$\int \sin^{-m}x\cos^{-n}x\,dx$$

auf einfachere reducirt wird, wenn man die Function unter dem Zeichen $\int$ mehrere Male mit $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ multiplicirt. Ferner kann man den Ausdruck $\sin^{\pm m}x\cos^{\pm n}x\,dx$ rational machen: 1) wenn n eine ungerade Zahl ist, indem man $\sin x = z$ setzt, und 2) wenn m eine ungerade Zahl ist, indem man $\cos x = z$ setzt. Endlich erhält man sehr leicht die Werthe der Integrale:

$$\int \sin^m x\,dx,\quad \int \cos^m x\,dx,\quad \int \sin^m x\cos^n x\,dx,$$

wenn man für $\sin^m x$, $\cos^m x$, $\sin^m x\cos^m x$ ihre Werthe als Functionen von $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, ... $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, ... setzt.

Sechste Vorlesung.

Verschiedene Eigenschaften der bestimmten Integrale. — Methoden zur Bestimmung der Werthe dieser Integrale.

---

§. 32. Das bestimmte Integral:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

wird durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx =$$

$$\lim\,[(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})],$$

deren man sich oft bei der näherungsweisen Berechnung der Werthe bestimmter Integrale bedient. Der Einfachheit wegen nimmt man gewöhnlich an, daß die Größen:

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ X$$

eine arithmetische Progression bilden, so daß die Elemente:

$$x_1-x_0,\ x_2-x_1,\ \ldots,\ X-x_{n-1}$$

alle einander gleich werden, nämlich jedes gleich:

$$\frac{X-x_0}{n}=i,$$

und alsdann hat man:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx =$$

$$\lim i[f(x_0)+f(x_0+i)+f(x_0+2i)+\ldots+f(X-i)].$$

Man könnte auch annehmen, daß die Größen $x_0, x_1, \ldots\ldots X$ eine geometrische Progression bilden, deren Exponent sehr wenig von der Einheit verschieden ist. Nimmt man dieses an und setzt:

$$\sqrt[n]{\frac{X}{x_0}}=1+\alpha,$$

so erhält man:

$$x_1=x_0(1+\alpha),\ x_2=x_1(1+\alpha),\ldots X=x_{n-1}(1+\alpha),$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx =$$

$$\lim \alpha \left\{ x_0 f(x_0) + x_0(1+\alpha) f[x_0(1+\alpha)] + \ldots + \frac{X}{1+\alpha} f\left(\frac{X}{1+\alpha}\right) \right\}.$$

§. 33. Aus dieſen Formeln kann man in mehreren Fällen nicht blos die genäherten Werthe, ſondern auch die genauen Werthe beſtimmter Integrale ableiten. So findet man z. B.:

1.
$$\int_{x_0}^{X} x\,dx =$$

$$\lim i[x_0 + x_0 + i + x_0 + 2i + \ldots + x_0 + (n-1)i]$$

$$= \lim i\left[(x_0 + X - i)\frac{n}{2}\right],$$

$$\int_{x_0}^{X} x\,dx =$$

$$\lim \frac{X - x_0}{n}(x_0 + X - i) \times \frac{n}{2}$$

$$= \lim \frac{(X - x_0)(x_0 + X - i)}{2} = \frac{x^2 - x_0^2}{2};$$

2. $$\int_{x_0}^{X} a^x dx = \lim i\left[a^{x_0} + a^{x_0+i} + a^{x_0+2i} \ldots + a^{x_0+(n-1)i}\right]$$

$$= \lim i a^{x_0}\left[a^i + a^{2i} \ldots + a^{(n-1)i}\right] = \lim i a^{x_0}\left[\frac{a^{ni} - 1}{a^i - 1}\right]$$

$$= \lim \frac{i}{a^i - 1} a^{x_0}\left[a^{X - x_0} - 1\right],$$

und da $\lim . \frac{i}{a^i - 1} = \frac{1}{la}$, iſt, ſo hat man:

$$\int_{x_0}^{X} a^x dx = \frac{a^X - a^{x_0}}{la},$$

folglich:

$$\int_{x_0}^{X} e^x dx = e^X - e^{x_0}.$$

Ferner:

3.
$$\int_{x_0}^{X} x^\alpha dx =$$

$$\lim \alpha\left[x_0^{\alpha+1} + x_0^{\alpha+1}(1+\alpha)^{\alpha+1} + \ldots + x_0^{\alpha+1}(1+\alpha)^{(n-1)(\alpha+1)}\right]$$

$$= \lim \alpha\, x_0^{\alpha+1}\left[1 + (1+\alpha)^{\alpha+1} + (1+\alpha)^{2(\alpha+1)} + \ldots + (1+\alpha)^{(n-1)(\alpha+1)}\right]$$

$$= \lim \alpha\, x_0^{\alpha+1}\left[\frac{(1+\alpha)^{n(\alpha+1)} - 1}{(1+\alpha)^{\alpha+1} - 1}\right]$$

$$= \lim \frac{\alpha}{(1+\alpha)^{\alpha+1} - 1} x_0^{\alpha+1}\left[\left(\frac{X}{x_0}\right)^{\alpha+1} - 1\right],$$

und da:

$$\lim \frac{\alpha}{(1+\alpha)^{\alpha+1}-1} = \lim \frac{1}{(\alpha+1)(1+\alpha)^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha+1}$$

ist, so hat man:

$$\int_{x_0}^{X} x^{\alpha} dx = \frac{X^{\alpha+1} - x_0^{\alpha+1}}{\alpha+1};$$

Eben so ist:

4. $$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x} = \lim n\alpha = l\frac{X}{x_0},$$

denn aus der Gleichung:

$$(1+\alpha)^n = \frac{X}{x_0}$$

folgt:

$$n\alpha = l\left(\frac{X}{x_0}\right)\frac{\alpha}{l(1+\alpha)}, \quad \lim n\alpha = l\left(\frac{X}{x_0}\right).$$

§. 34. Oft läßt sich auch die Bestimmung eines bestimmten Integrales auf die eines andern bestimmten Integrales zurückführen. So ergeben sich z. B. aus der Gleichung:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx =$$

$$\lim[(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})],$$

oder einfacher aus der Gleichung:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0),$$

worin $F(x)$ die Function bezeichnet, deren Differenzial $f(x)$ oder welche das unbestimmte Integral:

$$\int f(x)\,dx$$

ist, die folgenden Formeln:

$$\int_{x_0}^{X} af(x)\,dx = a\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x+a)\,dx = \int_{x_0+a}^{X+a} f(x)\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x-a)\,dx = \int_{x_0-a}^{X-a} f(x)\,dx,$$

$$\int_{X}^{x_0} f(x)\,dx = -\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

$$\int_{0}^{X-x_0} f(X-x)\,dx = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

§. 35. Alle diese Gleichungen ergeben sich auch aus einem Fundamentaltheoreme, welches sich folgendermaßen ausdrücken läßt: Wenn man für die Veränderliche x eine andere Veränderliche z substituirt, welche durch die Gleichung:

$$z = \varphi(x)$$

bestimmt wird, woraus:

$$x = \chi(z),\ dx = \chi'(z)\,dz,\ f(x)\,dx = f[\chi(z)]\,\chi'(z)\,dz$$

folgt, und man bezeichnet die x_0, X entsprechenden Werthe von z mit z_0, Z; so hat man immer:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{z_0}^{Z} f[\chi(z)]\,\chi'(z)\,dz = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz\ ,$$

d. h. man kann für das in Beziehung auf x genommene bestimmte Integral das sich auf z beziehende bestimmte Integral substituiren.

Beweis 1. Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ die $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ entsprechenden Werthe von z, so giebt die Gleichung:

$$dx = \chi'(z)\,dz,$$

wenn diese Werthe einander sehr nahe kommen, nahezu:

$$x_1 - x_0 = \chi'(z_0)(z_1 - z_0),\ x_2 - x_1 = \chi'(z_1)(z_2 - z_1), \ldots,$$
$$X - x_{n-1} = \chi'(z_{n-1})(Z - z_{n-1})$$

und folglich:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx =$$
$$\lim\left[(x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1})\right]$$
$$= \lim\left\{(z_1 - z_0) f[\chi(z_0)]\,\chi'(z_0) + (z_2 - z_1) f[\chi(z_1)]\,\chi'(z_1) + \text{etc.}\right\}$$
$$= \int_{z_0}^{Z} f[\chi(z)]\,\chi'(z)\,dz = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz.$$

Beweis 2. Wir wollen die beiden unbestimmten Integrale $\int f(x)\,dx$ und $\int f(z)\,dz$ mit $F(x)$ und $F(z)$ bezeichnen, so hat die Gleichung:

$$f(x)dx = f(z)dz$$

nothwendig die Gleichung:

$$F(x) = F(z) + C$$

zur Folge; denn zwei Functionen, welche gleiche Differenziale haben, können sich nur durch eine Constante von einander unterscheiden. Aus dieser letzten Gleichung ergiebt sich aber:

$$F(X) = F(Z) + C,\quad F(x_0) = F(z_0) + C,$$

und folglich:

$$F(X) - F(x_0) = \int_{x_0}^{X} f(x)dx = F(Z) - F(z_0) = \int_{z_0}^{Z} f(z)dz.$$

Geht man von diesem Lehrsatze aus, so braucht man in den Ausdrücken:

$$f(x+a),\quad f(x-a),\quad f(X-x)$$

nur successive:

$$x + a = z,\quad x - a = z,\quad X - x = z$$

zu ſetzen, um daraus die Gleichungen im vorhergehenden § abzuleiten.

§. 36. Ebenſo leicht läßt ſich beweiſen, daß man die bereits für unbeſtimmte Integrale bewieſenen Lehrſätze auf beſtimmte Integrale erſtrecken kann, und man hat z. B.:

$$\int_{x_0}^{X}[\varphi(x)+\chi(x)+\psi(x)+\text{etc.}]\,dx=$$
$$\int_{x_0}^{X}\varphi(x)dx+\int_{x_0}^{X}\chi(x)dx+\int_{x_0}^{X}\psi(x)dx+\text{etc.},$$
$$\int_{x_0}^{X}(u\pm v\pm w\pm\ldots)dx=\int_{x_0}^{X}udx\pm\int_{x_0}^{X}vdx\pm\int_{x_0}^{X}wdx+\text{etc.},$$
$$\int_{x_0}^{X}(au+bv+cw+\ldots)\,dx=$$
$$a\int_{x_0}^{X}udx+b\int_{x_0}^{X}vdx+c\int_{x_0}^{X}wdx+\text{etc.},$$
$$\int_{x_0}^{X}(u+v\sqrt{-1})\,dx=\int_{x_0}^{X}udx+\sqrt{-1}\int_{x_0}^{X}vdx.$$

§. 37. Den Ausdruck $f(x)\,dx$ von $x=x_0$ an integriren, heißt, wie ſchon früher bemerkt worden, eine ſtetige Function von x finden, welche die doppelte Eigenſchaft hat, daß ſie $f(x)\,dx$ zum Differenziale giebt und für $x=x_0$ verſchwindet. Wenn alsdann das unbeſtimmte Integral von $f(x)\,dx$ unter der Form:

$$\varphi(x)+\int\chi(x)\,dx$$

erſcheint, ſo iſt das beſtimmte Integral, welches für $x=x_0$ verſchwindet, nothwendig:

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x}\chi(x)\,dx.$$

So führt z. B. die Gleichung:

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

nothwendig auf die folgenden:

$$\int_{x_0}^{x}udv=\int_{x_0}^{x}uv'dx=uv-u_0v_0-\int_{x_0}^{x}vdu$$
$$=uv-u_0v_0-\int_{x_0}^{x}vu'dx,$$
$$\int_{x_0}^{X}u\,dv=\mathrm{UV}-u_0v_0-\int_{x_0}^{X}v\,du,$$

wo U, V, u_0, v_0 die $x=X$, $x=x_0$ entſprechenden Werthe von u, v ſind.

§. 38. Wenn man ſetzt:

$$f(x)=\varphi(x)\chi(x),$$

wo $\varphi(x)$, $\chi(x)$ zwei neue Functionen ſind, welche beide zwiſchen den Grenzen x_0, X ſtetig bleiben und wenn die zweite zwiſchen dieſen Grenzen immer daſſelbe Zeichen behält; ſo wird der Werth

des bestimmten Integrales $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ durch folgende Gleichung gegeben:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim[(x_1-x_0)\varphi(x_0)\chi(x_0)+(x_2-x_1)\varphi(x_1)\chi(x_1)+\text{etc.}].$$

Die zwischen den Klammern stehende Reihe ist der Summe der Größen von demselben Zeichen:

$$(x_1-x_0)\chi(x_0),\quad (x_2-x_1)\chi(x_1),\ \text{etc.},$$

mit einem gewissen Werthe $\varphi(\xi)$ der Function $\varphi(x)$, welcher ein Mittel zwischen den Coefficienten $\varphi(x_0)$, $\varphi(x_1)$,.... ist, multiplicirt, gleich. Man hat folglich:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \varphi(\xi)\lim[(x_1-x_0)\chi(x_0)+(x_2-x_1)\chi(x_1)+\text{etc.}],$$

oder:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\chi(x)dx = \varphi(\xi)\int_{x_0}^{X} \chi(x)\,dx,$$

wo ξ einen zwischen x_0, X liegenden Werth von x bezeichnet.

Beispiele. Setzt man successive:

$$\chi(x)=1,\quad \chi(x)=\frac{1}{x},\quad \chi(x)=\frac{1}{x-a},$$

so erhält man die folgenden Formeln:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = f(\xi)\int_{x_0}^{X} dx = (X-x_0)\,f[x_0+\vartheta(X-x_0)],$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{X} x f(x)\frac{dx}{x} = \xi f(\xi)\int_{x_0}^{X}\frac{dx}{x} = \xi f(\xi)\,l\left(\frac{X}{x_0}\right),$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{X} (x-a) f(x)\frac{dx}{x-a} = (\xi-a) f(\xi)\,l\left(\frac{X-a}{x_0-a}\right).$$

§. 39. Wir wollen nun annehmen, daß man, nachdem die Differenz $X-x_0$ in eine endliche Anzahl von Elementen x_1-x_0, x_2-x_1,....., $X-x_{n-1}$ getheilt ist, jedes dieser Elemente in mehrere andere zerlegt, deren Zahlenwerthe unendlich klein sind; so erhält man für das Produkt $(x_1-x_0)\,f(x_0)$ eine Summe ähnlicher Produkte, welche das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ zur Grenze hat. Ebenso erhält man für die Produkte:

$$(x_2-x_1)f(x_1),\ldots,\quad (X-x_{n-1})\,f(x_{n-1})$$

Summen, welche die bestimmten Integrale:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx,\ldots,\int_{x_{n-1}}^{X} f(x)\,dx$$

zu ihren resp. Grenzen haben, und da die Grenze der Summe mehrerer Größen der Summe ihrer Grenzen gleich ist; so hat man allgemein:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \ldots + \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)\,dx.$$

Man kann also ein bestimmtes Integral immer in mehrere andere von derselben Form, aber zwischen andern Grenzen genommen, zerlegen. Zu demselben Resultate würde man auch gelangen, wenn man bemerkt, daß man, wenn $F(x) + C$ das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ bezeichnet, hat:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = F(x_1) - F(x_0), \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)dx = F(X) - F(x_{n-1}),$$

woraus folgt, wenn man diese Gleichungen zusammenaddirt:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)\,dx$$
$$= F(X) - F(x_0) = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

Wenn man zwischen die Grenzen x_0, X nur den einen Werth ξ von x einschiebt, so hat man:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{X} f(x)\,dx.$$

Es ist leicht zu beweisen, daß diese Zerlegung auch in dem Falle noch stattfindet, wo einige der Größen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \xi$ nicht mehr zwischen x_0 und X liegen, und in dem Falle, wo die Differenzen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots$, $X - x_{n-1}$, $\xi - x_0$, $X - \xi$ nicht mehr Größen von demselben Zeichen sind. Wir wollen z. B. annehmen, daß die Differenzen $\xi - x_0$, $X - \xi$ entgegengesetzte Zeichen haben, so findet man, je nachdem der Werth x_0 zwischen ξ und X, oder X zwischen x_0 und ξ liegt:

$$\int_{\xi}^{X} f(x)dx = \int_{\xi}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{X} f(x)dx,$$

oder:

$$\int_{x_0}^{\xi} f(x)dx = \int_{x_0}^{X} f(x)dx + \int_{X}^{\xi} f(x)dx;$$

woraus folgt:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = -\int_{\xi}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{X} f(x)\,dx,$$

oder:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx - \int_{X}^{\xi} f(x)\,dx.$$

Aber nach §. 34 ist:

$$-\int_{\xi}^{x_0} f(x)dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx,$$

$$-\int_X^{\xi} f(x)dx = \int_{\xi}^{X} f(x)dx;$$

und folglich in allen Fällen:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{X} f(x)dx.$$

§. 40. Hiernach läßt sich ein beliebiges bestimmtes Integral genau, oder mit jedem gewünschten Grade von Annäherung berechnen. Um in allen Fällen einen genäherten Werth des bestimmten Integrales $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ zu erhalten, braucht man nur die Gleichung:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)dx,$$

oder:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = (x_1 - x_0)\, f[x_0 + \vartheta_0 (x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)\, f[x_1 + \vartheta_1 (x_2 - x_1)] \ldots + \text{etc.}$$

zu nehmen, worin $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ beliebige zwischen x_0, X liegende Werthe von x und $\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots$ Zahlen zwischen 0 und 1 sind. Der Einfachheit wegen kann man die Intervalle $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots$ einander gleich und $= i$ annehmen, und alsdann hat man:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = i[f(x_0 + \vartheta_0 i) + f(x_0 + i + \vartheta_1 i) \ldots + f(X - i + \vartheta_{n-1} i)].$$

Wenn die Function $f(x)$ von $x = x_0$ bis $x = X$ beständig zu- oder abnimmt, so liegt der erste Theil der vorhergehenden Gleichung offenbar zwischen den beiden Summen:

$$S = i\,[f(x_0) + f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \ldots + f(X - i)],$$

$$S' = i\,[f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \ldots\ldots + f(X)];$$

und wenn man in dieser Voraussetzung die halbe Summe dieser beiden Werthe oder den Ausdruck:

$$i[\tfrac{1}{2} f(x_0) + f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \ldots + f(X - i) + \tfrac{1}{2} f(X)]$$

für den Näherungswerth des Integrales $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ nimmt; so begeht man einen Fehler, welcher kleiner ist, als die halbe Differenz:

$$S' - S = \pm i[\tfrac{1}{2} f(X) - \tfrac{1}{2} f(x_0)].$$

Beispiel. Setzt man:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x_0 = 0, \quad X = 1, \quad i = \tfrac{1}{4},$$

so erhält man:

$$i[\tfrac{1}{2}f(x_0)+f(x_0+i)+\ldots+\tfrac{1}{2}f(X)]$$
$$=\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{16}{17}+\tfrac{4}{5}+\tfrac{16}{25}+\tfrac{1}{2})=0,78.$$

folglich ist 0,78 der Näherungswerth des Integrales $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Der in diesem Falle begangene Fehler kann die Grenze $\frac{1}{4}(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})=\frac{1}{16}$ nicht überschreiten und ist in der That kleiner, als 0,01.

Wenn die Function $f(x)$ zwischen den Integrationsgrenzen nicht beständig zu-, oder abnähme, so könnte man sie vermittelst der Formel:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\ldots\int_{x_{n-1}}^{X} f(x)\,dx$$

in mehrere andere zerlegen, wovon jede diese Bedingung erfüllte und man könnte alsdann nicht blos die Näherungswerthe, sondern auch die Grenzen des begangenen Fehlers berechnen.

§. 41. Selbst wenn die Function $f(x)$ bald zu- und bald abnähme, ist der Fehler, welchen man begeht, wenn man eine der Summen S, S' für den Werth des Integrales $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ nimmt, offenbar kleiner, als das Produkt aus $ni=X-x_0$ und dem größten Zahlenwerthe K, welchen die Differenz:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x f'(x+\vartheta\Delta x),$$

annehmen kann, wenn x zwischen den Grenzen x_0, X und Δx zwischen den Grenzen 0 und i liegt. Denn es ist z. B.:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx-S=i\{[f(x_0+\vartheta_0 i)-f(x_0)]+[f(x_1+\vartheta_1 i)-f(x_1)]+\ldots\},$$

und folglich:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx-S<i\times nK=K(X-x_0).$$

Hieraus folgt auch, daß, wenn k der größte Zahlenwerth von $f'(x)$ zwischen den Grenzen x_0, X ist, der begangene Fehler zwischen den Grenzen:

$$-ki(X-x_0),+ki(X-x_0)$$

liegt.

Man kann übrigens, wie wir bereits gesehen haben, den Werth des bestimmten Integrales genau berechnen, wenn man das unbestimmte Integral kennt, und in einigen besondern Fällen auch dann, wenn das unbestimmte Integral unbekannt bleibt.

§. 42. Beispiele. Durch Anwendung der auseinandergesetzten Methoden und der Formeln in §. 16 und §. 17 findet man:

$$\int_0^1 x^{a-1}dx=\frac{1}{a},\quad \int_0^1 x^{-a-1}dx=\infty,$$

$$\int_0^\infty e^{-x}dx=1,\quad \int_0^\infty e^{ax}dx=\infty,\quad \int_0^\infty e^{-ax}dx=\frac{1}{a},$$

$$\int_0^1 (A+Bx+Cx^2\ldots)\,dx = A+\frac{B}{2}+\frac{C}{3}\cdots,$$

$$\int_0^1 \frac{x^m-1}{x-1}\,dx = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{m},$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2},\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{a},$$

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{\pi}{2},\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^2+b^2}=\frac{\pi}{b}.$$

Ferner findet man nach §. 26 und §. 27:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x)^n}=\frac{m-1}{n-m}\int_0^\infty \frac{x^{m-2}}{(1+x)^n}=\frac{(m-1)\ldots 3.2.1}{(n-m)\ldots(n-3)(n-2)}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^n}$$
$$=\frac{1.2.3\ldots(m-1)\times 1.2.3\ldots(n-m-1)}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^n}=\frac{2n-3}{2n-2}\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}}=\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2}$$
$$=\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-z}dz = 1.2.3\ldots n,\quad \int_0^\infty z^n e^{-az}dz=\frac{1.2.3\ldots n}{a^{n+1}},$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-az}(\cos bz+\sqrt{-1}\sin bz)\,dz=\frac{1.2.3\ldots n}{(a+b\sqrt{-1})^{n+1}},$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-az}\sin bz dz=\frac{1.2.3\ldots n}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}\sin\left[(n+1)\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}\right],$$

$$\int_0^\infty e^{-az}\sin bz\,dz=\frac{b}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-az}\cos bz dz=\frac{1.2.3\ldots n}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}\cos\left[(n+1)\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}\right],$$

$$\int_0^\infty e^{-az}\cos bz\,dz=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

Endlich hat man nach §. 30, wenn n eine gerade Zahl ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx=\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tang}^n x dx=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-3}+\ldots\mp\frac{1}{3}\pm 1\mp\frac{\pi}{4},$$

und wenn n eine ungerade Zahl ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx=\frac{2.4.6\ldots(n-1)}{1.3.5\ldots(n-2)n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \text{tang}^n x dx = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \ldots . \mp \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} l\left(\frac{1}{2}\right).$$

§. 43. Aus der Gleichung:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^{X} f(x)\,dx$$

ergiebt ſich eine wichtige Folgerung, wodurch die Rechnungen oft abgekürzt werden. Es ſei ξ ein arithmetiſches Mittel zwiſchen x_0 und X und die Function $f(x)$ nehme zu beiden Seiten dieſes Mittels Werthe an, welche paarweiſe einander gleich und von demſelben Zeichen ſind; ſo ſind die beiden Integrale:

$$\int_{x_0}^{\xi} f(x)dx, \quad \int_{\xi}^{X} f(x)dx$$

ebenfalls einander gleich, und man hat:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = 2\int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx,$$

ſo daß man blos eins dieſer Integrale zu berechnen und ſeinen Werth zu verdoppeln braucht, um den des gegebenen Integrales zu erhalten.

Beiſpiel. Es iſt:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx,$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$$

Wenn die Werthe der Function $f(x)$ von $x=\xi$ aus paarweiſe einander gleich und von entgegengeſetzten Zeichen wären, ſo wären auch die Werthe der beiden Integrale:

$$\int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx, \quad \int_{\xi}^{X} f(x)\,dx$$

einander gleich und von entgegengeſetzten Zeichen, und man hätte folglich:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = 0.$$

Beiſpiel. Hiernach iſt:

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = 0.$$

Siebente Vorlesung.

Von den bestimmten Integralen, deren Werthe unendlich oder unbestimmt sind. — Hauptwerthe der als unbestimmt erscheinenden Integrale. — Singuläre bestimmte Integrale.

---

§. 44. Im Vorhergehenden wurde immer vorausgesetzt, daß die Function $f(x)$ zwischen den Grenzen x_0, X endlich und stetig bleibt. In diesem Falle hat das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ einen bestimmten Werth, und vermittelst der Gleichung:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)\,dx$$

kann man dasselbe in eine gewisse Anzahl ähnlicher Integrale, welche zwischen den Grenzen x_0, x_1; ..... x_{n-1}, X genommen werden, zerlegen.

Wenn sich die eingeschobenen Grenzwerthe auf zwei reduciren, wovon der eine ξ_0 sehr wenig von x_0 und der andere ξ sehr wenig von X verschieden ist; so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in folgende:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx &= \int_{x_0}^{\xi_0} f(x)\,dx + \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{X} f(x)\,dx \\ &= (\xi_0 - x_0) f[x_0 + \vartheta_0(\xi_0 - x_0)] \\ &\quad + \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx + (X - \xi) f[\xi + \vartheta(X - \xi)].\end{aligned}$$

Wenn man in dieser letzten Formel ξ_0 gegen die Grenze x_0 und ξ gegen die Grenze X convergiren läßt, so ergiebt sich daraus, wenn man zu den Grenzen übergeht und wieder vorausgesetzt wird, daß die Function $f(x)$ endlich und stetig bleibt:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim. \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx.$$

Aber wenn diese Bedingung nicht mehr erfüllt wird, so wie auch zuweilen, wenn die Grenzen x_0, X keine endlichen Größen mehr sind; so kann man nicht mehr behaupten, daß das bestimmte Integral einen bestimmten Werth hat, und man weiß nicht mehr, was ein Ausdruck wie $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ bedeutet.

Wir wollen z. B. das Integral $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ nehmen, worin die unter dem Zeichen $\int$ vorkommende Function $\frac{1}{x}$ für den zwischen den Integrationsgrenzen $x=-1$, $x=+1$ liegenden Werth $x=0$ unendlich wird; so ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)\,dx + \int_{\xi}^{X} f(x)\,dx$$

folgende:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = -\infty + \infty$$

und das gegebene Integral erscheint unter einer unbestimmten Form.

Um in diesem Falle jede Ungewißheit zu heben und dem Ausdrucke $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ eine bestimmte Bedeutung zu geben, erstreckt man die Gleichung:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \int_{\xi}^{\xi_0} f(x)\,dx$$

nach der Analogie auch auf den Fall, wo sie nicht mehr streng bewiesen werden kann.

Ebenso werden die Integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx, \quad \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x},$$

worin die Function $f(x)$ für die Werthe $x=\infty$ oder $x=0$ nicht mehr endlich und stetig bleibt, durch die Gleichungen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \lim \int_{\xi_0}^{\xi} e^x dx = \lim (e^{\xi} - e^{\xi_0}) = e^{\infty} - e^{-\infty} = \infty,$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{dx}{x} = \lim 1\frac{\xi}{\xi_0} = \lim 1\frac{\infty}{0} = \infty$$

bestimmt.

Es kann jedoch geschehen, daß der Werth des bestimmten Integrales wirklich unbestimmt ist, und um dieses zu beweisen, wollen wir das Integral $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ wieder betrachten. Wenn man mit ε eine unendlich kleine Zahl und mit μ, ν zwei positive, aber willkührliche Constanten bezeichnet; so hat man:

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = \lim \int_{-1}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x}, \quad \int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = \lim \int_{\nu\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x},$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \lim \left(\int_{-1}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\nu\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right) = \lim \left(1\mu\varepsilon + 1\frac{1}{\nu\varepsilon} \right) = 1\frac{\mu}{\nu},$$

welcher Werth völlig willkührlich oder unbestimmt ist.

§. 45. Wenn die Function $f(x)$ zwiſchen den Grenzen x_0, X für eine gewiſſe Anzahl beſonderer Werthe $x_1, x_2, \ldots, x_m$ von x unendlich wird und man bezeichnet mit ε eine unendlich kleine Zahl, ſo wie mit $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \ldots, \mu_m, \nu_m$ willkührliche Conſtanten; ſo hat man:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots \int_{x_m}^{X} f(x)\,dx$$

$$= \lim\left[\int_{x_0}^{x_1-\mu_1\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\nu_1\varepsilon}^{x_2-\mu_2\varepsilon} f(x)dx \ldots + \int_{x_m+\nu_m\varepsilon}^{X} f(x)dx\right],$$

und wenn $x_0 = -\infty$, $X = +\infty$ iſt, ſo hat man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$\lim\left[\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{x_1-\mu_1\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\nu_1\varepsilon}^{x_2-\mu_2\varepsilon} f(x)dx \ldots + \int_{x_m+\nu_m\varepsilon}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} f(x)dx\right],$$

wo μ und ν zwei neue willkührliche Conſtanten bezeichnen.

Die Werthe der aus dieſen Gleichungen abgeleiteten Integrale können übrigens nach der Beſchaffenheit der Function $f(x)$ entweder endliche und beſtimmte Größen, oder unendliche Größen, oder unbeſtimmte Größen ſein, welche von den den willkührlichen Conſtanten beigelegten Werthen abhängen. Wenn man in dieſem letzten Falle alle Conſtanten auf die Einheit reducirt, ſo erhält man beſondere Werthe der Integrale:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

welche Cauchy Hauptwerthe genannt hat, und welche durch die Gleichungen:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx =$$

$$\lim\left[\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx \ldots + \int_{x_m+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx =$$

$$\lim\left[\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx \ldots + \int_{x_m+\varepsilon}^{+\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx\right]$$

gegeben werden.

Beiſpiel. Der Werth Null, welchen $1.\frac{\mu}{\nu}$ annimmt, wenn man $\mu=1$, $\nu=1$ ſetzt, iſt der Hauptwerth des beſtimmten Integrales $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ und $1.\frac{\mu}{\nu}$ iſt ſein allgemeiner Werth.

§. 46. Wenn ein bestimmtes Integral in Beziehung auf x zwischen zwei Grenzen genommen wird, welche einem besondern Werthe a der Veränderlichen x unendlich nahe kommen, so ist der Werth des Integrales nahezu $=0$, wenn derselbe eine endliche Größe ist und die Function $f(x)$ selbst in der Nähe von $x=a$ endlich und stetig bleibt. Denn alsdann ist der Werth des bestimmten Integrales gleich dem Producte aus der unendlich kleinen Differenz der Grenzen des Integrales und einem endlichen Werthe der Function $f(x)$. Aber der Werth des bestimmten Integrales kann von Null verschieden und sogar unendlich werden, wenn a, oder $f(a)$ unendlich würde. In diesem letzten Falle nennt Cauchy das Integral ein singuläres bestimmtes Integral und der Werth desselben läßt sich gewöhnlich leicht berechnen.

Wir wollen zunächst annehmen, daß a eine endliche Größe und zwar eine Wurzel der Gleichung $f(x)=\pm\infty$ sei, und mit k die Grenze bezeichnen, gegen welche das Product $(x-a)f(x)$ convergirt, während x gegen a convergirt; so giebt die Gleichung (§. 38):

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx=(\xi-a)f(\xi)1\left(\frac{X-a}{x_0-a}\right)$$

die Werthe:

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-\mu\varepsilon} f(x)\,dx=\mathrm{fl}(\mu),\quad \int_{a+\nu\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)dx=\mathrm{fl}\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Denn die Größe ξ, welche zwischen $a-\varepsilon$ und $a-\mu\varepsilon$, oder zwischen $a+\nu\varepsilon$ und $a+\varepsilon$ liegt, ist nahezu $=a$, während das Product $\xi-af(\xi)=(a-a)f(a)$ oder $=k$ ist.

Wenn a unendlich würde und man bezeichnete die Grenze, gegen welche das Product $xf(x)$ convergirt, während die Veränderliche x gegen die Grenze $\pm\infty$ convergirt, mit k, so hätte man vermöge der Gleichung:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx=\xi f(\xi)\,1\left(\frac{X}{x_0}\right)$$

im §. 38 nahezu:

$$\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx=\mathrm{fl}(\mu),\quad \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} f(x)\,dx=\mathrm{fl}\frac{1}{\nu}.$$

Es ist wohl zu bemerken, daß die Grenze des Productes $(x-a)f(x)$ oder $xf(x)$ zuweilen von dem Zeichen seines ersten Factors abhängt, und folglich die mit k bezeichnete Größe zuweilen ihren Werth ändert, wenn ε das Zeichen ändert.

§. 47. Auch den allgemeinen Werth eines als unbestimmt erscheinenden Integrales kann man vermittelst der bestimmten singulären Integrale berechnen, wenn man seinen Hauptwerth kennt. Denn es sei $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ das fragliche Integral und wir wollen setzen:

$$\mathbf{E}=\int_{x_0}^{x_1-\mu_1\varepsilon} f(x)dx+\int_{x_1+\nu_1\varepsilon}^{x_2-\mu_2\varepsilon} f(x)dx+\ldots\int_{x_m+\nu_m\varepsilon}^{\mathbf{X}} f(x)\,dx,$$

$$\mathbf{F}=\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)dx+\int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx+\ldots\int_{\mathbf{X}}^{x_m+\varepsilon}$$

so ist $\mathbf{A}=\lim \mathbf{E}$ der allgemeine Werth und $\mathbf{B}=\lim \mathbf{F}$ der Hauptwerth des bestimmten Integrales. Die Differenz $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\lim(\mathbf{E}-\mathbf{F})$ dieser beiden Werthe ist der Grenze gleich, gegen welche die Summe der singulären Integrale:

$$\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\mu_1\varepsilon} f(x)\,dx,\ \int_{x_1+\nu_1\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} f(x)\,dx,$$

$$\int_{x_2-\varepsilon}^{x_2-\mu_2\varepsilon} f(x)\,dx,\ \ldots,\ \int_{x_m+\nu_m\varepsilon}^{x_m+\varepsilon} f(x)\,dx$$

convergirt, und wenn man folglich mit $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, ... $\mathfrak{f}_m$ die Grenzen bezeichnet, gegen welche die Producte:

$$(x-x_1)f(x),\ (x-x_2)f(x),\ \ldots,\ (x-x_m)f(x)$$

convergiren, während ihre ersten Factoren gegen Null convergiren; so hat man:

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathfrak{f}_1\,\mathrm{l}\frac{\mu_1}{\nu_1}+\mathfrak{f}_2\,\mathrm{l}\frac{\mu_2}{\nu_2}\ldots+\mathfrak{f}_m\,\mathrm{l}\frac{\mu_m}{\nu_m}.$$

Wenn $x_0=-\infty$ und $\mathbf{X}=+\infty$ würde, so müßte man setzen:

$$\mathbf{E}=\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{x_1-\mu_1\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{x_1+\nu_1\varepsilon}^{x_2-\mu_2\varepsilon} f(x)dx+\ldots\int_{x_m+\nu_m\varepsilon}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} f(x)\,dx,$$

$$\mathbf{F}=\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx+\int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx+\ldots\int_{x_m+\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx.$$

Zu den bereits berechneten singulären Integralen müßte man, um $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ zu erhalten, die beiden folgenden Integrale:

$$\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx,\ \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} f(x)\,dx$$

addiren, deren Summen nahezu dem Ausdrucke $\mathfrak{f}\,\mathrm{l}\frac{\mu}{\nu}$ gleich ist, wo $\mathfrak{f}$ die Grenze bezeichnet, gegen welche das Product xfx convergirt, während die Veränderliche x gegen eine der beiden Grenzen $-\infty$, $+\infty$ convergirt.

Wenn die singulären Integrale, wovon die Differenz $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ abhängt, für unendlich kleine Werthe von ε und für endliche, oder unendlich kleine Werthe der willkührlichen Constanten μ, ν, μ_1, ν_1, ... μ_m, ν_m unendliche, oder von Null verschiedene endliche Werthe annehmen; so sind die Integrale:

$$\int_{x_0}^{\mathbf{X}} f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

offenbar unendlich, oder unbeſtimmt, was jedesmal ſtatt findet, wenn die Größen $f, f_1, \ldots f_m$ nicht zu gleicher Zeit verſchwinden. Wenn dagegen dieſe ſingulären Integrale alle für unendlich kleine Werthe von ε verſchwinden, was für endliche, oder unendlich kleine Werthe die Conſtanten $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \ldots \mu_m, \nu_m$ auch haben mögen; ſo iſt der allgemeine Werth des Integrales:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

eine endliche und beſtimmte Größe, weil alsdann die Differenz $A-B=0$ iſt, und folglich A nahezu der beſtimmten Größe B gleich iſt.

Damit alſo der allgemeine Werth des Integrales $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ endlich und beſtimmt ſei, iſt erforderlich, aber auch hinreichend, daß ſich die in der Differenz $A-B$ enthaltenen ſingulären Integrale für unendlich kleine Werthe von ε auf Null reduciren, was für endliche, oder unendlich kleine Werthe man auch den Coefficienten $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \ldots \mu_m, \nu_m$ beilegen mag. Dieſes geſchieht gewöhnlich, wenn die Größen $f, f_1, f_2, \ldots f_m$ alle verſchwinden.

Dieſe Größen können jedoch verſchwinden, ohne daß dieſes mit den ſingulären Integralen auch der Fall iſt. Wenn man z. B. $f(x)=\frac{1}{x\,l.x}$ ſetzt, ſo verſchwindet das Product $xf(x)$ für $x=0$ und dennoch verſchwindet das beſtimmte ſinguläre Integral:

$$\int_{\varepsilon}^{\nu\varepsilon} \frac{dx}{x\,lx} = l\left(1+\frac{l\nu}{l\varepsilon}\right)$$

nicht mehr für unendlich kleine Werthe von ν.

Beiſpiel. Es ſei $\frac{f(x)}{F(x)}$ ein rationaler Bruch, ſo iſt, damit das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{F(x)}dx$ einen endlichen und beſtimmten Werth behält, erforderlich, aber auch zureichend: 1) daß die Gleichung $F(x)=0$ keine reellen Wurzeln hat, und 2) daß der Grad des Nenners $F(x)$ wenigſtens um zwei Einheiten höher iſt, als der des Zählers $f(x)$. Denn wenn die erſte Bedingung erfüllt wird, ſo ſind die Factoren $f, f_1, f_2, \ldots f_m$ Null, weil die Exiſtenz dieſer Producte die Exiſtenz reeller Werthe von x vorausſetzt, welche die Function $\frac{f(x)}{F(x)}$ unendlich, oder die Function Fx verſchwinden machen. Vermöge der zweiten Bedingung verſchwindet f oder $\lim x\frac{f(x)}{F(x)}$ auch, weil $xf(x)$ von einem wenigſtens um eine Einheit niedrigern Grade iſt, als $F(x)$.

§. 48. Vermittelſt des Vorhergehenden findet man leicht die folgenden Integrale:

$$\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = l\frac{\mu}{\nu}, \qquad \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = 0,$$

$$\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} \frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2} = 1\frac{\mu}{\nu},\quad \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2} = 0,$$

$$\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} \left(\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} + \frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right) dx = 2A1\frac{\mu}{\nu} + 2\pi B;$$

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} + \frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}\right) dx = 2\pi B.$$

Allgemeiner, wenn $\frac{f(x)}{F(x)}$ wieder ein rationaler Bruch ist, dessen Nenner für keinen reellen Werth von x verschwinden kann; so wollen wir durch:

$$x_1 = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1},\ x_2 = \alpha_2 + \beta_2\sqrt{-1}, \text{etc.}, \ldots,$$
$$x_m = \alpha_m + \beta_m\sqrt{-1}\ldots$$

die imaginäre Wurzeln der Gleichung $F(x)=0$ bezeichnen, worin der Coefficient von $\sqrt{-1}$ positiv ist, und durch:

$$A_1 - B_1\sqrt{-1},\ A_2 - B_2\sqrt{-1}, \text{etc.}$$

die diesen Wurzeln entsprechenden Werthe des Bruches $\frac{f(x)}{F(x)}$. Alsdann ergiebt sich aus der bekannten Gleichung:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1-B_1\sqrt{-1}}{x-\alpha_1-\beta_1\sqrt{-1}} + \frac{A_1+B_1\sqrt{-1}}{x-\alpha_1+\beta_1\sqrt{-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{A_m-B_m\sqrt{-1}}{x-\alpha_m-\beta_m\sqrt{-1}} + \frac{A_m+B_m\sqrt{-1}}{x-\alpha_m+\beta_m\sqrt{-1}}$$

die folgende:

$$\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} \frac{f(x)}{F(x)}\,dx =$$

$$2(A_1+A_2+\ldots+A_m)1\frac{\mu}{\nu} + 2\pi(B_1+B_2+\ldots\ldots+B_m),$$

deren zweiter Theil den willkührlichen Factor $1.\frac{\mu}{\nu}$ nicht mehr enthält, so oft die Summe $A_1+A_2+\ldots+A_m$ verschwindet, und man hat folglich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = 2\pi(B_1+B_2+\ldots B_m).$$

Diese Bedingung wird aber erfüllt, wenn der Grad von $F(x)$

den von $f(x)$ wenigstens um zwei Einheiten übersteigt. Denn man hat:

$$\frac{f(x)}{F(x)} =$$

$$\frac{2A_1(x-\alpha_1)+2B_1\beta_1}{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2}+\frac{2A_2(x-\alpha_2)+2B_2\beta_2}{(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2}\ldots+\frac{2A_m(x-\alpha_m)+2B_m\beta_m}{(x-\alpha_m)^2+\beta_m^2}$$

$$\frac{f(x)}{F(x)} =$$

$$\frac{[2A_1(x-\alpha_1)+2B_1\beta_1][(x-\alpha_2)^2+\beta^2][(x-\alpha_3)^2+\beta_3^2]\ldots[(x-\alpha_m)^2+\beta_m^2]}{[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2][(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2]\ldots[(x-\alpha_m)^2+\beta_m^2]}$$

$+$ etc.,

und wenn $2m$ der Grad des Nenners ist, so wäre der des Zählers $= 2m-1$, wo der Coefficient von x^{2m-1}, nämlich $2(A_1+A_2+\ldots A_m)$ nicht Null wäre. Diese Summe muß folglich nothwendig Null sein, wenn der Grad des Nenners den des Zählers wenigstens um zwei Einheiten übersteigt.

§. 49. Betrachten wir z. B. das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1},$$

worin n und $m<n$ zwei ganze Zahlen sind; so ist:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1},$$

und die Wurzeln der Gleichung:

$$F(x)=x^{2n}+1=0,$$

worin der Coefficient von $\sqrt{-1}$ positiv ist, sind in folgender Formel enthalten:

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\cos\frac{2k+1}{2n}\pi+\sqrt{-1}\sin\frac{2k+1}{2n}\pi,$$

woraus sie abgeleitet werden, wenn man der Größe $2k+1$ alle ungeraden Werthe zwischen 0 und $2n$ beilegt. Der allgemeine Werth von:

$$A-B\sqrt{-1}=\frac{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha+\beta\sqrt{-1})}=\frac{(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{2m}}{2n(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{2n-1}}\pi$$

$$=\frac{1}{2n}\frac{\cos(2k+1)\frac{m}{n}\pi+\sqrt{-1}\sin(2k+1)\frac{m}{n}\pi}{\cos(2k+1)\frac{2n-1}{2n}\pi+\sqrt{-1}\sin(2k+1)\frac{2n-1}{2n}\pi}$$

ist, wenn man:

$$\frac{2m+1}{2n}=a,\ \text{folglich}\ \frac{2m-2n+1}{2n}=a-1$$

setzt und sich erinnert, daß man, um zwei imaginäre Ausdrücke von der Form:

$$\cos p + \sqrt{-1}\sin p,\ \cos q + \sqrt{-1}\sin q$$

ineinander zu dividiren, nur die Bogen von einander abzuziehen braucht, folgender:

$$A - B\sqrt{-1} =$$

$$\frac{1}{2n}[\cos(a-1)(2k+1)\pi + \sqrt{-1}\sin(a-1)(2k+1)\pi]$$

$$= -\frac{1}{2n}[\cos a(2k+1)\pi + \sqrt{-1}\sin a(2k+1)\pi],$$

woraus folgt:

$$A = -\frac{1}{2n}\cos a(2k+1)\pi,\ B = \frac{1}{2n}\sin a(2k+1)\pi,$$

$$B_1 = \frac{\sin a\pi}{2n},\ B_2 = \frac{\sin 3a\pi}{2n}, \ldots,\ B_m = \frac{\sin(2n-1)a\pi}{2n},$$

und da nach der Voraussetzung der Grad des Nenners den des Zählers wenigstens um zwei Einheiten übersteigt; so hat man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1} = 2\pi(B_1 + B_2 + \ldots + B_m)$$

$$= \frac{2\pi}{2n}[\sin a\pi + \sin 3a\pi + \ldots + \sin(2n-1)a\pi].$$

Die Summe, welche den zweiten Theil bildet, kann man leicht berechnen; denn die Gleichungen:

$$\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta = e^{\vartheta\sqrt{-1}},$$
$$\cos 3\vartheta + \sqrt{-1}\sin 3\vartheta = e^{3\vartheta\sqrt{-1}}, \text{ etc.}$$

geben:

$$[\cos\vartheta + \cos 3\vartheta + \cos 5\vartheta \ldots + \cos(2n-1)\vartheta]$$
$$+ \sqrt{-1}[\sin\vartheta + \sin 3\vartheta + \sin 5\vartheta \ldots + \text{etc.}]$$
$$= e^{\vartheta\sqrt{-1}} + e^{3\vartheta\sqrt{-1}} + e^{5\vartheta\sqrt{-1}} \ldots + e^{(2n-)\vartheta\sqrt{-1}}$$
$$= e^{\vartheta\sqrt{-1}}[1 + e^{2\vartheta\sqrt{-1}} + e^{4\vartheta\sqrt{-1}} \ldots + e^{(2n-2)\vartheta\sqrt{-1}}]$$
$$= \frac{e^{2n\vartheta\sqrt{-1}} - 1}{e^{2\vartheta\sqrt{-1}} - 1} e^{\vartheta\sqrt{-1}}.$$

In dem betrachteten Falle ist aber:

$$\vartheta = a\pi = \frac{2m+1}{2n}\pi,$$

und folglich:

$$e^{2n\vartheta\sqrt{-1}} = e^{(2m+1)\pi\sqrt{-1}} =$$
$$\cos(2m+1)\pi + \sqrt{-1}\sin(2m+1)\pi = -1.$$

Außerdem hat man:

$$\frac{e^{\vartheta\sqrt{-1}}}{e^{2\vartheta\sqrt{-1}}-1}=\frac{e^{\vartheta\sqrt{-1}}}{e^{\vartheta\sqrt{-1}}-e^{-\vartheta\sqrt{-1}}}=\frac{1}{e^{\vartheta\sqrt{-1}}-e^{-\vartheta\sqrt{-1}}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}\sin\vartheta}=\frac{1}{2\sqrt{-1}\sin a\pi},$$

folglich:

$$\cos a\pi+\cos 3a\pi,..+\cos(2n-1)a\pi$$
$$+\sqrt{-1}[\sin a\pi+\sin 3a\pi...+\sin(2n-1)a\pi]$$
$$=-\frac{2}{2\sqrt{-1}}\times\frac{1}{\sin a\pi}=-\frac{1}{\sqrt{-1}\sin a\pi},$$
$$\cos a\pi+\cos 3a\pi+...\cos(2n-1)a\pi=0,$$
$$\sin a\pi+\sin 3a\pi+...\sin(2n-1)a\pi=\frac{1}{\sin a\pi},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}=\frac{\pi}{n\sin a\pi}=\frac{\pi}{n\sin\frac{2m+1}{n}\pi},$$

und hieraus ergiebt sich, wenn man $z=x^{2n}$ setzt:

$$\int_0^{\infty}\frac{s^{a-1}ds}{1+s}=2n\int_0^{\infty}\frac{x^{2ma}dx}{1+x^{2n}}=n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2ma}dx}{1+x^{2n}}$$
$$=\frac{\pi}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Reducirt man ebenso jedes der beiden folgenden als unbestimmt erscheinenden Integrale auf seinen Hauptwerth, so findet man:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1-x^{2n}}=\frac{\pi}{n}[\sin 2a\pi+\sin 4a\pi...+\sin(2n-2)a\pi]$$
$$=\frac{\pi}{n\operatorname{tang}a\pi}=\frac{\pi}{n\operatorname{tang}\frac{2m+1}{2n}\pi},$$
$$\int_0^{\infty}\frac{s^{a-1}ds}{1-s}=2n\int_0^{\infty}\frac{x^{2ma}dx}{1-x^{2n}}=n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2ma}dx}{1-x^{2n}}=\frac{\pi}{\operatorname{tang}a\pi}.$$

Achte Vorlesung.

Bestimmung eines bestimmten Integrales: 1) vermittelst der Integration durch Reihen und 2) vermittelst der Differenzirung oder Integrirung unter dem Zeichen $\int$. — Fundamentaleigenschaften der Function Γ.

---

§. 50. Wenn man den Werth eines bestimmten Integrales nicht durch die bisher angegebenen Mittel erhalten kann, so muß man zu zwei andern Methoden seine Zuflucht nehmen, wovon die eine in der Integration durch Reihen und die andere darin besteht, daß man unter dem Zeichen $\int$ in Beziehung auf eine willkührliche Constante oder auf eine von der unabhängigen Veränderlichen verschiedene zweite Veränderliche differenzirt oder integrirt.

Die Integration durch Reihen beruht auf folgendem Fundamentallehrsatze.

Lehrsatz. Wenn x_0, X endliche Größen sind und die Reihe:

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n,$$

deren verschiedene Glieder zwischen den Grenzen x_0, X stetige Functionen der Veränderlichen x sind, für alle zwischen diesen Grenzen liegenden Werthe von x convergent ist; so ist die Reihe:

$$\int_{x_0}^{X} u_0 dx,\quad \int_{x_0}^{X} u_1 dx,\quad \int_{x_0}^{X} u_2 dx,\ldots.\quad \int_{x_0}^{X} u_n dx$$

auch convergent, und wenn S die Summe der ersten Reihe bezeichnet, so wird die der zweiten durch $\int_{x_0}^{X} S dx$ ausgedrückt. Oder mit andern Worten: die Gleichung:

$$S = u_0 = u_1 + u_2 + \ldots \text{ etc.}$$

hat die Gleichung zur Folge:

$$\int_{x_0}^{X} S dx = \int_{x_0}^{X} u_0 dx + \int_{x_0}^{X} u_1 dx + \int_{x_0}^{X} u_2 dx + \text{etc.}$$

Beweis. Es sei:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_{n-1}$$

die Summe der n ersten Glieder der ersten Reihe und r_n der Rest oder die Summe der übrigen Glieder der Reihe, so hat man:

$$S = S_n + r_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots u_{n-1} + r_n,$$

$$\int_{x_0}^{X} S dx = \int_{x_0}^{X} u_0 dx + \int_{x_0}^{X} u_1 dx + \ldots \int_{x_0}^{X} u_{n-1} dx + \int_{x_0}^{X} r_n dx.$$

Nun ist aber das Integral $\int_{x_0}^{X} r_n dx$ ein besonderer Werth des Productes $r_n(X - x_0)$, welcher einem zwischen den Grenzen x_0, X liegenden Werthe von x entspricht, und da der Rest r_n ohne Ende und destomehr abnimmt, je größer n wird; so ist dasselbe mit dem Integrale $\int_{x_0}^{X} r_n dx$ der Fall, und man hat:

$$\int_{x_0}^{X} S dx = \int_{x_0}^{X} u_0 dx + \int_{x_0}^{X} u_1 dx + \ldots \text{etc.}$$

Wenn man in dieser Formel x für X setzt, so erhält man die folgenden Formeln:

$$\int_{x_0}^{x} S dx = \int_{x_0}^{x} u_0 dx + \int_{x_0}^{x} u_1 dx + \ldots,$$

$$\int S dx = \int u_0 dx + \int u_1 dx + \int u_2 dx + \ldots + C.$$

§. 51. Man könnte leicht beweisen, daß die vorhin abgeleiteten Formeln auch noch dann stattfinden, wenn die erste, anfangs zwischen den Grenzen x_0, X convergente Reihe für eine dieser Grenzen, oder für beide divergent würde, wofern nur die Integrale:

$$\int_{x_0}^{X} u_0 dx, \quad \int_{x_0}^{X} u_1 dx, \text{ etc.},$$

eine convergente Reihe bilden.

Die Beweisart besteht darin, daß man für ξ_0, ξ zwei zwischen x_0 und X liegende Werthe nimmt, für welche man folglich hat:

$$\int_{\xi_0}^{\xi} S dx = \int_{\xi_0}^{\xi} u_0 dx + \int_{\xi_0}^{\xi} u_1 dx + \ldots,$$

und daß man alsdann ξ_0 gegen die Grenze x_0 und ξ gegen die Grenze X convergiren läßt. Diese Bemerkung erstreckt sich sogar auf den Fall, wo die Größen x_0, X einzeln, oder gleichzeitig unendlich werden. Wenn man z. B. $u_n = a_n x^n$ nimmt, wo a_n ein reeller, oder imaginärer Coefficient ist, und man bezeichnet ferner durch ρ_n den Zahlenwerth oder den Modulus von a_n und durch λ den größten Werth, welchen der Ausdruck $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$ annimmt, wenn die Zahl n unendlich wird; so ist die Reihe:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.}$$

zwischen den Grenzen $x = -\frac{1}{\lambda}$, $x = +\frac{1}{\lambda}$ convergent, und man

hat folglich für die zwischen diesen Grenzen liegenden Werthe der Veränderlichen x, wenn man:

$$S = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.}$$

setzt:

$$\int_0^x S dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a^2 \frac{x^3}{3} + \text{etc.}$$

Diese letzte Reihe findet noch für die Werthe $x = -\frac{1}{\lambda}$, $x = +\frac{1}{\lambda}$ statt, wenn für diese besonderen Werthe die Reihe:

$$a_0 x + \tfrac{1}{2} a_1 x^2 + \tfrac{1}{3} a_2 x^3 \ldots.$$

convergent bleibt.

§. 52. Vermittelst dieser Principien kann man eine große Anzahl Integrale in convergente Reihen entwickeln, welche beliebig genäherte Werthe dieser Integrale geben, und hierin besteht die Integration durch Reihen. Man kann sogar diese Integrationsmethode zur Entwickelung aller Arten von Größen in Reihen anwenden und oft die gegebenen Größen durch bestimmte Integrale ausdrücken, auf welche man alsdann die in Rede stehende Methode anwendet.

Beispiele. Um die Functionen:

$$l(1+x), \text{arc tang } x, \text{arc sin } x$$

in Reihen zu entwickeln, bedient man sich der Formeln:

$$l(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}, \quad \text{arc tang } x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

$$\text{arc sin } x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{x_0}^x 1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

und da man zwischen den Grenzen $x = -1$, $x = +1$ hat:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \text{etc.}, \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots \text{etc.},$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{2}\tfrac{3}{4} x^4 + \tfrac{1}{2}\tfrac{3}{4}\tfrac{5}{6} x^6 + \text{etc.};$$

so giebt die Integration durch Reihen zwischen denselben Grenzen:

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.}, \quad \text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.},$$

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

Wenn man in diesen letzten Gleichungen $x = 1$ setzt, so bleiben die Reihen in den zweiten Theilen convergent, und man hat:

$$l(2) = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \text{etc.}, \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \text{etc.},$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7} + \text{etc.}$$

§. 53. **Die Integration durch Differenziirung unter dem Zeichen $\int$** beruht auf folgendem wichtigem Lehrſatze:

Lehrſatz. Um die Integrale:

$$\int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx, \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx$$

in Beziehung auf y zu differenziiren, braucht man nur die Function $f(x, y)$ unter dem Zeichen $\int$ zu differenziiren.

Beweis. Wenn man der Größe y einen Zuwachs Δy ertheilt und mit Δ_y den entſprechenden Zuwachs irgend einer Function von y, ſo wie mit D_y ihre Ableitung bezeichnet; ſo findet man:

$$\Delta_y \int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx = \int_{x_0}^{X} f(x, y+\Delta y)\,dx - \int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{X} [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)]\,dx = \int_{x_0}^{X} \Delta_y f(x, y)\,dx,$$

woraus folgt, wenn man durch Δy dividirt und zu der Grenze übergeht:

$$D_y \int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx = \int_{x_0}^{X} D_y f(x, y)\,dx,$$

und folglich:

$$D_y \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx = \int_{x_0}^{x} D_y f(x, y)\,dx$$

oder:

$$D_y \int f(x, y)\,dx = \int D_y f(x, y)\,dx.$$

Aus dieſem Lehrſatze folgt auch, daß die Gleichung:

$$\int f(x, y)\,dx = F(x, y) + C$$

die beiden folgenden:

$$\int D_y f(x, y)\,dx = D_y F(x, y), \quad \int D_y^n f(x, y)\,dx = D_y^n F(x, y)\,dx$$

nach ſich zieht.

Zuweilen hat man auch ein beſtimmtes Integral:

$$\int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx$$

in Beziehung auf die Grenzen x_0, X zu differenziiren. Nun geben aber die identiſchen Gleichungen:

$$D_x \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx = f(x, y),$$

$$D_x \int_{x}^{X} f(x, y)\,dx = -D_x \int_{X}^{x} f(x, y)\,dx = -f(x, y),$$

wenn man in der ersten $x=X$ und in der zweiten $x=x_0$ setzt:

$$D_X \int_{x_0}^{X} f(x,y)dx = f(X,y),\quad D_{x_0} \int_{x_0}^{X} f(x,y)dx = -f(x_0,y).$$

§. 54. Dieses vorausgesetzt, wenn ein bestimmtes, oder unbestimmtes Integral, welches man zu berechnen weiß, außer der unabhängigen Veränderlichen eine oder mehrere andere Veränderliche oder willkührliche Constanten enthält; so giebt jede neue Differenzirung in Beziehung auf die eine oder die andere dieser Veränderlichen oder Constanten den Werth eines neuen Integrales, welches sich durch andere Methoden vielleicht nur sehr schwierig erhalten ließe.

Beispiele: Wenn man jedes der Integrale:

$$\int \frac{dx}{x^2+a},\ \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a},\ \int e^{\pm ax}dx,\ \int_0^{\infty} e^{-ax}dx$$

n mal hintereinander in Beziehung auf die Größe a differenzirt, so erhält man:

$$\int \frac{1.2.3\ldots n}{(x^2+a)^{n+1}}dx = \frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\text{arc tang}\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{da^n}+C,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1.2.3\ldots n}{(x^2+a)^{n+1}} = \pm\frac{\pi}{2}\frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}{da^n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n a^n\sqrt{a}}\pi,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{\pi}{2};$$

$$\int x^n e^{\pm ax}dx = \pm\frac{d^n(a^{-1}e^{\pm ax})}{da^n}+C,$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax}dx = \pm\frac{d^n(a^{-1})}{da^n} = \frac{1.2.3\ldots n}{a^{n+1}}.$$

§. 55. Oft giebt auch die Integration unter dem Zeichen $\int$ die Werthe gewisser bestimmter Integrale, obgleich man kein Mittel hat, die entsprechenden unbestimmten Integrale anzugeben. Wir wollen zunächst beweisen, daß man, um die mit dy multiplicirten Ausdrücke:

$$\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx,\quad \int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx$$

in Beziehung auf y von $y=y_0$ an zu integriren, nur unter dem Zeichen $\int$ die mit dy multiplicirte Function $f(x,y)$ von $y=y_0$ aus zu integriren braucht, wofern jedoch die Function $f(x,y)$ zwischen den Integrationsgrenzen in Beziehung auf die beiden Veränderlichen x, y stetig bleibt.

Beweis. Aus der Gleichung:

$$D_y \int_{x_0}^{x} F(x,y)\,dx = \int_{x_0}^{x} D_y F(x,y)\,dx$$

folgt, wenn man $F(x, y) = \int_{y_0}^{y} f(x, y)\,dy$ ſetzt:

$$D_y \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx,$$

und wenn man alsdann die beiden Theile dieſer letzten Gleichung mit dy multiplicirt und in Beziehung auf y von $y = y_0$ an integrirt; ſo findet man:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x, y)\,dy\,dx = \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx\,dy,$$

was bewieſen werden ſollte.

Beiſpiele. Da man für poſitive Werthe von μ allgemein hat:

$$\int_0^1 x^{\mu-1}\,dx = \frac{1}{\mu},$$

ſo folgt, wenn man beide Theile dieſer Gleichung mit $d\mu$ multiplicirt und in Beziehung auf μ von $\mu = \nu$ an integrirt:

$$\int_0^1 \frac{x^\mu - x^\nu}{lx}\,\frac{dx}{x} = l\frac{\mu}{\nu}.$$

Wenn man mit a, b, c poſitive Conſtanten bezeichnet und unter dem Zeichen $\int$ die Integrale:

$$\int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a}, \quad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2},$$

in Beziehung auf die Größe a von $a = 0$ an integrirt; ſo erhält man die Formeln:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x}\,dx = l\frac{a}{c},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x}\cos bx\,dx = \tfrac{1}{2}l\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x}\sin bx\,dx = \text{arc tang}\,\frac{a}{b} - \text{arc tang}\,\frac{c}{b},$$

woraus folgt, wenn man $c = 0$ und $a = \infty$ ſetzt:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty, \quad \int_0^\infty \cos bx\,\frac{dx}{x} = \infty, \quad \int_0^\infty \sin bx\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

§. 56. Wenn in einem ſich auf die Veränderliche x beziehenden Integrale die Function unter dem Zeichen $\int$ noch eine andere Größe μ enthält, deren Werth willkührlich iſt; ſo kann man dieſe Größe μ als eine neue Veränderliche betrachten, und das Integral ſelbſt als eine Function von μ. Unter den Functionen dieſer Art iſt beſonders die zu bemerken, welche Legendre durch den Buchſtaben Γ bezeichnet hat, und welche für poſitive Werthe von μ durch folgende Gleichung ausgedrückt wird:

$$\Gamma(\mu) = \int_0^1 \left(1\frac{1}{x}\right)^{\mu-1} dx.$$

Setzt man:

$$1\frac{1}{x} = z,$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{x} = e^z,\ x = e^{-z},\ dx = -e^{-z}\,dz,$$

und bemerkt, daß für $x=0$, $z=\infty$ und für $x=1$, $z=0$ ist; so verwandelt sich dieses Integral in folgendes:

$$-\int_\infty^0 z^{\mu-1}\,e^{-z}\,dz = \int_0^\infty z^{\mu-1}\,e^{-z}\,dz = \Gamma(\mu).$$

Die Function Γ genügt offenbar der Gleichung $\Gamma(1)=1$. Da wir ferner in §. 42 gefunden haben:

$$\int_0^\infty z^n e^{-z}\,dz = 1.2.3\ldots n$$

so ist offenbar:

$$\Gamma(2)=1, \Gamma(3)=1.2, \ldots, \Gamma(n)=1.2.3\ldots(n-1)=(n-1)\,\Gamma(n-1).$$

Wenn man in dem bereits in §. 42 angegebenen Werthe der Integrale:

$$\int_0^\infty z^z\ e^{-az}\cos bz\,dz = \frac{1.2.3\ldots n}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}\cos\left[(n+1)\ \text{arc tang}\,\frac{b}{a}\right],$$

$$\int_0^\infty z^n\,e^{-az}\sin bz\,dz = \frac{1.2.3\ldots n}{(a^2+b^2)^{\frac{n+1}{1}}}\sin\left[(n+1)\ \text{arc tang}\,\frac{b}{a}\right]$$

$n-1$ für n setzt, und für das Product $1.2.3\ldots\ldots(n-1)$ seinen Werth $\Gamma(n)$ setzt, so hat man:

$$\int_0^\infty z^{n-1}\,e^{-az}\cos bz\,dz = \frac{\Gamma(n)\cos\left(n\ \text{arc tang}\,\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{1}}},$$

$$\int_0^\infty z^{n-1}\,e^{-az}\sin bz\,dz = \frac{\Gamma(n)\sin\left(n\ \text{arc tang}\,\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{1}}},$$

und wenn man in der Gleichung:

$$\int_0^\infty z^{\mu-1}\,e^{-z}\,dz = \Gamma(\mu)$$

z in az verwandelt:

$$\int_0^\infty z^{\mu-1} e^{-az}\, dz = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}.$$

Aus der Formel:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x)^n} = \frac{1.2.3\ldots(m-1)\,1.2.3\ldots(n-m-1)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

ergiebt sich endlich:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x)^n} = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)}.$$

Da die Gleichung:

$$\int_0^\infty z^{\mu-1} e^{-az}\, dz = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}$$

für beliebige Werthe von μ und a stattfindet, so kann man darin successive setzen:

1) $\mu = a,\quad a = x,$
2) $\mu = b,\quad a = x + 1,$

welches giebt, wenn a und b positiv sind:

$$\int_0^\infty z^{a-1} e^{-zx}\, dz = \frac{\Gamma(a)}{x^a},$$

$$\int_0^\infty z^{b-1} e^{-z(1+x)} dz = \frac{\Gamma(b)}{(1+x)^b},$$

und folglich:

$$\frac{x^{a-1}}{(1+x)^b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty x^{a-1}\, e^{-zx} z^{b-1} e^{-z} dz,$$

woraus folgt, wenn man mit dx multiplicirt und zwischen den Grenzen $0, \infty$ in Beziehung auf x integrirt:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty z^{b-1} e^{-z} dz \times \int_0^\infty x^{a-1} e^{-zx} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty z^{b-1} e^{-z} dz \times \frac{\Gamma(a)}{z^a} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} \int_0^\infty z^{b-a-1} e^{-z} dz.$$

Da man nach der Definition der Function Γ, wenn $b-a$ positiv ist, hat:

$$\int_0^\infty z^{b-a-1} e^{-z} dz = \Gamma(b-a),$$

so ist endlich:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b} = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}.$$

Wenn man in dieser Formel $b=1$, $a=\frac{2n+1}{2n}$ setzt und die Gleichungen:

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{1+z} = 2n \int_0^\infty \frac{x^{2an}dx}{x^{2n}+1}$$

$$= n\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2an}dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad \Gamma(1) = 1$$

in §. 49 berücksichtigt, so findet man:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad [\Gamma(\tfrac{1}{2})]^2 = \pi,$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} = \int_0^\infty z^{-\frac{1}{2}} e^{-z}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt:

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int e^{-(x+\alpha)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x-x^2}\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-(z+x)^2}dx + \int_0^\infty e^{-(x-z)^2}dx = e^{-z^2}\int_0^\infty e^{-x}(e^{-2zx}+e^{2zx})dx$$

und endlich:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{(e^{2zx}+e^{-2zx}}{2}, dx = \tfrac{1}{2}e^{-z^2}\sqrt{\pi},$$

welche Formel statt findet für jeden beliebigen reellen Werth von z, und auch noch dann, wenn man $z\sqrt{-1}$ für z setzt, wodurch man erhält:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2zx\,dx = \tfrac{1}{2}e^{-z^2}\sqrt{\pi}.$$

§. 57. Die Zulässigkeit dieses Ueberganges vom Reellen zum Imaginären beruht auf dem folgenden Lehrsatze, welcher sich leicht beweisen läßt:

Wenn sich die Functionen:

$$f(x, z) \text{ und } \mathrm{F}(z) = \int_{z_0}^{z} f(x,z)\,dx$$

für reelle Werthe von z, welche zwischen den Grenzen $-r, +r$ liegen, in convergente Reihen entwickeln lassen, welche nach den ganzen steigenden Potenzen von z fortschreiten, und die Summen dieser Reihen werden noch durch $f(x,z)$, $\mathrm{F}(z)$ ausgedrückt, wenn z imaginär wird; so findet die Gleichung:

$$\mathrm{F}(z) = \int_{z_0}^{z} f(x,z)\,dx$$

auch noch für imaginäre Werthe von z statt, deren Moduli kleiner als r sind. Um diesen Lehrsatz zu beweisen, geht man von dem bekannten Satze aus, daß zwei nach den ganzen steigenden Potenzen von z fortschreitende Reihen nur dann dieselbe Summe geben können, wenn die Coefficienten von gleich hohen Potenzen von z in beiden Reihen paarweise einander gleich sind. Aus dieser Gleichheit oder Identität folgt alsdann unmittelbar, daß, wenn die beiden Reihen convergent bleiben und für die zwischen den Grenzen $-r, +r$ liegenden reellen Werthe von z dieselbe Summe

geben, ſie auch dieſelben Bedingungen für imaginäre Werthe von z erfüllen, deren Moduli kleiner als r ſind.

Die Anwendung dieſer Bemerkung auf den weiter oben behandelten Fall iſt einleuchtend; denn die beiden Functionen:

$$f(x,z)=e^{-x^2}\frac{(e^{2xz}+e^{2xz})}{2},\quad F(z)=\tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}e^{z^2}$$

laſſen ſich für jeden reellen, oder imaginären Werth von z durch die Maclaurinſche Reihe in convergente Reihen entwickeln; folglich etc.

Legendre hat das beſtimmte Integral:

$$\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-1}\,dx$$

ein Euler'ſches Integral der zweiten Art genannt, und Binet hat die Bezeichnung deſſelben durch $B(a,b)$ vorgeſchlagen. Es findet zwiſchem dieſem Integrale und dem Euler'ſchen Integrale der erſten Art:

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx$$

eine merkwürdige Beziehung ſtatt. Denn wenn man in dem Ausdrucke:

$$\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-1}\,dx$$

$x=\frac{1}{1+z}$ ſetzt, ſo findet man:

$$B(a,b)=\int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{(1+z)^{a+b}};$$

aber wenn man in der Gleichung in §. 56, nämlich:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b}=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}$$

b in $a+b$ verwandelt, ſo kommt:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^{a+b}}=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+a)},$$

folglich:

$$B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Neunte Vorlesung.

Vergleichung der beiden Werthe, welche in gewissen Fällen ein doppeltes Integral annimmt, wenn man die Ordnung der Integration umkehrt. — Anwendung dieser Principien auf die Bestimmung bestimmter Integrale. — Wie man vermittelst gewisser besonderer Transformationen verschiedene bestimmte Integrale berechnen kann.

---

§. 58. Cauchy hat auch noch eine andere Bemerkung gemacht, welche auf die Bestimmung einer sehr großen Anzahl bestimmter Integrale führt. Aus dem in der achten Vorlesung Gesagten folgt, daß man bei einer doppelten Integration die Ordnung oder Reihenfolge der Integrationen umkehren kann; denn nach §. 55 hat man:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dydx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dxdy.$$

Wenn man setzt:

$$f(x,y)\,dx = \frac{d\chi(x,y)}{dx}\,dx,$$

$$f(x,y)\,dy = \frac{d\varphi(x,y)}{dy}\,dy,$$

so leisten die beiden Functionen $\varphi(x,y)$ und $\chi(x,y)$ der Gleichung:

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dy} = \frac{d\chi(x,y)}{dx}$$

Genüge, und man findet:

$$\int_{x_0}^{X}[\varphi(x,Y)-\varphi(x,y_0)]\,dx = \int_{y_0}^{Y}[\chi(X,y)-\chi(x_0,y)]\,dy.$$

Diese Gleichung findet statt, wenn die Functionen $\varphi(x,y)$ und $\chi(x,y)$ zwischen den Grenzen x_0, X und y_0, Y endlich und stetig sind; aber sie findet nicht mehr statt, wenn diese Functionen für ein oder mehrere Systeme zwischen diesen Grenzen liegender Werthe von x, y unendlich werden. Alsdann können die durch eine doppelte Integration erhaltenen Ausdrücke von einander verschieden sein und von der Ordnung der Integrationen abhängen; allein man kann ihren Unterschied leicht berechnen. Wir wollen zunächst

annehmen, daß die beiden Functionen $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$ für ein einziges Werthſyſtem $x=a$, $y=b$ unendlich werden, und mit ε eine unendlich kleine Zahl bezeichnen; ſo ergiebt ſich durch Anwendung der vorhergehenden Formel:

$$\int_{x_0}^{a-\varepsilon}[\varphi(x,Y)-\varphi(x,y_0)]\,dx+\int_{a+\varepsilon}^{X}[\varphi(x,Y)-\varphi(x,y_0)]\,dx$$
$$=\int_{y_0}^{Y}[\chi(X,y)-\chi(a+\varepsilon,y)+\chi(a-\varepsilon,y)-\chi(x_0,y)]\,dy,$$

woraus folgt, wenn man ε gegen die Grenze Null convergiren läßt:

$$\int_{x_0}^{X}[\varphi(x,Y)-\varphi(x,y_0)]\,dx=\int_{y_0}^{Y}[\chi(x,Y)-\chi(x_0,y)]\,dy-\Delta,$$

wo der Werth von Δ durch die Formel:

$$\Delta=\lim\int_{y_0}^{Y}[\chi(a+\varepsilon,y)-\chi(a-\varepsilon,y)]\,dy.$$

beſtimmt wird. In dem allgemeinen Falle, wo die in Rede ſtehenden Functionen für eine gewiſſe Anzahl von Werthſyſtemen von x, y unendlich werden, iſt Δ die Summe mehrerer Glieder von derſelben Form.

Beiſpiel. Es ſei:

$$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

oder:

$$\varphi(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad \chi(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},$$
$$x_0=-1,\ X=1,\ y_0=-1,\ Y=1,$$

ſo findet man:

$$\Delta=\lim\int_{-1}^{+1}\frac{2\varepsilon\,dy}{\varepsilon^2+y^2}=2\pi,\quad \int_{-1}^{+1}\frac{-2dx}{1+x^2}=\int_{-1}^{+1}\frac{2dy}{1+y^2}-2\pi,$$

oder:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dydx=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy-2\pi.$$

Es iſt leicht einzuſehen, daß die Functionen $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$ den Bedingungen:

$$\frac{d\chi(x,y)}{dx}\,dx=f(x,y)\,dx,\quad \frac{d\varphi(x,y)}{dy}\,dy=f(x,y)\,dy,$$
$$\frac{d\varphi(x,y)}{dy}=\frac{d\chi(x,y)}{dx}$$

genügen, wenn man hat:

$$\varphi(x,y)\,dx+\chi(x,y)\,dy=f(u)\,du$$

und folglich:

$$\varphi(x,y)=f(u)\frac{du}{dx},\quad \chi(x,y)=f(u)\frac{du}{dy}.$$

§. 59. Das eben Gesagte ist offenbar auch auf den Fall anwendbar, wo die Functionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$ imaginär werden, wofern sie nur wieder den vorhergehenden Gleichungen genügen. Dieses geschieht z. B., wenn man setzt:

$$\varphi(x,y) = F(x+y\sqrt{-1}),$$
$$\chi(x,y) = \sqrt{-1}\,F(x+y\sqrt{-1});$$

denn alsdann hat man:

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dy} = \sqrt{-1}\,F'(x+y\sqrt{-1}),$$
$$\frac{d\chi(x,y)}{dx} = \sqrt{-1}\,F'(x+y\sqrt{-1}).$$

Setzt man also:

$$\Delta = \sqrt{-1}\lim\int_{y_0}^{Y}[F(a+\varepsilon+y\sqrt{-1}) - F(a-\varepsilon+y\sqrt{-1})]\,dy,$$

so hat man:

$$\int_{x_0}^{X} F(x+Y\sqrt{-1}) - F(x+y_0\sqrt{-1})]\,dx$$
$$= \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}[F(X+y\sqrt{-1}) - F(x_0+y\sqrt{-1}]\,dy - \Delta.$$

Ferner wollen wir setzen:

$$(x-a-b\sqrt{-1})\,F(x) = F(x),\quad y = b+\varepsilon z,$$

so ergiebt sich daraus:

$$z_0 = -\frac{b-y_0}{\varepsilon},\quad Z = \frac{Y-b}{\varepsilon},\quad dy = \varepsilon dz,\quad F(x) = \frac{F(x)}{x-a-b\sqrt{-1}},$$

$$F(a+\varepsilon+y\sqrt{-1}) = \frac{F(a+\varepsilon+y\sqrt{-1})}{a+\varepsilon+y\sqrt{-1}-a-b\sqrt{-1}}$$
$$= \frac{F[a+\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{\varepsilon(1+z\sqrt{-1})},$$

$$F(a-\varepsilon+y\sqrt{-1}) = \frac{F[a-\varepsilon+(b-\varepsilon z)\sqrt{-1}}{\varepsilon(-1+z\sqrt{-1})}$$

$$\Delta = \sqrt{-1}\lim\int_{z_0}^{Z}\left[\frac{F[a+\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{1+z\sqrt{-1}} - \frac{F[a-\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{-1+z\sqrt{-1}}\right]dz.$$

Es sei nun:

$$\frac{F[a+\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{1+z\sqrt{-1}} - \frac{F[a-\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{-1+z\sqrt{-1}} = \lambda(\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\mu(\varepsilon),$$

$$\frac{\lambda(\varepsilon)-\lambda(0)}{\varepsilon} = \lambda'(\vartheta\varepsilon) = \alpha,\quad \frac{\mu(\varepsilon)-\mu(0)}{\varepsilon} = \mu'(\vartheta\varepsilon) = \beta,$$

wo $\lambda(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$, folglich $\lambda'(\varepsilon)$, $\mu'(\varepsilon)$ und α, β reelle Größen sind. Ferner wollen wir $Y > y_0$ setzen und annehmen, daß die Functionen:

$$F(x+y\sqrt{-1}),\ F'(x+y\sqrt{-1}),$$

zwiſchen den Grenzen x_0, X und y_0, Y in Beziehung auf die Veränderlichen x, y endlich und ſtetig bleiben; ſo bleiben die Werthe von $\lambda'(\varepsilon)$, $\mu'(\varepsilon)$ mit ε immer ſehr klein, und daſſelbe iſt mit α, β der Fall, weil man hat:

$$\lambda'(\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\mu'(\varepsilon)=F'[a+\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]$$
$$-F'[a-\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}].$$

Hiernach findet man:

$$\Delta=\sqrt{-1}\lim\int_{z_0}^{Z}[\lambda(\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\mu(\varepsilon)]\,dz$$
$$=\sqrt{-1}\int_{z_0}^{Z}[\lambda(0)+\sqrt{-1}\,\mu(0)]\,dz.$$

Setzt man nun:

$$f=F(a+b\sqrt{-1})=\lim\varepsilon\,F(a+b\sqrt{-1}+\varepsilon)$$

und bemerkt, daß für $\varepsilon=0$, $z_0=-\infty$, $Z=+\infty$ iſt; ſo findet man:

$$\lambda(0)+\sqrt{-1}\,\mu(0)=\frac{F(a+b\sqrt{-1})}{1+z\sqrt{-1}}-\frac{F(a+b\sqrt{-1})}{-1+z\sqrt{-1}}=+\frac{2f}{1+z^2},$$

$$\Delta=2f\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^2}=2\pi f\sqrt{-1}.$$

Wenn $y_0=b$, oder $Y=b$ wäre, ſo wäre $z_0=0$, oder $z=0$; das Integral in Beziehung auf z müßte nur noch zwiſchen den Grenzen $z=0$, $z=\infty$, oder $z=-\infty$, $z=0$ genommen werden, und folglich reducirte ſich der Werth von Δ auf $\pi f\sqrt{-1}$.

§. 60. In allem Vorhergehenden drückt $a+b\sqrt{-1}$ eine Wurzel der Gleichung $F(x)=\pm\infty$ aus. Wenn dieſe Gleichung mehrere Wurzeln hätte, deren reelle Beſtandtheile zwiſchen den Grenzen x_0, X und deren Coefficienten von $\sqrt{-1}$ zwiſchen den Grenzen y_0, Y lägen, und man bezeichnete dieſe Wurzeln mit:

$$x_1=a_1+b_1\sqrt{-1},\ x_2=a_2+b_2\sqrt{-1},\ \text{etc.},$$

ſo wie die wahren Werthe, welche die Producte:

$$(x-x_1)F(x)=(x-a_1-b_1\sqrt{-1})F(x),$$
$$(x-x_2)F(x)=(x-a_2-b_2\sqrt{-1})F(x),\text{etc.}$$

annehmen, wenn ihre erſten Factoren gegen Null convergiren, mit f_1, f_2, ...; ſo fände man:

$$\Delta=2\pi(f_1+f_2+....+f_m)\sqrt{-1},$$

wo jedes der Glieder f_1, f_2, ... auf die Hälfte reducirt werden muß, ſo oft in der entſprechenden Wurzel der Coefficient von $\sqrt{-1}$ mit einer der Grenzen y_0, Y zuſammenfällt.

§. 61. Wenn die Function $f(x+y\sqrt{-1})$ verſchwindet: 1) für jeden Werth von y, wenn $x=\pm\infty$ und 2) für jeden Werth von x, wenn $y=\infty$ iſt, und man nimmt $x_0=-\infty$, $X=+\infty$, $y_0=0$, $Y=\infty$; ſo ergiebt ſich aus der Gleichung:

$$\int_{x_0}^{X}[F(x+Y\sqrt{-1})-F(x+y_0\sqrt{-1})]\,dx$$
$$=\sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}[F(X+y\sqrt{-1})-F(x_0+y\sqrt{-1})]\,dy-\Delta,$$

der Werth:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,dx=\Delta=2\pi(f_1+f_2+\ldots+f_m)\sqrt{-1},$$

wo f_1, f_2, etc. leicht zu bestimmende Zahlen sind. Man kann also in diesem Falle den Werth des bestimmten Integrales $\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\,dx$ unmittelbar berechnen.

Wenn die Function $F(x)$ unter der Form $\frac{f(x)}{F(x)}$ erscheint und diejenigen der Glieder f_1, f_2, ... f_m, welche nicht verschwinden, den Wurzeln der Gleichung $F(x)=0$ entsprechen; so hat man:

$$f_1=\lim\frac{(x-x_1)f(x)}{F(x)}=\frac{f(x_1)}{F'(x_1)},\quad f_2=\frac{f(x_2)}{F'(x_2)},\text{ etc.}$$

und folglich:

$$\Delta=2\pi\left[\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}+\frac{f(x_2)}{F'(x_2)}+\ldots+\frac{f(x_m)}{F'(x_m)}\right]\sqrt{-1},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{F(x)}\,dx=2\pi\left[\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}+\ldots+\frac{f(x_m)}{F'(x_m)}\right]\sqrt{-1}.$$

Man muß für x_1, x_2, ... x_m nur die reellen Wurzeln, oder die imaginären Wurzeln nehmen, worin der Coefficient von $\sqrt{-1}$ positiv ist, indem man dafür sorgt, daß die, reellen Wurzeln entsprechenden Glieder auf die Hälfte reducirt werden.

Beispiele. Es sei:

$$F(x)=1+x^2,$$

so hat man $x=\sqrt{-1}$ und:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx=\pi f\sqrt{-1}.$$

Es sei:

$$F(x)=1-x^2,\quad x_1=-1,\quad x_2=+1,$$

so ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}[f(-1)-f(1)]\sqrt{-1}.$$

Es sei:

$$F(x)=1+x^2,$$
$$f(x)=(-x\sqrt{-1})^{\mu-1},$$

wo μ eine zwischen 0 und 2 liegende Zahl ist; so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1+x^2}\,dx$$

$$=[(-\sqrt{-1})^{\mu-1}+(\sqrt{-1})^{\mu-1}]\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2}=\pi,$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2\sin\frac{1}{2}\mu\pi}.$$

Es sei:

$$F(x)=1-x^2,$$

$$f(x)=(-x\sqrt{-1})^{\mu-1},$$

so findet man:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1-x^2}dx=\frac{\pi}{2}[(\sqrt{-1})^{\mu}+(-\sqrt{-1})^{\mu}],$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{1-x^2}=\frac{\pi\cos\frac{1}{2}\mu\pi}{2\sin\frac{1}{2}\mu\pi}=\frac{\pi}{2\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\mu\pi}.$$

Setzt man:

$$x^2=z,\quad \mu=2a,$$

so erhält man die Gleichungen:

$$\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}dz}{1+z}=\frac{\pi}{\sin a\pi},\quad \int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}dz}{1-z}=\frac{\pi}{\mathrm{tang}\,a\pi},$$

welche auf diese Weise für alle zwischen 0 und 1 liegende Werthe von a bewiesen sind.

Cauchy hat vermittelst dieser Principien und seiner Restrechnung eine große Anzahl allgemeiner Formeln aufgestellt, woraus man fast alle bis jetzt bekannten bestimmten Integrale und viele andere ableiten kann.

§. 62. Zuweilen können auch besondere Transformationen zur Bestimmung eines bestimmten Integrales führen, wovon wir folgende Beispiele anführen wollen.

Es sei das Integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$$

gegeben. Wir wollen dasselbe mit einem zweiten ähnlichen Integrale:

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy$$

multipliciren, so kommt:

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2=\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Setzt man $y=tx$, folglich $dy=xdt$, so hat man $t=0$ für $y=0$, $t=\infty$ für $y=\infty$ und:

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2=\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2}x\,dx.$$

Ferner ist:

$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2}x\,dx=\frac{1}{2(1+t^2)}$$

und folglich:

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2=\int_0^\infty\frac{1}{2}\frac{dt}{1+t^2}=\tfrac{1}{2}(\text{arc tang}\,\infty-\text{arc tang}\,(0)=\frac{\pi}{4},$$

folglich: $$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Es sei das Integral:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx$$

zu finden. Bezeichnet man dasselbe mit u und differenziirt in Beziehung auf b, so findet man:

$$\frac{du}{db}=-\int_0^\infty e^{-a^2x^2}x\sin bx\,dx;$$

aber die theilweise Integration giebt:

$$\int e^{-a^2x^2}x\sin bx\,dx=-\frac{1}{2a^2}e^{-a^2x^2}\sin bx+\frac{b}{2a^2}\int e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx,$$

woraus folgt, wenn man bemerkt, daß der integrirte Theil für $x=0$ und $x=\infty$ verschwindet:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}x\sin bx\,dx=\frac{b}{2a^2},\quad\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx=\frac{b}{2a^2}u,$$

und folglich:

$$\frac{du}{db}=-\frac{b}{2a^2}u,\quad\frac{du}{u}=-\frac{b\,db}{2a^2},\quad u=Ce^{-\frac{b^2}{4a^2}}.$$

Man hat also:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx=Ce^{-\frac{b^2}{4a^2}}.$$

Zur Bestimmung der Constante wollen wir $b=0$ setzen, so kommt:

$$C=\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz=\frac{1}{2a}\sqrt{\pi}$$

und endlich:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2a}}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}.$$

Zehnte Vorlesung.

Integrale der verschiedenen Ordnungen für die Functionen von einer einzigen Veränderlichen.

---

§. 63. In dem Frühern kam es hauptsächlich darauf an, eine Function von x zu finden, welche eine andere Function von x, nämlich $f(x)$ zur Ableitung und das Product $f(x)\,dx$ zum Differenziale hat. Jetzt nehmen wir aber an, daß nicht die Ableitung der ersten Ordnung, sondern die von der n^{ten} Ordnung gegeben sei, und der allgemeine Werth von y gesucht wird, welcher folgender Gleichung genügt:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

Auflösung. Wenn man die beiden Theile dieser Gleichung mit dx multiplicirt, so kann man sie auf folgende Form bringen:

$$d\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = f(x)\,dx,$$

woraus folgt, wenn man integrirt:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C,$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz + C.$$

Multiplicirt man wieder mit dx und integrirt ein zweites Mal, so erhält man:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(z)\,dzdx + C_1(x - x_0) + C_2.$$

Der zweite Theil dieser Gleichung läßt sich leicht auf ein einfaches Integral zurückführen; denn die Gleichung:

$$\mathrm{D}_x \int_{x_0}^{x} (x-z)^m f(z)\,dz = m\int_{x_0}^{x} (x-z)^{m-1} f(z)\,dz$$

giebt:

$$\int_{x_0}^{x}(x-z)^{m-1}f(z)dz=\frac{1}{m}\,\mathrm{D}_x\int_{x_0}^{x}(x-z)^m f(z)dz,$$

oder wenn man mit dx multiplicirt und zwischen den Grenzen x_0, x integrirt:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}(x-z)^{m-1}f(z)dzdx=\frac{1}{m}\int_{x_0}^{x}(x-z)^m f(z)\,dz+C,$$

und wenn man $m=1$ setzt:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}f(z)dzdx=\int_{x_0}^{x}(x-z)\,f(z)\,dz+C,$$

so hat man folglich:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\int_{x_0}^{x}(x-z)f(z)\,dz+C_1(x-x_0)+C_2.$$

Wenn man wieder mehrere Male hintereinander in Beziehung auf die Veränderliche x integrirt, so erhält man successive:

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^2}{1.2}f(z)dz+C_1\frac{(x-x_0)^2}{1.2}+C_2(x-x_0)+C_3,$$

. . . . . .

$$\frac{dy}{dx}=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)}f(z)\,dz+C_1\frac{(x-x_0)^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)}$$
$$+C_2\frac{(x-x_0)^{n-3}}{1.2.3\ldots(n-3)}+\ldots C_{n-1},$$

$$y=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f(z)\,dz+C_1\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$+C_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)}+\ldots C_{n-1}(x-x_0)+C_n,$$

wo C_1, C_2, C_3, ... , C_n, n verschiedene willkührliche Constanten sind, welche folglich das allgemeine Integral der Gleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n}=f(x)$$

in allen Fällen enthalten muß.

Dem bestimmten Integrale im zweiten Theile des Werthes von y kann man vermittelst der bereits in §. 33 abgeleiteten Gleichung:

$$\int_0^{X-x_0}f(X-x)dx=\int_0^{X-x_0}f(x+x_0)\,dx=\int_{x_0}^{X}f(x)\,dx$$

eine andere Form geben; denn wenn man in dieser Gleichung z für x, x für X und $\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f(z)$ für $f(z)$ setzt, so ergiebt sich daraus:

$$\int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f(z)\,dz=\int_0^{x-x_0}\frac{(x-x_0-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f(x_0+z)dz$$
$$=\int_0^{x-x_0}\frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}f(x-z)dz.$$

Wenn man der Einfachheit wegen $x_0 = 0$ setzt, so verwandelt sich diese letzte Gleichung in folgende:

$$\int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)\,dz = \int_0^x \frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(x-z)\,dz,$$

und der allgemeine Werth von y reducirt sich auf:

$$y = \int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)dz + C_1 \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + C_2 \frac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} + \ldots + C_{n-1}\,x + C_n.$$

§. 64. Wir wollen annehmen, daß $F(x)$ ein besonderer Werth von y sei, welcher der Gleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$$

Genüge leistet, so daß man hat:

$$F^{(n)} x = f(x);$$

so müssen die Function $F(x)$ und ihre Ableitungen $F^{(n-1)}(x)$, $F^{(n-2)}(x), \ldots F'(x)$ auch folgenden Gleichungen genügen:

$$F^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^x f(z)\,dz + C,$$

$$F^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^x (x-z) f(z)\,dz + C_1 (x-x_0) + C_2,$$

$$F^{(n-3)}(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-z)^2}{1.2} f(z)\,dz + C_1 \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + C_2 (x-x_0) + C_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F(x) + \int_{x_0}^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)dz + C_1 \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \ldots + C_{n-1}(x-x_0) + C_n,$$

und wenn man in dem Falle, wo die Function $F(x)$ und ihre successiven Ableitungen zwischen den Grenzen x_0, x stetig bleiben, in diesen Gleichungen $x = x_0$ setzt; so findet man:

$$C_1 = F^{(n-1)}(x_0), \quad C_2 = F^{(n-2)}(x_0), \ldots, \quad C_n = F(x_0),$$

und folglich:

$$F(x) = F(x_0) + (x-x_0) F'(x_0) + \ldots \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)\,dz.$$

Diese Gleichung findet für jeden Werth von x_0, und folglich auch für $x_0 = 0$ statt, welches giebt:

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)\,dz.$$

§. 65. Wenn man sich der unbestimmten Integrale bedient und die successiven Integrationen blos andeutet; so erscheinen die Werthe der Functionen:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \quad \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \quad \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}, \ldots y$$

unter folgenden Formen:

$$\int f(x)\,dx, \quad \int.\int f(x)\,dx\,dx, \quad \int.\int.\int f(x)\,dx\,dx\,dx, \ldots$$
$$\int.\int.\int \ldots \int f(x)\,dx \ldots dx.$$

Diese letzten Ausdrücke werden die Integrale der ersten, zweiten, dritten,..... der n^{ten} Ordnung in Beziehung auf die Veränderliche x genannt. Man bezeichnet sie durch:

$$\int f(x)\,dx, \int\int f(x)\,dx^2, \int\int\int f(x)\,dx^3, \ldots, \int\int\int\int \ldots \int f(x)\,dx^n,$$

oder wenn jede Integration in Beziehung auf die Grenzen x_0, x verrichtet wird, durch:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx, \quad \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dx^2, \ldots, \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \ldots\ldots f(x)\,dx^n.$$

Hiernach hat man offenbar:

$$\int\int f(x)\,dx^2 = \int_{x_0}^{x} (x-z) f(z)\,dz + C_1\,(x-x_0) + C_2,$$

$$\int\int\int \ldots f(x)dx^n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)dz + C_1 \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \ldots C_{n-1}(x-x_0) + C_n,$$

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dx^2 = \int_{x_0}^{x} (x-z) f(z)\,dz, \quad \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)dx^3 = \int\int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^2}{1.2} f(z)dz,$$

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \ldots f(x)dx^n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)\,dz.$$

Wenn man den zweiten Theil dieser letzten Gleichung entwickelt und bemerkt, daß man bei den Integrationen in Beziehung auf z die Größe x als constant betrachten kann, so erhält man:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \ldots f(x)dx^n =$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \left[\begin{array}{l} x^{n-1} \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz - \frac{n-1}{1} x^{n-2} \int_{x_0}^{x} z f(z)\,dz \\ + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} \int_{x_0}^{x} z^2 f(z)dz \ldots \pm \int_{x_0}^{x} z^{n-1} f(z)\,dz \end{array} \right]$$

oder was dasselbe ist:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \ldots f(x)\,dx^n =$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n-1}\left[x^{n-1} \int_{x_0}^{x} f(x)dx - \frac{n-1}{1} x^{n-2} \int_{x_0}^{x} x f(x)dx \ldots \pm \int_{x_0}^{x} x^{n-1} f(x)dx \right].$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann man leicht vermittelst mehrerer partieller Integrationen nachweisen.

Auch findet man, wenn man für das Integral:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} f(z)\,dz$$

seien aus einer der vorhergehenden Gleichungen (§. 62) abgeleiteten Werth setzt:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} \ldots f(x)dx^n = F(x) - F(x_0)\,\frac{(x-x_0)}{1}F'(x_0) - \frac{(x-x_0)^2}{1.2}F''(x_0)\ldots - \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2.3...(n-1)}F^{(n-1)}(x_0),$$

und wenn man $x_0 = 0$ setzt:

$$\int_{0}^{x}\int_{0}^{x}\int_{0}^{x} \ldots f(x)dx^n = F(x) - F(0) - \frac{x}{1}F'(0) - \frac{x^2}{1.2}F''(x_0)\ldots - \frac{x^{n-1}}{1.2.3...(n-1)}F^{(n-1)}(0).$$

Beispiel. Es sei $F(x) = e^x$, so hat man:

$$f(x) = F^{(n)}(x) = e^x$$

und folglich:

$$\int_{0}^{x}\int_{0}^{x}\ldots e^x\,dx^n = e^x - 1 - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{1.2}\ldots - \frac{x^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} = \int_{0}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3...(n-1)}e^z dz.$$

§. 66. Analytische Anwendungen. Diese Anwendungen sind von zweierlei Art, und bestehen in der Auflösung zweier Aufgaben, wovon die eine bereits gelöst ist und darin besteht: die Function y zu finden, deren Differenzial der ersten oder der n^{ten} Ordnung $f(x)dx$ oder $f(x)dx^n$ ist, während die zweite Aufgabe darin besteht: die Reihenentwickelungen beliebiger Functionen von x oder von $x+h$ zu finden, welche nach den ganzen Potenzen von x oder von h fortschreiten, und zugleich die Reste dieser Reihen anzugeben.

Auflösung der zweiten Aufgabe. Wir wollen die beiden Gleichungen in §. 62:

$$F(x) = F(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1}F'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}F''(x_0) + \ldots\ldots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2.3...(n-1)}F^{(n-1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3...(n-1)}F^{(n)}(z)\,dz,$$

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \frac{x^2}{1.2}F''(0) + \ldots\ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3...(n-1)}F^{(n-1)}(0) + \int_{0}^{x}\frac{(x-z)^{(n-1)}}{1.2.3...(n-1)}F^{(n)}(z)\,dz$$

wieder betrachten, worin wir für $f(z)$ seinen Werth $F^{(n)}(z)$ ge-

setzt haben. Wenn man in der ersten dieser Gleichungen $x = x_0 + h$ und dann x für x_0 setzt, oder wenn man in der zweiten, nachdem man $F(x+h)$ für $F(x)$ gesetzt hat, x in h und umgekehrt verwandelt; so erhält man:

$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(x) + \int_x^{x+h} \frac{F^{(n)}(x+h-s)\,dz}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Das letzte Glied im zweiten Theile dieser Gleichung läßt sich auf verschiedene Formen bringen; denn nach dem Frühern hat man:

$$\int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n)}(x+z)\,dz = \int_0^h \frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n)}(x+h-z)\,dz$$
$$= \int_x^{x+h} \frac{(x+h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n)}(z)\,dz$$
$$= \int_0^h \int_0^h \ldots F^{(n)}(x+z)\,dz^n.$$

Die Gleichung, welche $F(x+h)$ giebt, kann man auch direct durch der theilweise Integration erhalten. Denn wenn man in der bereits angeführten Gleichung:

$$\int_{x_0}^{X} f(z)\,dz = \int_0^{X-x_0} f(X-z)\,dz = \int_0^{X-x_0} f(z+x_0)\,dz$$

$x_0 + h$ für X und dann x für x_0 setzt; so erhält man:

$$\int_0^h f(x+z)\,dz = \int_0^h f(x+h-z)\,dz,$$

und folglich:

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^h F'(x+z)\,dz = \int_0^h F'(x+h-z)\,dz.$$

Integrirt man ferner mehrere Male theilweise, so findet man:

$$\int F'(x+h-z)\,dz = \frac{z}{1} F(x+h-z) + \int \frac{z}{1} F''(x+h-z)\,dz$$
$$= \frac{z}{1} F'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2} F''(x+h-z) + \int \frac{z^2}{1.2} F'''(x+h-z) + \ldots$$
$$= \frac{z}{1} F'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2} F''(x+h-z) + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(x+h-z) + \int \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n)}(x+h-z)\,dz;$$

woraus folgt, wenn zwischen den Grenzen $z=0$, $z=h$ integrirt wird und die Functionen:

$$F(x+z),\ F'(x+z),\ \ldots,\ F^{(n)}(x+z)$$

stetig bleiben:

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)\ldots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x)+\int_0^h\frac{z^{n-1}}{1.2..(n-1)}F^{(n)}(x+h-z)\,dz.$$

Vermöge der Gleichung (§. 38):

$$\int_{x_0}^{X}\varphi(x)\chi(x)dx=\varphi(\xi)\int_{x_0}^{X}\chi(x)\,dx$$

hat man:

$$\int_0^h\frac{(h-z)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n)}(x+z)\,dz=F^{(n)}(x+\vartheta h)\int_0^h\frac{(h-z)^{n-1}dz}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$=\frac{h^n}{1.2.3..n}F^{(n)}(x+\vartheta h),$$

$$\int_0^x\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}F^{(n)}(z)dz=F^{(n)}(\vartheta x)\int_0^x\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}\,dz$$
$$=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\vartheta x),$$

und man erhält die Gleichungen:

$$F(x)=F(0)+\frac{x}{1}F'(0)+\ldots$$
$$+\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{1.2.3..n}F^{(n)}(x+\vartheta h),$$

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots$$
$$+\frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x)+\frac{h^n}{1.2.3..n}F^{(n)}(x+\vartheta h),$$

welche bereits in der Differenzialrechnung abgeleitet sind und auf die Taylorsche und Maclaurinsche Reihe führen, welche folglich convergent sind und die Functionen $F(x+h)$, $F(x)$ zur Summe haben, so oft die beiden Integrale:

$$\int_0^x\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(z)dz=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(\vartheta x),$$
$$\int_0^h\frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n)}(x+z)dz=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}F^{(n)}(x+\vartheta h)$$

für zunehmende Werthe von n gegen die Grenze Null convergiren. Die Integralrechnung, welche, wie wir eben gesehen haben, wieder auf die Taylorsche und Maclaurinsche Reihe führt, gewährt den Vortheil, daß sie den bestimmten Werth des Restes dieser Reihen unter der Form eines bestimmten Integrales giebt, und folglich auch den Ausdruck des Fehlers, welchen man begeht, wenn man bei einem bestimmten Gliede der Reihe stehen bleibt.

Elfte Vorlesung.

Geometrische Anwendungen des ersten Theiles der Integralrechnung. — Rectification ebener Curven.

---

§. 67. Die geometrischen Anwendungen zerfallen ebenfalls in zwei verschiedene Arten: 1) man soll eine Curve construiren, welche so beschaffen ist, daß die Tangente in irgend einem ihrer Puncte mit der Axe der x einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente durch eine gegebene Function $f(x)$ ausgedrückt wird. Dieses ist der geometrische Ausdruck der bereits in der Differenzialrechnung gelösten Aufgabe, welche darin besteht, den allgemeinen Werth von y zu finden, welcher einer der Gleichungen:

$$dy = f(x)\,dx, \quad \frac{dy}{dx} = f(x)$$

genügt. Wir werden später sehen, wie man in allen Fällen die Curve durch Puncte construiren kann, wenn man sie als ein Vieleck von unendlich vielen unendlich kleinen Seiten betrachtet.

2) Man verlangt die Länge eines Curvenbogens, oder die von einer Curve eingeschlossene ebene, oder krumme Fläche, oder das Volumen eines von einer krummen Fläche eingeschlossenen Körpers.

Allgemeine Auflösung. Nach dem bereits früher Gesagten ist einleuchtend, daß, wenn das Differenzial oder der unendlich kleine Zuwachs dieses Bogens, dieser Fläche, oder dieses Volumens, welches dem unendlich kleinen Zuwachse der Veränderlichen x entspricht, durch eine Gleichung von der Form:

$$du = \mathrm{F}(x)\,dx$$

gegeben ist, und wenn dieser Bogen, diese Fläche, oder dieses Volumen, welche wir mit u bezeichnen wollen, in dem Sinne der x durch zwei feste Ebenen $x = x_0$, $x = \mathrm{X}$, oder durch eine feste Ebene $x = x_0$ und eine bewegliche Ebene $x = x$ begrenzt werden, u durch folgende Gleichungen gegeben wird:

$$u = \int_{x^0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}(x)\,dx, \quad \text{oder} \quad u - u_0 = \int_{x_0}^{x} \mathrm{F}(x)\,dx.$$

§. 68. Betrachten wir zunächst eine durch eine Gleichung

$f(x,y)=0$ zwiſchen zwei rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückte ebene Curve, oder eine durch zwei Gleichungen:

$$f(x,y,z)=0,\quad F(x,y,z)=0$$

zwiſchen drei Coordinaten ausgedrückte Curve von doppelter Krümmung, und auf dieſer Curve einen Bogen S, welcher zwiſchen einem feſten Puncte A und dem beweglichen Puncte, deſſen Abſciſſe x iſt, liegt; ſo hat man, wenn S dieſen Bogen und τ den ſpitzen Winkel bezeichnet, welchen die Tangente der Curve mit der Axe der x bildet:

$$dS=\pm\sec\tau\,dx,$$

wo das Zeichen + genommen werden muß, wenn der Bogen S mit der Abſciſſe x zugleich wächſt und das Zeichen — im entgegengeſetzten Falle. Alsdann wird der zwiſchen den beiden feſten Ebenen $x=x_0$, $x=X$, oder zwiſchen der feſten Ebene $x=x_0$ und der beweglichen Ebene $x=x$ liegende Theil dieſes Bogens durch die Gleichungen:

$$S-S_0=\int_{x_0}^{X}\sec\tau\,dx,\text{ oder }S-S_0=\int_{x_0}^{x}\sec\tau\,dx$$

gegeben.

Werden die Bogen von dem Puncte aus gezählt, deſſen Abſciſſe x_0 iſt; ſo hat man:

$$S_0=0,\quad S=\pm\int_{x_0}^{X}\sec\tau\,dx,\text{ oder }S=\pm\int_{x_0}^{x}\sec\tau\,dx.$$

Ferner hat man für eine ebene Curve:

$$\sec\tau=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+y'^2},$$

und für eine Curve von doppelter Krümmung:

$$\sec\tau=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

wo man bei der Berechnung von $dS=\pm\sec\tau\,dx$ aus der Gleichung, oder aus den Gleichungen der Curve die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ oder von $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ ableiten und in die Werthe von $\sec\tau$ ſubſtituiren muß.

Zuſatz 1. Wenn die Neigung τ conſtant wird, ſo hat man:

$$S=\pm\int_{x_0}^{x}\sec\tau\,dx=\pm\sec\tau\int_{x_0}^{x}dx=\pm(x-x_0)\sec\tau,$$

und wenn folglich eine Linie in allen ihren Puncten gegen die Axe der x dieſelbe Neigung hat; ſo iſt eine auf dieſer Linie genommene Länge gleich dem Producte aus ihrer eigenen Projection auf die Axe der x und aus der Secante der Neigung. Dieſes findet ſtatt, wenn ſich die Curve auf eine gerade Linie, oder auf

eine auf einem Cylinder, deſſen Axe die Axe der x iſt, beſchriebene Schraubenlinie reducirt.

Zuſatz 2. Wenn man die Normale der Curve mit N bezeichnet, ſo hat man:

$$N = \pm \sec\tau \times y, \quad \sec\tau = \pm\frac{N}{y}$$

und folglich:

$$S = \pm\int_{x_0}^{X} \frac{N}{y}\,dx.$$

Zuſatz 3. Das Integral:

$$\int_{x_0}^{X} \sec\tau\,dx$$

iſt bekanntlich dem Producte aus der Differenz $X - x_0$ der Grenzen und aus $\sec T$ gleich, wo T ein Mittel zwiſchen den verſchiedenen Werthen der Neigung τ bezeichnet. Man hat alſo:

$$S = (X - x_0)\sec T \text{ und } \frac{S}{X - x_0} = \sec T,$$

d. h., das Verhältniß des Bogens einer Curve zu ſeiner Projection auf eine Axe iſt ein Mittel zwiſchen den Secanten der verſchiedenen Neigungen des Bogens gegen dieſelbe Axe, wobei vorausgeſetzt wird, daß der Curvenbogen von den auf der Axe der x ſenkrechten Ebenen zwiſchen den Grenzen x_0, X nur einmal geſchnitten wird.

§. 65. Beiſpiel 1. Für den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ hat man:

$$N = r, \quad S = \pm r\int\frac{dx}{y} = \int\frac{r\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$$S = r\left[\arcsin\frac{x}{r} - \arcsin\frac{x_0}{r}\right].$$

Beiſpiel 2. Für die Ellipſe:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hat man:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0, \quad y'^2 = \frac{b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)},$$

$$\sec\tau = \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}},$$

oder wenn man die Excentricität mit e bezeichnet:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; \quad \sec\tau = \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}.$$

Wenn man $x_0 = 0$, $x = a$ ſetzt, und folglich S den zwiſchen den Endpuncte der kleinen und der großen Axe liegenden Bogen der Ellipſe oder den vierten Theil ihres Umfanges bezeichnet; ſo iſt man:

$$S=\int_0^a dx\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}},$$

oder wenn man $x=az$ setzt:

$$S=a\int_0^1 dz\sqrt{\frac{1-e^2z^2}{1-z^2}}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich nur durch Reihen integriren. Wenn man $x=a\cos\varphi$ gesetzt hätte, so hätte man für den von $x=x_0$ bis $x=x$ genommenen Bogen:

$$S=-a\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi},$$

und folglich für den vierten Theil S′ des Umfanges der Ellipse:

$$S'=a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}.$$

Nun hat man aber:

$$\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}=(1-e^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$$
$$=1-\frac{e^2}{2}\cos^2\varphi-\frac{1}{2}\frac{e^4}{4}\cos^4\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{e^6}{6}\cos^6\varphi-\text{etc},$$

welches eine sehr convergente Reihe ist, weil die Größe e, und um so mehr die Größe $e^2\cos^2\varphi$ kleiner als die Einheit ist. Es ist also:

$$S'=a\pi-\frac{e^2}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi-\frac{1}{2}\frac{e^4}{4}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi$$
$$-\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{e^6}{6}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi d\varphi+\text{etc.};$$

aber in §. 42 haben wir gefunden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\varphi d\varphi=\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6.....2n}\frac{\pi}{2},$$

folglich ist:

$$S'=\frac{a\pi}{2}\left[1-\left(\frac{e}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}e^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2-\frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^4\right)^2-\text{etc.}\right].$$

Der ganze Umfang P der Ellipse wird also durch folgende Formel ausgedrückt:

$$P=2a\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2-\text{etc.}\right].$$

Die Producte der Reihe im zweiten Theile dieser Gleichung, welche zwischen den Klammern stehen, sind die Quadrate der entsprechenden Glieder der Entwickelung:

$$(1-e)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}e+\frac{1.3}{2.4}e^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^4+\text{etc}.$$

Man kann die Länge des Bogens einer Ellipse noch auf folgende andere Art berechnen: Die Gleichung:

$$\sec^2\tau = \frac{1}{\cos^2\tau} = \frac{e^2x^2 - a^2}{x^2 - a^2}$$

giebt:

$$x^2 = \frac{a^2(1-\cos^2\tau)}{1-e^2\cos^2\tau},\quad x = \pm\frac{a\sin\tau}{\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}},$$

$$dx = \pm\frac{a(1-e^2)\cos\tau\,d\tau}{(1-e^2\cos^2\tau)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bezeichnet also τ_0 den Werth von τ, welcher x_0 entspricht und wird der Bogen wieder von $x = x_0$ aus gezählt, so hat man, wenn man annimmt, daß der Bogen mit der Neigung wächst:

$$S = \int_{x_0}^{x} \sec\tau\,dx = a(1-e^2)\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{(1-e^2\cos^2\tau)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bezeichnet φ wieder den Winkel, welcher durch die Gleichung $x = a\cos\varphi$ bestimmt wird, so ist, wenn $\cos\varphi$ positiv ist, φ mit τ durch die Gleichung:

$$\cos\varphi = \frac{\sin\tau}{\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}}$$

verbunden, woraus folgt:

$$1 - \cos^2\varphi - \cos^2\tau + e^2\cos^2\varphi\cos^2\tau = 0,$$

$$d(e^2\cos\varphi\cos\tau) = d\left[\frac{(e^2\cos\tau\sin\tau)}{\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}}\right]$$

$$= -\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}\,d\tau + \frac{(1-e^2)\,d\tau}{(1-e^2\cos^2\tau)^{\frac{3}{2}}},$$

also, wenn man von $\tau = \tau_0$ an integrirt:

$$(1-e^2)\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{(1-e^2\cos^2\tau)^{\frac{3}{2}}} = \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}$$
$$+ e^2(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0),$$

und endlich:

$$S = a(1-e^2)\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{(1-e^2\cos^2\tau)^{\frac{3}{2}}} = ae^2(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0)$$
$$+ a\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}.$$

Wenn man diese Gleichung, welche $\tau > \tau_0$ voraussetzt, mit der weiter oben gefundenen:

$$S = a\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}$$

vergleicht; so sieht man, daß das Integral:

$$a\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}$$

den Bogen ausdrückt, welcher zwiſchen den den Abſciſſen:

$$x = a\cos\tau_0,\ x = a\cos\tau$$

entſprechenden Puncten der Ellipſe liegt. Bezeichnet man alſo dieſen Bogen mit ς, ſo hat man:

$$S = ae^2(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0) + \varsigma,$$
$$S - \varsigma = ae^2(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0).$$

Wenn x_0, x, ξ_0, ξ die Abſciſſen der Endpuncte der Bogen S und ς bezeichnen, ſo hat man:

$$x_0 = a\cos\varphi_0,\ x = a\cos\varphi,\ \xi_0 = a\cos\tau_0,\ \xi = a\cos\tau,$$

und folglich:

$$S - \varsigma = e^2\frac{x\xi - x_0\xi_0}{a}.$$

Der durch die Gleichung $\cos\varphi = \frac{a}{x}$ beſtimmte Winkel iſt genau derjenige Winkel, welcher der vom Anfangspuncte nach dem Puncte, worin die der Abſciſſe x entſprechende Ordinate den über der großen Axe der Ellipſe als Durchmeſſer beſchriebenen Kreis trifft, gezogene Radiusvector mit der Halbaxe der poſitiven x bildet, während τ wieder den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente mit der Axe der x bildet. Aus der Gleichung:

$$S - \varsigma = e^2\frac{x\xi - x_0\xi_0}{a}$$

folgt alſo, daß man den Unterſchied zweier Bogen einer Ellipſe unter endlicher Form ausgedrückt erhalten kann, wenn dieſe Bogen ſo beſchaffen ſind, daß die Neigungen der durch die Endpuncte des einen dieſer Bogen gezogenen Tangenten reſp. den Neigungen der beiden Radienvectoren gleich ſind, welche vom Mittelpuncte der Ellipſe nach den Puncten gezogen ſind, wo der über der großen Axe als Durchmeſſer beſchriebene Kreis von den den Endpuncten des zweiten Bogens entſprechenden Ordinaten geſchnitten wird.

Setzt man $\tau = 0$, ſo hat man:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2},\ x_0 = 0,\ S - \varsigma = \frac{e^2x\xi}{a},$$

wodurch der von Fagnano entdeckte Lehrſatz ausgedrückt wird. Wenn man für $\cos\varphi$, $\cos\tau$ ihre Werthe $\frac{x}{a}$, $\frac{\xi}{a}$ in die Gleichung:

$$1 - \cos^2\varphi - \cos^2\tau + e^2\cos^2\varphi\cos^2\tau = 0$$

ſubſtituirt, ſo erhält man die Gleichung:

$$a^4 - a^2(x^2 + \xi^2) + e^2x^2\xi^2 = 0,$$

welcher die Abſciſſen x und ξ folglich immer genügen müſſen.

Beiſpiel 3. Wenn die Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben ist, und man setzt $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$; so findet man:

$$S = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx,$$

und wenn man $x = \frac{a}{\cos\varphi}$ setzt:

$$S = a\int_{\varphi_0}^{\varphi} (e^2-\cos^2\phi)^{\frac{1}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

woraus folgt, wenn man in eine Reihe entwickelt und integrirt:

$$S = ae(\tang\varphi - \tang\varphi_0) - \frac{a}{2e}(\varphi-\varphi_0) - \frac{1}{2}\frac{a}{4e^3}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\cos^2\phi d\phi$$
$$- \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{a}{6e^5}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\cos^4\phi d\phi - \text{etc.}$$

Die Gleichung der Asymptoten ist $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, und folglich wird die auf der Asymptote zwischen dem Anfangspuncte und dem der Abscisse x entsprechenden Puncte liegende Länge l ausgedrückt durch:

$$l = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+\frac{b^2x^2}{a^2}} = x\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$$

oder durch:

$$l = ex = \frac{\cos\varphi}{ae},$$

und wenn man bemerkt, daß:

$$\frac{1}{\cos\varphi} - \tang\phi = \frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}$$

ist, so findet man, wenn man $\varphi_0 = 0$ setzt:

$$l - s = ae\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} + \frac{a}{2e}\phi + \frac{1}{2}\frac{a}{4e^3}\int_0^{\varphi}\cos^2\phi d\phi$$
$$+ \frac{1.3}{2.4}\frac{a}{6e^5}\int_0^{\varphi}\cos^4\phi d\phi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{a}{8e^7}\int_0^{\varphi}\cos^6\phi d\phi + \text{etc.}$$

Setzt man nun $\phi = \frac{\pi}{2}$, welches $x = \infty$ voraussetzt; so kommt:

$$l - s =$$
$$ae + \frac{a\pi}{4e}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{e^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{e^3}\right)^3 + \ldots\right].$$

Dieser Ausdruck giebt den Unterschied zwischen zwei sehr beträchtlichen Längen, wovon die erste auf der Asymptote vom Anfangspuncte aus und die zweite auf der Hyperbel vom Scheitel aus gezählt ist, indem ihre Endpuncte derselben Abscisse entsprechen.

Beispiel 4. Für die Parabel $y^2 = 2px$ hat man:

$$yy' = px,\ y' = \frac{p}{y} = \pm\sqrt{\frac{p}{2x}},$$

$$\sec\tau = \sqrt{1+\frac{p}{2x}},\ S = \int_{x_0}^{x} dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}},$$

und wenn man setzt:

$$\sqrt{1+\frac{p}{2x}} = t,$$

so findet man:

$$x = \frac{p}{2(t^2-1)},$$

$$\int dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}} = \int t\,dx = tx - \int x\,dt = tx - \frac{p}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}$$

$$= tx - \frac{p}{2}\,l\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + C.$$

Setzt man nun der Kürze wegen $x_0 = 0$, so hat man:

$$S = x\sqrt{1+\frac{p}{2x}} - \frac{p}{2}\,l\left(\frac{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}-1}{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}+1}\right),$$

welches der Ausdruck des Werthes des Parabelbogens ist, welcher zwischen dem Scheitel und dem der Abscisse x entsprechenden Puncte liegt.

Beispiel 5. Für die die logarithmische Spirale $y = al.x$ hat man:

$$y' = \frac{a}{x},\ x = \frac{a}{y'} = a\cot\tau,\ dx = -a\frac{d\tau}{\sin^2\tau},$$

$$S = -a\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{d\tau}{\cos\tau\sin^2\tau},$$

ferner:

$$\frac{1}{\cot\tau\sin^2\tau} = \frac{\cos^2\tau+\sin^2\tau}{\cos\tau\sin^2\tau} = \frac{\cos\tau}{\sin^2\tau} + \frac{1}{\cos\tau},$$

$$\int\frac{\cos\tau\,d\tau}{\sin^2\tau} = -\frac{1}{\sin\tau} + C,$$

$$\int\frac{d\tau}{\cos\tau} = l\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right) + C$$

und folglich:

$$S = a\left[\left(\frac{1}{\sin\tau}-\frac{1}{\sin\tau_0}\right) - l\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right) + l\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau_0}{2}\right)\right].$$

Beispiel 6. Für die Kettenlinie:

$$y = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

findet man, wenn man $x_0 = 0$ setzt, d. h. den Bogen von dem tiefsten Puncte aus zählt:

$$S = \int_0^x \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2} dx = a \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2} = ay'.$$

Dieser Bogen ist folglich der trigonometrischen Tangente der seinem Endpuncte entsprechenden Neigung proportional. Da man ferner hat:

$$y' = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2},$$

$$ay' = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{a}{2}\sqrt{e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} - 2}$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2\right) - 4}$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 - 4} = \sqrt{\frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 - a^2}$$

$$= \sqrt{y^2 - a^2},$$

so ist auch:

$$S = \sqrt{y^2 - a^2}.$$

Der vom tiefsten Puncte der Kettenlinie aus gezählte Bogen ist folglich die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Hypotenuse y und dessen andere Kathete a ist.

Beispiel 7. Endlich sei die Cycloide:

$$x = R \arccos \frac{R - y}{R} - \sqrt{2R - y^2}$$

gegeben.

Wenn man in der Gleichung:

$$S = \int_{x_0}^{x} \sec \tau \, dx$$

y für x setzt, so muß man zu gleicher Zeit $\frac{\pi}{2} - \tau$ für τ setzen, und man hat folglich:

$$dS = \pm \operatorname{cosec} \tau \, dy;$$

$$S - S_0 = \pm \int_{y_0}^{y} \operatorname{cosec} \tau \, dy = \pm \int_{y_0}^{y} dy \sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}}$$

oder wenn man den Bogen von $y = y_0$ aus zählt und $y_0 < y$ setzt:

$$S = \int_{y_0}^{y} \operatorname{cosec} \tau \, dy = \int_{y_0}^{y} dy \sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}}.$$

Für die Cycloide hat man:

$$dx = \sqrt{\frac{y}{2R-y}}\,dy,\quad y' = \sqrt{\frac{2R-y}{y}},\quad 1+\frac{1}{y'^2} = \frac{2R}{2R-y}$$

und wenn man den Bogen von $y=0$ aus zählt, oder von dem Rückkehrpuncte aus; so erhält man:

$$S = \sqrt{2R}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{2R-y}} = 2\sqrt{2R}\,(\sqrt{2R}-\sqrt{2R-y}),$$

$$4R - S = 2\sqrt{2R(2R-y)}.$$

Um die halbe Cycloide zu erhalten, muß man $y=2R$ setzen, welches $S=4R$ giebt, und das Doppelte dieses Werthes oder $8R$ ist folglich die Länge eines ganzen Cycloidenbogens.

Zwölfte Vorlesung.

Wenn die Relation gegeben ist, welche zwischen dem Bogen einer Curve und einer der Coordinaten seines Endpunctes statt findet, die Gleichung der Curve zu finden.

---

§. 70. Wir haben gesehen, daß man, wenn eine Curve durch ihre Gleichung gegeben ist, die zwischen einem beliebigen Bogen derselben und den Coordinaten seines Endpunctes stattfindende Relation unter endlicher Form, oder durch Reihenentwickelungen erhalten kann, so daß man die Länge des zwischen zwei gegebenen Puncten der Curve liegenden Bogens genau, oder mit einem beliebigen Grade von Annäherung berechnen kann.

Man kann sich aber auch die umgekehrte Aufgabe stellen: Wenn die Relation gegeben ist, welche zwischen dem Bogen einer gewissen Curve und einer der Coordinaten seines Endpunctes stattfindet, die Gleichung dieser Curve zu finden.

Auflösung. Es sei $s = \varphi(x)$ die zwischen dem Bogen s und der Abscisse x seines Endpunctes gegebene Relation, so hat man:

$$ds = \varphi'(x)dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad dy = dx\sqrt{[\varphi'(x)]^2 - 1},$$

und folglich:

$$y = \int dx \sqrt{[\varphi'(x)]^2 - 1} + C.$$

Die Integration wird nach Beschaffenheit der Form der Function $\varphi(x)$ mehr oder weniger leicht sein, und sie wird in vielen Fällen erleichtert, wenn man statt der unabhängigen Veränderlichen x den Winkel $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \tau$ nimmt, welchen die Tangente der Curve mit der Axe der y bildet. Dieser Winkel ist mit den Coordinaten x, y offenbar durch folgende Gleichungen verbunden:

$$dy = \operatorname{tang}\tau\, dx = \cot\vartheta\, dx, \quad dx = ds \sin\vartheta, \quad dy = ds\cos\vartheta.$$

Außerdem ist, wie wir gesehen haben:

$$dx = \frac{ds}{\varphi'(s)},$$

und folglich:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sin \vartheta} = \operatorname{cosec} \vartheta.$$

Hieraus folgt:

$$x = \psi(\operatorname{cosec} \vartheta), \quad dx = -\psi'(\operatorname{cosec} \vartheta) \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta,$$

$$y = -\int \psi'(\operatorname{cosec} \vartheta) \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin^3 \vartheta} d\vartheta + C,$$

und wenn man zwischen dieser Gleichung und der, welche den Werth von x giebt, ϑ eliminirte; so erhielte man die verlangte Gleichung:

$$F(x, y) = 0.$$

Ferner wird der Bogen der Curve und ihr Krümmungshalbmesser resp. ausgedrückt durch:

$$s = \varphi(x) = \varphi[\psi(\operatorname{cosec} \vartheta)] = f(\operatorname{cosec} \vartheta),$$

$$\rho = \pm \frac{ds}{dx} = \mp \frac{ds}{d\vartheta} = \pm \frac{\operatorname{cosec}^2 \vartheta \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \vartheta - 1}}{\psi(\operatorname{cosec} \vartheta)},$$

oder:

$$\rho = \pm \frac{ds^3}{dx d^2 y} = \pm \frac{[\varphi'(x)]^3}{\varphi''(x)} \sqrt{[\varphi'(x)]^2 - 1}.$$

Beispiel 1. Der Bogen s sei mit der Abscisse x durch die Gleichung:

$$s^2 = px, \quad s = \sqrt{px};$$

verbunden, so hat man:

$$\frac{dx}{ds} = \sin \vartheta = \frac{2\sqrt{px}}{p}, \quad x = \frac{p \sin^2 \vartheta}{4}, \quad dx = \frac{p \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta}{2},$$

$$s = \frac{p}{2} \sin \vartheta, \quad dy = \frac{p}{2} \cos^2 \vartheta d\vartheta, \quad y = \frac{p}{2} \int \cos^2 \vartheta d\vartheta + C.$$

Integrirt man von $\vartheta = 0$, $y = 0$ an und setzt:

$$p = 8R, \quad 2\vartheta = \omega,$$

so findet man endlich:

$$y = R(\omega + \sin \omega), \quad x = R(1 - \cos \omega).$$

Diese beiden Gleichungen drücken eine Cycloide aus, deren Erzeugungskreis einen Halbmesser $= R$ hat. Wenn man also von dem Scheitel der Cycloide aus eine Parabel beschreibt, deren Parameter dem vierfachen Durchmesser des Erzeugungskreises der Cycloide gleich ist; so sind die Bogen der Cycloide den entsprechenden Ordinaten der Parabel gleich. Diese Relation zwischen den beiden Curven darf sich nicht über den Brennpunct hinaus erstrecken,

weil die Ordinaten der Cycloide für größere Werthe von x als $2R$ imaginär werden. Zu demselben Resultate gelangt man auch, wenn man bemerkt, daß der Bogen s der Cycloide durch:

$$s = 2\sqrt{2Rx}, \quad \text{oder} \quad s^2 = 8Rx,$$

ausgedrückt wird, welches die Gleichung einer Parabel von dem Parameter $8R$ ist.

Beispiel 2. Die Gleichung, welche den Bogen mit der Abscisse verbindet, sei die Gleichung:

$$s^{m+n} = p^n x^m$$

einer Parabel vom $(m+n)^{\text{ten}}$ Grade, so hat man:

$$(m+n)s^{m+n-1}\,ds = mp^n x^{m-1}\,dx,$$

$$\frac{dx}{ds} = \sin\vartheta = \frac{(m+n)s^{m+n-1}}{mp^n x^{m-1}} = \frac{(m+n)x}{ms} = \frac{m+n}{m}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{n}{m+n}},$$

$$\cos\vartheta = \left[1 - \left(\frac{m+n}{m}\right)^2\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{2n}{m+n}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

und wenn man setzt:

$$q = p\left(\frac{m}{m+n}\right)^{\frac{m}{n}}, \quad x = \frac{m}{m+n}q\sin^{\frac{m+n}{n}}\vartheta, \quad s = q\sin^{\frac{m}{n}}\vartheta;$$

so ist: $dx = \frac{mq}{n}\sin^{\frac{m}{n}}\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta,$

$$dy = \frac{mq}{n}\sin^{\frac{m}{n}-1}\vartheta\cos^2\vartheta\,d\vartheta = q\cos\vartheta\,d\sin^{\frac{m}{n}}\vartheta.$$

Für den Werth des Krümmungshalbmessers findet man ferner:

$$\rho = \pm\frac{mq}{n}\sin^{\frac{m-n}{n}}\vartheta\cos\vartheta.$$

Wir wollen den besondern Fall betrachten, wo $n=1$ ist, die Parabel von der $(m+1)^{\text{ten}}$ Ordnung und ihre Gleichung folgende ist:

$$s^{m+1} = px^m;$$

so ist $q = p\left(\frac{m}{m+1}\right)^m$ und man hat:

$$s = q\sin^m\vartheta, \quad ds = mq\sin^{m-1}\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta,$$

$$x = \frac{m}{m+1}q\sin^{m+1}\vartheta, \quad dx = mq\sin^m\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta,$$

$$\sin\vartheta = \frac{m+1}{m}\left(\frac{s}{p}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \cos\vartheta = \left[1 - \left(\frac{m+1}{m}\right)^2\left(\frac{s}{p}\right)^{\frac{2}{m}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

und:

$$dy=\frac{\left[1+\left(\frac{m+1}{m}\right)^2\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{2}{m+1}}\right]^{\frac{1}{2}}dx}{\frac{m+1}{m}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{m+1}}}$$

$$=q\cos\vartheta d\sin^m\vartheta=mq\sin^{m-1}\vartheta\cos^2\vartheta d\vartheta,$$

$$\rho=\pm mq\sin^{m-1}\vartheta\cos\vartheta.$$

Die theilweiſe Integration giebt:

$$y=q\left(\sin^m\vartheta\cos\vartheta+\int\sin^{m+1}\vartheta d\vartheta\right)+C.$$

Ferner iſt (§. 30), wenn man $m+1=\mu$ ſetzt:

1) wenn μ eine ungerade Zahl iſt:

$$\int\sin^{m+1}\vartheta d\vartheta=\int\sin^\mu\vartheta d\vartheta$$

$$=-\frac{\cos\vartheta}{\mu}\left[\sin^{\mu-1}\vartheta+\frac{\mu-1}{\mu-2}\sin^{\mu-3}\vartheta+\ldots\frac{2.4\ldots(\mu-3)(\mu-1)}{1.3\ldots(\mu-4)(\mu-2)}\right];$$

und 2) wenn μ eine gerade Zahl iſt:

$$\int\sin^{m+1}\vartheta d\vartheta=\int\sin^\mu\vartheta d\vartheta$$

$$=-\frac{\cos\vartheta}{\mu}\left[\sin^{\mu-1}\vartheta+\frac{\mu-1}{\mu-2}\sin^{\mu-3}\vartheta\ldots+\frac{3.5\ldots(\mu-3)(\mu-1)}{2.4\ldots(\mu-4)(\mu-2)}\sin\vartheta\right]$$

$$+\frac{1.3\ldots(\mu-3)(\mu-1)}{2.4\ldots(\mu-2)\mu}\vartheta+C.$$

Vermittelſt dieſer beiden Formeln gelangt man unmittelbar zu den Relationen, welche zwiſchen den beiden Coordinaten x, y und dem Winkel ϑ ſtattfinden, und folglich zu der Gleichung $F(x,y)=0$ der geſuchten Curve.

Es ſei $m=2$, ſo iſt die Parabel von der dritten Ordnung, wird durch die Gleichung $s^3=px^2$ ausgedrückt, und man hat:

$$q=\frac{4}{9}p,\quad x=\frac{2q}{3}\sin^3\vartheta,\quad s=q\sin^2\vartheta,$$

$$dy=2q\sin\vartheta\cos^2\vartheta d\vartheta,\quad y=-\frac{2q}{3}\cos^3\vartheta+C.$$

Aber wenn $\vartheta=0$ iſt, ſo iſt auch $y=0$; folglich:

$$C=\frac{2q}{3},\quad y=\frac{2}{3}q(1-\cos^3\alpha).$$

Ferner iſt:

$$\rho=2q\sin\vartheta\cos\vartheta=q\sin 2\vartheta.$$

Um die Gleichung der Curve zwiſchen rechtwinkligen Coordinaten unter einer ſehr einfachen Form zu erhalten, wollen wir ſetzen:

$$\frac{2}{3}q-y=\eta,\quad x=\xi,\quad \frac{2}{3}q=\left(\frac{2}{3}\right)^3p=A;$$

so finden wir:

$$\xi = A\sin^3\vartheta, \quad \eta = A\cos^3\vartheta,$$

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{1}{3}} = \sin\vartheta, \quad \left(\frac{\eta}{A}\right)^{\frac{1}{3}} = \cos\vartheta,$$

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{A}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad \rho = 2q\left(\frac{\xi\eta}{A^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Dieses ist also die Gleichung der Curve, deren Bogen den Ordinaten einer cubischen Parabel gleich sind, und sie hat mit der Gleichung:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{A}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

der Evolute der Ellipse einige Aehnlichkeit, ohne daß sie sich jedoch daraus ableiten läßt, weil man in dieser letzten Gleichung nicht $A = B$ setzen kann, ohne daß zu gleicher Zeit $A = 0$, $B = 0$ wird.

Wenn man setzt:

$$m = 3, \quad s^4 = px^3, \quad q = (\tfrac{3}{4})^3 p, \quad (\tfrac{3}{4})^4 p = a,$$

so findet man:

$$s = q\sin^3\vartheta, \quad x = \tfrac{3}{4}q\sin^4\vartheta, \quad dy = 3q\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta d\vartheta,$$

und wenn man von $\vartheta = 0$, $y = 0$ aus integrirt:

$$y = \tfrac{1}{8}a(4\vartheta - \sin 4\vartheta).$$

Ferner hat man:

$$\sin\vartheta = \sqrt[4]{\frac{x}{a}}, \quad \vartheta = \arcsin\sqrt[4]{\frac{x}{a}},$$

$$x = \frac{a}{8}(3 - 4\cos 2\vartheta + 1 + \cos 4\vartheta),$$

und wenn man setzt:

$$x - \frac{a}{8}(3 - 4\cos 2\vartheta) = \xi, \quad 4\vartheta = \pi + \omega, \quad \eta = y - \frac{\pi a}{8}, \quad R = \frac{a}{8},$$

so ist: $\xi = R(1 - \cos\omega)$, $\eta = R(\omega + \sin\omega)$.

Wenn ξ nicht zugleich eine Function von x und ϑ wäre, so drückten die beiden Gleichungen eine Cycloide aus.

Ferner findet man, daß die Curve, deren Bogen durch die Ordinaten der Parabel des fünften Grades $s^5 = px^4$ ausgedrückt werden, folgende Gleichung hat:

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{5}} + \left(\frac{\eta}{A}\right)^{\frac{2}{5}} = 1,$$

worin η eine Function von ξ und ϑ ist, weshalb sie nicht als ein besonderer Fall der Gleichung:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{m}{n}} = 1$$

betrachtet werden kann.

Beiſpiel 3. Es ſei der Bogen s die Ordinate der Ellipſe:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{s^2}{b^2}=1,$$

ſo hat man:

$$\sin\vartheta=-\frac{a^2}{b^2}\frac{s}{x}=-\frac{a}{b}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x},\quad x=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2\sin^2\vartheta}},$$

$$s=\mp\frac{b^2\sin\vartheta}{\sqrt{a^2+b^2\sin^2\vartheta}},\quad dx=\mp\frac{a^2b^2\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta}{(a^2+b^2\sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$dy=\mp\frac{a^2b^2\cos^2\vartheta d\vartheta}{(a^2+b^2\sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wenn man dieſe letzte Gleichung integrirte und dann ϑ elimi-nirte, ſo erhielte man die Gleichung der geſuchten Curve; allein die Integration iſt unter endlicher Form nicht möglich und läßt ſich nur näherungsweiſe bewerkſtelligen, weshalb wir hier noch einige ziemlich elegante Transformationen mittheilen wollen.

Es ſei:

$$x=a\cos u,\quad s=b\sin u,$$

ſo iſt:

$$dx=-a\sin u du,\quad ds=b\cos u du,$$

$$\frac{dx}{ds}=\sin\vartheta=-\frac{a}{b}\frac{\sin u}{\cos u},\quad \cot\vartheta=-\frac{\sqrt{b^2\cos^2 u-a^2\sin^2 u}}{a\sin u},$$

und wenn man $c^2=\frac{a^2+b^2}{b^2}$ ſetzt:

$$dy=bdu\sqrt{1-c^2\sin^2 u}.$$

Das Integral dieſer letzten Gleichung drückt eine elliptiſche Function der zweiten Art aus und iſt reell, ſo lange der Winkel u der Bedingung $\sin u<\frac{1}{c}$ genügt.

Wenn $a=b$ iſt, ſo hat man:

$$dy=adu\sqrt{1-2\sin^2 u}=adu\sqrt{\cos 2u},$$

und das Integral iſt ſo lange reell, als $\sin u<\frac{1}{\sqrt{2}}$, alſo $u<45^0$ iſt,

Beiſpiel 4. Der Bogen s werde durch die Ordinate einer Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{s^2}{b^2}=1$$

ausgedrückt, ſo findet man in dieſem Falle:

$$\frac{dx}{ds}=\sin\vartheta=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x}},$$

$$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2\sin^2\vartheta}},\quad s=\frac{b^2\sin\vartheta}{\sqrt{a^2-b^2\sin^2\vartheta}},$$

$$dx = \frac{a^2b^2 \sin\vartheta \cos\vartheta d\vartheta}{(a^2 - b^2 \sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}, \quad dy = \frac{a^2b^2 \cos^2\vartheta d\vartheta}{(a^2 - b^2 \sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das Integral dieses letzten Ausdruckes ist wieder eine elliptische Function der zweiten Art, welche sich nur durch eine Reihenentwickelung erhalten läßt. Betrachten wir insbesondere den Fall, wo $a = b$ oder die Hyperbel gleichseitig ist, so haben wir:

$$x = \frac{a}{\cos\vartheta}, \quad dx = \frac{a \sin\vartheta d\vartheta}{\cos^2\vartheta}, \quad dy = \frac{ad\vartheta}{\cos\vartheta},$$

und wenn man von $\vartheta = 0$, $y = 0$ aus integrirt:

$$y = \frac{a}{2} \mathrm{l}\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right) = \frac{a}{2} \mathrm{l}\left(\frac{1+\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\right)^2 = a \mathrm{l} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\vartheta}{2}\right).$$

Geht man zu den Zahlen über, so findet man:

$$e^{\frac{y}{a}} = \frac{1+\sin\vartheta}{\cos\vartheta}.$$

Nun ist aber:

$$\cos\vartheta = \frac{a}{x}, \quad \sin\vartheta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x},$$

folglich:

$$a\left(e^{\frac{y}{a}} - x\right)^2 = x^2 - a^2, \quad y = a \mathrm{l} \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a},$$

und endlich:

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}}\right).$$

Aus dieser letzten Gleichung erhellet, daß die gesuchte Curve eine Kettenlinie ist.

Wenn man setzt:

$$x = \frac{a}{\cos u}, \quad s = b \operatorname{tang} u,$$

so leisten diese beiden Werthe der Gleichung der gegebenen Hyperbel Genüge, und man findet:

$$dy = \frac{du}{\cos^2 u} \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 u}.$$

Das Integral kann wieder nur durch eine Reihenentwickelung erhalten werden und ist nur so lange reell, als der Winkel u der Bedingung $\sin u < \frac{b}{a}$ genügt.

Beispiel 5. Für die Cycloide:

$$x = \mathrm{R}(1 - \cos\omega), \quad s = \mathrm{R}(\omega + \sin\omega),$$

oder:

$$s = \mathrm{R}\arcsin\frac{\sqrt{2\mathrm{R}x - x^2}}{\mathrm{R}} + \sqrt{2\mathrm{R}x - x^2},$$

hat man:

$$\frac{ds}{dx} = \varphi'(x) = \frac{\sqrt{2\mathrm{R} - x}}{x},\quad dy = \sqrt{2}\,dx\sqrt{\frac{\mathrm{R} - x}{x}},$$

und wenn man setzt:

$$\frac{y}{\sqrt{2}} = \eta,\quad x = \xi,\quad \mathrm{R} = 2\mathrm{R}',$$

so kommt:

$$d\eta = d\xi\sqrt{\frac{2\mathrm{R}' - \xi}{\xi}}.$$

Nun ist aber diese letzte Gleichung die Differenzialgleichung der Cycloide, deren Erzeugungskreis einen Halbmesser $\mathrm{R}' = \frac{\mathrm{R}}{2}$ hat. Um also die Curve zu zeichnen, deren Bogen durch die Ordinaten einer gegebenen Cycloide ausgedrückt werden, braucht man nur eine zweite Cycloide zu beschreiben, deren Erzeugungskreis einen halb so großen Halbmesser hat und die Ordinaten dieser zweiten Cycloide in dem Verhältnisse von $\sqrt{2}$ zu 1 zunehmen zu lassen.

Zu demselben Resultate würde man auch auf folgende Weise gelangen. Die Gleichungen:

$$x = \mathrm{R}(1 - \cos\omega),\quad s = \mathrm{R}(\omega + \sin\omega)$$

geben:

$$\sin\vartheta = \frac{dx}{ds} = \frac{\sin\omega}{1 + \cos\omega} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{x}{2\mathrm{R} - x}},$$

$$x = \frac{2\mathrm{R}\sin^2\vartheta}{1 + \sin^2\vartheta},$$

$$dx = \frac{4\mathrm{R}\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta}{(1 + \sin^2\vartheta)^2},\quad dy = \frac{4\mathrm{R}\cos^2\vartheta d\vartheta}{(1 + \sin^2\vartheta)^2},$$

und wenn man die Potenzen der Sinus und Cosinus in Sinus und Cosinus vielfacher Bogen verwandelt; so findet man:

$$x = \frac{2\mathrm{R}(1 - \cos 2\vartheta)}{3 - \cos 2\vartheta},\quad dy = \frac{8\mathrm{R}(1 + \cos 2\vartheta)}{(3 - \cos 2\vartheta)^2}d\vartheta.$$

Die Gleichung:

$$\sin\vartheta = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega$$

giebt:

$$\cos\vartheta d\vartheta = \frac{\frac{1}{2}d\omega}{\cos^2\frac{1}{2}\omega},$$

und folglich:

$$dy = 2\mathrm{R}d\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega\sqrt{\cos\omega}.$$

Setzt man:

$$\cos\omega = \cos^2\tfrac{1}{2}\omega',$$

woraus folgt:

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\sqrt{1-\cos^2\tfrac{1}{2}\omega'}}{2} = \frac{\sin\tfrac{1}{2}\omega'}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega d\omega = \frac{\cos\tfrac{1}{2}\omega' d\omega'}{\sqrt{2}},$$

so findet man endlich:

$$dy = R\sqrt{2}\cos^2\tfrac{1}{2}\omega' d\omega',$$

$$y = \sqrt{2}\frac{R}{2}(\omega' + \sin\omega'), \quad x = \frac{R}{2}(1-\cos\omega'),$$

und diese beiden Gleichungen drücken offenbar eine Curve aus, deren Ordinaten zu denen der Cycloide, deren Erzeugungskreis einen Halbmesser $= \frac{R}{2}$ hat, in dem Verhältnisse von $\sqrt{2}$ zu 1 stehen.

Man würde auch noch zu demselben Resultate gelangen, wenn man den zweiten Theil der Gleichung:

$$y = 4R\int \frac{(1+\cos 2\vartheta)}{(3-\cos 2\vartheta)^2} d.2\vartheta$$

integrirte; denn es ist:

$$\int \frac{(1+\cos 2\vartheta)d.2\vartheta}{(3-\cos 2\vartheta)^2} = \frac{4\sin 2\vartheta}{8(3-\cos 2\vartheta)} + \frac{4}{8}\int \frac{d.2\vartheta}{3-\cos 2\vartheta},$$

$$\int \frac{d.2\vartheta}{3-\cos 2\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{8}}\operatorname{arc\,sin}\frac{\sin 2\vartheta\sqrt{8}}{3-\cos 2\vartheta},$$

und folglich:

$$y = 2R\left(\frac{\sin 2\vartheta}{3-\cos 2\vartheta} + \frac{1}{\sqrt{8}}\operatorname{arc\,sin}\frac{\sin 2\vartheta\sqrt{8}}{(3-\cos 2\vartheta)}\right).$$

Aber die Gleichung:

$$x = \frac{2R(1-\cos 2\vartheta)}{3-\cos 2\vartheta}$$

giebt:

$$\sin 2\vartheta = \frac{2\sqrt{2x(a-x)}}{2a-x}, \quad \cos 2\vartheta = \frac{2a-3x}{2a-x};$$

folglich:

$$y = \frac{R}{2}\sqrt{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{\sqrt{Rx-x^2}}{\frac{1}{2}R} + \sqrt{2}\sqrt{Rx-x^2}, \text{ etc.}$$

Beispiel 6. Für die logarithmische Linie $s = a\,l.x$ hat man:

$$\frac{dx}{ds} = \sin\vartheta = \frac{x}{a}, \quad x = a\sin\vartheta,$$

$$dx = a\cos\vartheta d\vartheta, \quad \cos\vartheta = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},$$

$$dy = a\frac{\cos^2\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta, \quad y = a(\mathrm{l}\tang\tfrac{1}{2}\vartheta + \cos\vartheta) + C,$$

und wenn man die $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ entsprechende Ordinate mit b bezeichnet; so findet man:

$$C = b \text{ und } y = a(\mathrm{l}\tang\tfrac{1}{2}\vartheta + \cos\vartheta) + b,$$

woraus folgt:

$$y - b - a\cos\vartheta = a\mathrm{l}\frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta}.$$

Wenn man für $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ ihre Werthe als Functionen von x substituirt und von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht, so findet man endlich:

$$e^{\frac{y-b-\sqrt{a^2-x^2}}{a}} = \frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Dieses ist die Gleichung der Curve, deren Bogen resp. den Ordinaten einer logarithmischen Linie gleich sind.

Wenn man von der Gleichung $s = e^{\frac{x}{a}}$ ausgeht, so hat man:

$$\sin\vartheta = ae^{-\frac{x}{a}}, \quad x = a\mathrm{l}\frac{a}{\sin\vartheta}, \quad dx = -\frac{a\cos\vartheta d\vartheta}{\sin\vartheta},$$

$$dy = -a\cot^2\vartheta d\vartheta, \quad y = a(\vartheta + \cot\vartheta) + C.$$

Bezeichnet man die $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ entsprechende Ordinate mit b und setzt:

$$\frac{\pi}{2} - \vartheta = t,$$

so hat man:

$$y = a\,(\tang t - t) + b.$$

Außerdem ist:

$$\tang t = \cot\vartheta = \frac{\sqrt{e^{\frac{2x}{a}} - a^2}}{a}$$

und folglich:

$$b - y + \sqrt{e^{\frac{2x}{a}} - a^2} = a\arctang\frac{\sqrt{e^{\frac{2x}{a}} - a^2}}{a}$$

oder:

$$\sqrt{e^{\frac{2x}{a}}-a^2} = a \operatorname{tang} \frac{b-y+\sqrt{e^{\frac{2x}{a}}-a^2}}{a}.$$

§. 71. Es ist in vielen Fällen leicht, die Evolventen der im Vorhergehenden betrachteten Curven zu finden; denn wenn ξ, η, ρ, σ resp. die Coordinaten, den Krümmungshalbmesser und den Bogen einer ersten als Evolute betrachteten Curve und x, y, r, s die Coordinaten, den Krümmungshalbmesser und den Bogen der Evolvente bezeichnen, so hat man nach den aus der Differenzialrechnung bekannten Formeln:

$$\frac{\eta-y}{dx} = \frac{r}{ds}, \quad \frac{\xi-x}{dy} = -\frac{r}{ds}, \quad dr = d\sigma.$$

Bezeichnet ferner ϑ den Winkel, welchen die Tangente an der Evolute mit der Axe der y bildet, so hat man, da diese Tangente auf der Evolvente senkrecht ist:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \cot\vartheta = -\frac{dx}{dy},$$

und wenn man den Endpunct des Bogens s zum Anfangspuncte der Coordinaten nimmt, so hat man:

$$r = \sigma, \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang}\vartheta,$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos\vartheta, \frac{dy}{ds} = -\sin\vartheta.$$

Die Werthe von $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ führen in Verbindung mit den vorhergehenden Gleichungen unmittelbar auf die Ausdrücke:

$$y = \eta - \sigma\cos\vartheta, \quad x = \xi - \sigma\sin\vartheta,$$

welche y und x als Functionen von ϑ geben, sobald man ξ, η und σ kennt, und man braucht alsdann blos ϑ zwischen den beiden vorhergehenden Gleichungen zu eliminiren, um die gesuchte Gleichung der Evolvente zu erhalten.

Beispiel 1. Die Evolute sei ein Punkt $\xi = a$, $\eta = b$, so kann man $\sigma = \sqrt{a^2+b^2}$ setzen, und man findet:

$$y - b = -\sigma\cos\vartheta, \quad x - a = -\sigma\sin\vartheta.$$

Die Gleichung der Evolvente wird alsdann:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$$

und folglich ist diese Evolvente ein durch den Anfangspunct der Coordinaten gehender Kreis. Die Evolute eines Kreises ist also ein Punct, wie *a priori* einleuchtend ist.

Beispiel 2. Die Evolute sei die Curve, deren Bogen σ durch die Gleichung:

$$\sigma^{m+n} = p^n \xi^m$$

gegeben wird; so findet man:

$$x = \frac{n}{m+n} q \sin^{\frac{m+n}{n}} \vartheta,$$

$$y = \frac{mq}{n} \int \sin^{\frac{m}{n}-1} \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta - q \sin^{\frac{m}{n}} \vartheta \cos \vartheta,$$

$$dx = q \sin^{\frac{m}{n}} \vartheta \cos \vartheta d\vartheta, \quad dy = \sin^{\frac{m+n}{n}} \vartheta d\vartheta, \quad ds = q \sin^{\frac{m}{n}} \vartheta d\vartheta,$$

wo, wie wir gesehen haben, $q = p\left(\frac{m}{m+n}\right)^{\frac{m}{n}}$ ist.

Wenn $n = 1$, also $\sigma^{m+1} = p\xi^m$ ist, so hat man:

$$x = \frac{1}{m+1} q \sin^{m+1} \vartheta,$$

$$y = mq \int \sin^{m-1} \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta - q \sin^m \vartheta \cos \vartheta,$$

$$s = q \int \sin^m \vartheta d\vartheta.$$

Wenn ferner $m = 0$, also $\sigma = p$ ist, so findet man:

$$x = q \sin \vartheta, y = -q \cos \vartheta, \quad s = q\vartheta, \quad x^2 + y^2 = q^2.$$

Die Evolvente ist also ein Kreis, und $q = p\left(\frac{m}{m+1}\right)^m$ erscheint unter der unbestimmten Form 0^0; aber um den wahren Werth zu erhalten, braucht man nur zu setzen:

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^m = x^u, \quad z = \frac{m}{m+1}, \quad u = m,$$

und den $m = 0$ entsprechenden Werth des Ausdruckes $e^{-\frac{z'u}{zu}}$ zu berechnen; so findet man auf diese Weise, daß der wahre Werth von $q = p$ ist.

Wenn man dagegen zu gleicher Zeit $n = 1$, $m = 1$, also $\sigma^2 = p\xi$ hätte, so wäre die Evolute die Cycloide:

$$\eta = \frac{p}{8}(2\vartheta + \sin 2\vartheta), \quad \xi = \frac{p}{8}(1 - \cos 2\vartheta),$$

man hätte:

$$\sigma = \frac{p}{2} \sin \vartheta,$$

und die Evolvente würde durch die beiden Gleichungen:

$$y = \frac{p}{8}(2\vartheta - \sin 2\vartheta), \quad x = -\frac{p}{8}(1 - \cos 2\vartheta)$$

bestimmt, welche offenbar eine der ersten gleiche Cycloide ausdrücken. Die Cycloide ist also ihre eigene Evolvente, was bereits bekannt war. Wir wollen ferner $n = 1$, $m = 2$, also $s^3 = p\xi^2$ setzen, so ist die Gleichung der Evolute:

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\eta}{A}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

und man hat:

$$y=\frac{2}{3}q(1-\cos^3\vartheta)-q\sin^2\vartheta\cos\vartheta,\quad x=-\tfrac{1}{2}q\sin^3\vartheta,$$

$$s=q\int\sin^2\vartheta d\vartheta=\frac{q}{4}(2\vartheta-\sin 2\vartheta).$$

Beispiel 3. Die Evolute sei die Curve, deren Bogen mit der Abscisse durch die Gleichung einer Hyperbel:

$$\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{\sigma^2}{b^2}=1,$$

verbunden ist und welcher durch die Gleichungen:

$$\xi=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2\sin^2\vartheta}},\quad \eta=a^2b^2\int\frac{\cos^2\vartheta d\vartheta}{(a^2-b^2\sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\sigma=\frac{b^2\sin^2\vartheta}{\sqrt{a^2-b^2\sin^2\vartheta}}$$

bestimmt wird; so findet man für die Evolvente:

$$y=a^2b^2\int\frac{\cos^2\vartheta d\vartheta}{(a^2-b^2\sin^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}-\frac{b^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{a^2-b^2\sin^2\vartheta}},$$

$$x=\sqrt{a^2-b^2\sin^2\vartheta}.$$

Um die Form des Integrales kennen zu lernen, welches den Werth von y giebt, wollen wir die erste der beiden vorhergehenden Gleichungen differenziren und der Kürze wegen setzen:

$$\frac{b^2}{a^2}=c^2,$$

so kommt:

$$dy=\frac{b^2}{a}\frac{\sin^2\vartheta d\vartheta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\vartheta}},$$

$$y=a\left(\int\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\vartheta}}-\int d\vartheta\sqrt{1-c^2\sin^2\vartheta}\right),$$

und wenn man nach Legendre die elliptischen Functionen der ersten und zweiten Art:

$$\int\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-c^2\sin^2\vartheta}},\ \int d\vartheta\sqrt{1-c^2\sin^2\vartheta},$$

durch $F(c,\vartheta)$, $E(c,\vartheta)$ bezeichnet; so hat man endlich:

$$y=a[F(c,\vartheta)-E(c,\vartheta)]$$

und:

$$x=\sqrt{a^2-b^2\sin^2\vartheta}.$$

Das System dieser beiden Gleichungen drückt die Evolvente der

Curve aus, deren Bogen den entsprechenden Ordinaten einer Hyperbel gleich sind. Wenn $a=b$ ist, so wird die Hyperbel gleichseitig, die gegebene Evolute ist die Kettenlinie:

$$\xi = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\eta}{a}} + e^{-\frac{\eta}{a}}\right),$$

und man hat:

$$F(c, \vartheta) = \int \frac{d\vartheta}{\cos\vartheta}, \quad E(c, \vartheta) = \int \cos\vartheta d\vartheta,$$

$$x = a\cos\vartheta, \quad \sin\vartheta = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},$$

$$y = a\left[\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right) - \sin\vartheta\right],$$

$$y + a\sin\vartheta = a\,l\,\frac{1+\sin\vartheta}{\cos\vartheta},$$

$$y + \sqrt{a^2-x^2} = a\,l\,\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

Dieses ist folglich die Gleichung der Evolvente der Kettenlinie.

Beispiel 4. Die Bogen der Evolute seien die Ordinaten der logarithmischen Linie $\sigma = e^{\frac{\xi}{a}}$, so ist die Gleichung dieser Evolute, wie wir gesehen haben:

$$\sqrt{e^{\frac{2\xi}{a}} - a^2} = a\,\mathrm{tang}\,\frac{b-\eta+\sqrt{e^{\frac{2\xi}{a}}-a^2}}{a},$$

und für die Evolvente findet man:

$$y = b - \frac{\pi\vartheta}{2} + a\vartheta, \quad x = a\,l\,\frac{a}{\sin\vartheta} - a,$$

und wenn man $\frac{\pi}{2} - \vartheta = \vartheta'$ setzt:

$$y = b + a\vartheta', \quad x = a\,l\,\frac{a}{\cos\vartheta'} - a,$$

$$e^{\frac{x+a}{a}} = \frac{a}{\cos\vartheta'}, \quad \vartheta' = \frac{y-b}{a},$$

und endlich:

$$e^{\frac{x+a}{a}} = \frac{a}{\cos\frac{y-b}{a}} = a\sec\frac{y-b}{a}.$$

Dreizehnte Vorlesung.

Fortsetzung der geometrischen Anwendungen. — Quadratur ebener Curven.

---

§. 72. Wir wollen zwei ebene Curven betrachten, deren correspondirende Ordinaten y, Y sind, und ein Segment A, welches zwischen diesen beiden Curven CM, cm und zwei auf der Axe der x senkrechten geraden Linien M_0m_0, Mm, oder $x=x_0$, $x=X$ liegt; so wird der Zuwachs dieses Segmentes:

$$\Delta A = Mm\,m'M',$$

welcher dem Zuwachse Δx der unabhängigen Veränderlichen x entspricht, offenbar durch das Product aus Δx und einem Werthe der Differenz $Y-y$ ausdrückt, welcher ein Mittel zwischen dem größten und dem kleinsten der Werthe ist, die diese Differenz in dem Intervalle Δx annimmt und durch $Y-y+\varepsilon$ ausgedrückt werden kann, wo ε eine sehr kleine Größe bezeichnet, welche mit Δx verschwindet. Man hat also:

$$\Delta A = \Delta x\,(Y-y+\varepsilon), \quad \frac{dA}{dx} = Y-y, \quad dA = (Y-y)\,dx.$$

Wenn man für Y und y ihre Werthe als Functionen von x substituirt, so nimmt dieser Ausdruck die Form $f(x)\,dx$ an, und wenn man zwischen den Grenzen x_0, X integrirt; so hat man:

$$A = \int_{x_0}^{X} (Y-y)\,dx.$$

Wenn man die Segmente von einer festen geraden Linie C_0c_0 aus gezählt hätte, so hätte man, wenn A_0 den anfänglichen Werth $C_0c_0\,m_0M_0$ oder den $x=x_0$ entsprechenden Werth und A den $x=x$ entsprechenden Werth dieses Segmentes bezeichnet, gefunden:

$$A - A_0 = \int_{x_0}^{x} (Y-y)\,dx.$$

Zusatz 1. Um das zwischen der Curve CM und der Axe der x liegende Segment zu erhalten, braucht man in dem vorhergehenden Ausdrucke nur $y_0=0$ zu setzen, so findet man:

$$A = \int_{x_0}^{X} Y\,dx, \text{ oder } A - A_0 = \int_{x_0}^{x} Y\,dx,$$

oder endlich, wenn das Segment von $x = x_0$ aus gezählt wird:

$$A_0 = 0, \quad A = \int_{x_0}^{x} Y dx.$$

Zusatz 2. Für ein anderes zwischen zwei Curven, deren Ordinaten Y', y' sind, liegendes Segment hätte man:

$$A' = \int_{x_0}^{X} (Y' - y') dx,$$

und wenn:

$$Y' - y' = m(Y - y)$$

wäre, d. h. wenn die linearen Durchschnitte der beiden Segmente mit auf der Axe der x senkrechten Ebenen in einem constanten Verhältnisse ständen; so hätte man auch:

$$A' = m \int_{x_0}^{X} (Y - y) dx = mA$$

und folglich ständen auch die beiden Flächen in demselben Verhältnisse. Dieses findet z. B. statt, wenn die Gleichung der einen Curve $f(x, y) = 0$ und die der andern:

$$f\left(x, \frac{y}{b}\right) = 0$$

ist. Denn wenn sich aus der ersten Gleichung ergiebt:

$$Y = \varphi(x), \quad y = \chi(x),$$

so folgt aus der zweiten:

$$Y' = b\varphi(x), \quad y' = b\chi(x)$$

und folglich ist:

$$Y' - y' = b(Y - y),$$

so daß man in diesem Falle hat:

$$A' = bA.$$

Wenn Y und y, Y' und y' resp. die Ordinaten der beiden untern und obern Zweige zweier geschlossener Curven sind, so sind A und A' die von diesen Curven eingeschlossenen Flächen.

Eben so ergiebt sich, wenn man die beiden Coordinaten x, y miteinander vertauscht, daß die Flächen der durch die Gleichungen:

$$f(x, y) = 0, \quad f\left(\frac{x}{a}, y\right) = 0,$$

oder der durch die Gleichungen:

$$f\left(x, \frac{y}{b}\right) = 0, \quad f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = 0$$

ausgedrückten geschlossenen Curven in dem Verhältnisse $1 : a$ zu einander stehen, woraus folgt, daß sich die Flächen der beiden geschlossenen Curven:

$$f(x,y)=0,\ f\left(\frac{x}{a},\ \frac{y}{b}\right)=0$$

wie 1 zu *ab* verhalten, so daß man, um die Fläche einer geschlossenen ebenen Curve, welche durch eine Gleichung von der Form:

$$f\left(\frac{x}{a},\ \frac{y}{b}\right)$$

ausgedrückt wird, zu erhalten, nur die Fläche der durch die Gleichung $f(x,y)=0$ ausgedrückten Curve zu bestimmen und dieselbe durch das Product *ab* zu multipliciren braucht.

Wenn man in der Gleichung:

$$f\left(\frac{x}{a},\ \frac{y}{b}\right)=0$$

$b=a$ setzt, so reducirt sie sich auf die Form:

$$f\left(\frac{x}{a},\ \frac{y}{a}\right)=0$$

und drückt eine der Curve $f(x,y)=0$ ähnliche Curve aus, deren Dimensionen sich zu denen dieser zweiten Curve wie a zu 1 verhalten. Alsdann folgt aus dem Vorhergehenden, daß sich die von ähnlichen Curven eingeschlossenen Flächen wie die Quadrate der Dimensionen dieser Curven verhalten.

Zusatz 3. Da man hat:

$$A=\int_{x_0}^{x}(Y-y)\,dx=(x-x_0)D,$$

$$A'=\int_{x_0}^{x}(Y'-y')=(x-x_0)D',$$

wo D und D′ die mittleren Werthe der Differenzen $Y-y$, $Y'-y'$ bezeichnen; so folgt $\frac{A}{A'}=\frac{D}{D'}$, d. h. das Verhältniß zweier ebener Flächen ist immer eine Mittelgröße zwischen den verschiedenen Werthen, welche das Verhältniß der linearen Durchschnitte dieser beiden Flächen mit auf der Axe der x senkrechten Ebenen annehmen kann, indem diese Axe übrigens eine beliebige in der Ebene der Curve gezogene gerade Linie ist.

Aus der Gleichung:

$$A=(x-x_0)D$$

folgt endlich:

$$\frac{A}{x-x_0}=D,$$

welches zeigt, daß das Verhältniß einer ebenen Fläche zu ihrer Projection auf eine beliebige in ihrer Ebene gezogene Axe immer eine Mittelgröße zwischen den verschiedenen Längen ist, welche die Durchschnitte dieser Fläche mit auf dieser Axe senkrechten Ebenen ausdrücken.

§. 73. Beiſpiel 1. Für den Kreis:

$$x^2+y^2=r^2,\ y=\sqrt{r^2-x^2}$$

wollen wir ſetzen:

$$\sqrt{r^2-x^2}=tx,$$

ſo iſt:

$$x^2=\frac{r^2}{t^2+1},$$

folglich:

$$\int dx\sqrt{r^2-x^2}=\int txdx=\tfrac{1}{2}tx^2-\tfrac{1}{2}\int x^2dt=\tfrac{1}{2}tx^2-\tfrac{1}{2}r^2\int\frac{dt}{t^2+1}$$

$$=\tfrac{1}{2}tx^2-\tfrac{1}{2}r^2\operatorname{arc\,tang}t+C$$

$$=\tfrac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2}-\tfrac{1}{2}r^2\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{x}+C.$$

Setzt man nun der Einfachheit wegen $x_0=0$, ſo kommt:

$$A=\tfrac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2}-\tfrac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{x}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2}+\tfrac{1}{2}r^2\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

oder:

$$A=\tfrac{1}{2}xy+\tfrac{1}{2}r^2\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{y}.$$

Die Richtigkeit dieſer Gleichung läßt ſich leicht direct nachweiſen, wenn man bemerkt, daß der Kreisausſchnitt aus einem Dreiecke und aus einem Kreisabſchnitte beſteht. Wenn man $x=r$ und $y=0$ ſetzt, ſo erhält man die Fläche des ganzen Kreiſes $=\pi r^2$.

Beiſpiel 2. Für die Ellipſe:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

hat man:

$$A=\frac{b}{a}\int_{x_0}^{x}\sqrt{a^2-x^2}\,dx,$$

und wenn man $x_0=0$ ſetzt:

$$A=\tfrac{1}{2}\frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}+\tfrac{1}{2}ab\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

oder:

$$A=\tfrac{1}{2}xy+\tfrac{1}{2}ab\operatorname{arc\,tang}\frac{bx}{ay}$$

und folglich iſt die Fläche der ganzen Ellipſe gleich πab.

Beiſpiel 3. Für die Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ oder } \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

hat man:

$$A=\frac{b}{a}\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{x^2\mp a^2},$$

und wenn man ſetzt:

$$\sqrt{x^2\mp a^2}=tx,$$

ſo ergiebt ſich:

$$x^2=\pm\frac{a^2}{1-t^2},$$

$$\int dx\sqrt{x^2\mp a^2}=\int txdx=\tfrac{1}{2}tx^2-\tfrac{1}{2}\int x^2dt$$

$$=\tfrac{1}{2}tx^2\mp a^2\int\frac{dt}{1-t^2}=\tfrac{1}{2}tx^2-\frac{a^2}{8}\,l\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2+C$$

$$=\tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2\mp a^2}-\tfrac{1}{8}a^2\,l\left(\frac{x+\sqrt{x^2\mp a^2}}{x-\sqrt{x^2\mp a^2}}\right)^2+C.$$

Für die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ hat man, wenn man $x_0=a$ ſetzt:

$$A=\tfrac{1}{2}\frac{b}{a}\,x\sqrt{x^2-a^2}-\tfrac{1}{4}ab\,l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\right),$$

oder was auf daſſelbe hinausläuft:

$$A=\tfrac{1}{2}xy-\tfrac{1}{4}ab\,l\left(\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}}\right)=\tfrac{1}{2}xy-\tfrac{1}{2}ab\,l\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

Dieſes iſt der Werth der Fläche, welche zwiſchen der Axe der Abſciſſen, der Ordinate y und dem Hyperbelbogen liegt, welcher den Scheitel mit dem Puncte (x, y) verbindet. Zieht man dieſe Flächen von der Fläche $\frac{1}{2}xy$ des aus den Coordinaten x, y als Katheten conſtruirten rechtwinkligen Dreieckes ab; ſo drückt der Reſt:

$$\tfrac{1}{2}ab\,l\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) \text{ oder } \tfrac{1}{2}ab\,l\frac{1}{\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}$$

den hyperboliſchen Sector aus, welcher zwiſchen der Axe der x, dem Hyperbelbogen und dem vom Mittelpuncte nach dem Puncte (x, y) gezogenen Radiusvector liegt. Wenn ſich dieſer letzte Punct ins Unendliche entfernt, ſo wird dieſer Sector ſelbſt unendlich. Bezeichnen ferner ξ, η die Coordinaten der Aſymptote, welche ſich auf

der Seite der positiven Coordinaten der Hyperbel ohne Ende nähert; so hat man:

$$\frac{\eta}{b} = \frac{\xi}{a}$$

und wenn man setzt:

$$n = y, \frac{y}{b} = \frac{\xi}{a}, \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{x-\xi}{a},$$

so wird der hyperbolische Sector ausgedrückt durch:

$$\tfrac{1}{2}ab\,l\left(\frac{a}{x-\xi}\right) = -\tfrac{1}{2}ab\,l\left(\frac{x-\xi}{a}\right).$$

Wenn die Hyperbel gleichseitig wäre, so hätte man $b=a$ und die Fläche des Sectors würde ausgedrückt durch:

$$\tfrac{1}{2}a^2\,l\left(\frac{x+y}{a}\right).$$

Wenn dieselbe Hyperbel nicht auf ihre Axen, sondern auf ihre Asymptoten bezogen würde, so wäre ihre Gleichung:

$$xy = \tfrac{1}{2}a^2$$

und man fände:

$$A = \tfrac{1}{2}a^2 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}a^2\,l\left(\frac{x}{x_0}\right).$$

Die Fläche des hyperbolischen Sectors wird folglich durch Logarithmen ausgedrückt, welche aus dem Systeme von der Grundzahl $e = 2{,}71828\ldots.$ genommen sind und deshalb hyperbolische Logarithmen genannt werden.

Beispiel 4. Wenn man für die Parabel $y^2 = 2px$ der Kürze wegen $x_0 = 0$ setzt, so findet man:

$$A = \tfrac{2}{3}(2p)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}xy,$$

so daß die zwischen der Axe der Parabel, dem vom Scheitel aus genommenen Bogen derselben und einer auf der Axe der x senkrechten Ordinate liegende Fläche $\frac{2}{3}$ der Fläche des umschriebenen Rechteckes beträgt.

Beispiel 5. Für die Curve $y = Ax^a$ findet man, wenn man $x_0 = 0$ setzt:

$$A = \frac{xy}{a+1},$$

Beispiel 6. Für die logarithmische Linie $y = a\,l.x$, wo a eine positive Constante bezeichnet, hat man, wenn man $x_0 = 1$ und $x > 1$ setzt:

$$A = a\int_1^x l x\,dx.$$

Wenn man theilweise integrirt, so findet man:

$$\int dx\,lx = x\,lx - \int dx = x\,lx - x + C$$

und folglich:

$$A = a(x \ln x - x + 1).$$

Die zwischen der Halbare der negativen y, dem Theile der logarithmischen Linie, welcher diese Halbare zur Asymptote hat und der Axe der x liegende Fläche ist $= a$, und folglich nicht unendlich.

Beispiel 7. Es sei die Kettenlinie:

$$y = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

gegeben, so hat man für den Ausdruck der zwischen der Axe der x, der Kettenlinie und den beiden den Abscissen $x = 0$, $x = x$ entsprechenden Ordinaten a, y liegenden Fläche:

$$A = a^2\,\frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2} = aS,$$

wo S den zwischen dem tiefsten Puncte und dem Puncte (x, y) liegenden Bogen der Curve bezeichnet.

Beispiel 8. Für die durch die Gleichungen:

$$x = R(\omega - \sin\omega), \quad y = R(1 - \cos\omega)$$

ausgedrückte Cycloide hat man, wenn ω_0 den $x = x_0$ entsprechenden Werth von ω bezeichnet und die Flächen von x_0 aus gezählt werden:

$$A = \int_{x_0}^{x} y\,dx = \int_{\omega_0}^{\omega} y^2\,d\omega = R^2 \int_{\omega_0}^{\omega} (1 - \cos\omega)^2\,d\omega$$

$$= R^2 \int_{\omega_0}^{\omega} (1 - 2\cos\omega + \cos^2\omega)\,d\omega$$

oder wegen:

$$\cos^2\omega = \frac{1 + \cos 2\omega}{2}, \quad A = R^2 \int_{\omega_0}^{\omega} (\tfrac{3}{2} - 2\cos\omega + \tfrac{1}{2}\cos 2\omega)\,d\omega,$$

und wenn man $x_0 = 0$, $\omega_0 = 0$ setzt:

$$A = R^2\,(\tfrac{3}{2}\omega - 2\sin\omega + \tfrac{1}{4}\sin 2\omega).$$

Um die von einem ganzen Cycloidenbogen eingeschlossene Fläche zu erhalten, muß man $\omega = 2\pi$ setzen, und alsdann findet man:

$$A = 3\pi R^2.$$

Diese Fläche ist folglich der dreifachen Fläche des erzeugenden Kreises gleich:

Beispiel 9. Man soll die von der Curve $x^{2m} + y^{2m} = 1$ eingeschlossene Fläche berechnen. Wenn man die Gleichung:

$$A = \int_{x_0}^{X} (Y - y_0)\,dx$$

anwendet, so muß man setzen:

$$Y=(1-x^{2m})^{\frac{1}{2m}},\ y_0=-(1-x^{2m})^{\frac{1}{2m}},\ x_0=-1,\ X=1,$$

und alsdann erhält man:

$$A=2\int_{-1}^{1}(1-x^{2m})^{\frac{1}{2m}}dx=4\int_{0}^{1}(1-x^{2m})^{\frac{1}{2m}}dx.$$

Wenn $m=1$ ist, so erhält man $A=\pi$, wie es sein muß.

Beispiel 10. Man soll die von der Curve:

$$x^{\frac{2m}{2n+1}}=y^{\frac{2m}{2n+1}}=1$$

eingeschlossene Fläche berechnen. In diesem Falle hat man:

$$A=2\int_{-1}^{+1}\left(1-x^{\frac{2m}{2n+1}}\right)^{\frac{2n+1}{2m}}dx=4\int_{0}^{1}\left(1-x^{\frac{2m}{2n+1}}\right)^{\frac{2n+1}{2m}}dx.$$

Betrachtet man den Fall, wo $m=n$ ist, und setzt:

$$x=\sin^{2n+1}\varphi,$$

so kommt:

$$A=4(2n+1)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+2}\varphi\sin^{2n}\varphi d\varphi$$

$$=(8n+4)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+2}\varphi(1-\cos^2\varphi)^n d\varphi$$

und wenn man $1-\cos^2\varphi)^n$ in eine Reihe entwickelt und integrirt:

$$A=(4n+2)\pi\left[\frac{1.3.5...(2n+1)}{2.4.6...(2n+2)}-\frac{n}{1}\frac{1.3.5...(2n+3)}{2.4.1...(2n+4)}+\frac{n(n-1)1.3.5....(2n+5)}{1.2\ \ 2.4.6...(2n+6)}+\text{etc.}\right]$$

Wenn man zugleich $m=1$, $n=1$ setzt, so reducirt sich die Gleichung der Curve auf $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$, und man hat:

$$A=12\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\varphi-\cos^6\varphi)\,d\varphi=6\pi\left(\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{8}\pi.$$

Berücksichtigt man den zweiten Zusatz in §. 72, so folgt, daß die Fläche der durch die Gleichung:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

worin:

$$A=\frac{a^2-b^2}{a},\quad B=\frac{a^2-b^2}{b}$$

ist, ausgedrückten Evolute der Ellipse, deren große Axe a und deren kleine Axe b ist, ausgedrückt wird durch:

$$\frac{3}{8}\pi AB=\frac{3}{8}\pi\frac{(a^2-b^2)^2}{ab}.$$

Vierzehnte Vorlesung.

Fortsetzung der geometrischen Anwendungen. — Quadratur der krummen Oberflächen.

---

§. 74. Wenn man ein Element a der krummen Oberfläche, dessen beide Dimensionen sehr klein sind, auf eine Ebene projectirt und die Kanten der Erzeugungslinie des projicirenden Cylinders nöthigenfalls so weit verlängert, bis sie die an einen Punct des Elementes a gelegte Berührungsebene treffen; so hat das Verhältniß des Elementes a zu der auf der Berührungsebene auf diese Weise bestimmten kleinen Fläche a' die Einheit zur Grenze, so daß die Projection a'' des Elementes a nahezu gleich:

$$a\cos\tau\times(1+i)=a(\cos\tau+\varepsilon)$$

ist, wo τ den Winkel bezeichnet, welchen die Berührungsebene mit der Projectionsebene bildet und i, ε sehr kleine Größen sind.

Beweis. Durch den Berührungspunct C der Berührungsebene mit dem Elemente a wollen wir eine dritte Ebene legen, welche die Flächen a und a' nach zwei Linien AA', BB' schneidet, die zwei correspondirende, aber beliebige Dimensionen dieser Flächen sind. Aus dem über einen Curvenbogen Gesagten folgt aber leicht, daß das Verhältniß des Bogens AB zu dem Stücke A'B' der Tangente die Einheit zur Grenze hat. Ueberdies können zwei Flächen, deren correspondirende Dimensionen nahezu einander gleich sind, selbst nur um sehr kleine Größen von einander verschieden sein, und folglich ist die Fläche a auf der krummen Oberfläche nahezu dem Stücke a' der Berührungsebene gleich, und man hat:

$$a'=a(1+i),\ \lim\frac{a}{a'}=1.$$

Wennn man nun die gemeinschaftliche Projection der Flächen a und a' mit a'' und den Winkel, welchen die Berührungsebene mit der Projectionsebene bildet, mit τ bezeichnet; so hat man:

$$a''=a'\cos\tau=a\cos\tau\times(1+i)=a(\cos\tau+\varepsilon),\ \lim\frac{a}{a''}=\frac{1}{\cos\tau}.$$

§. 75. Betrachten wir nun ein auf der krummen Oberfläche $z=F(x,y)$ liegendes krummliniges Stück, welches einerseits durch

zwei Ebenen AB, DC oder $x=x_0$, $x=X$ und andererseits von zwei Theilen der cylindrischen Flächen AD, BC, deren Gleichungen folgende sind:

$$y=\phi(x), \quad Y=\chi(x)$$

begrenzt wird, und suchen diese Fläche, welche offenbar eine gewisse Function von x ist, zu bestimmen.

Zu dem Zwecke wollen wir die in Rede stehende Fläche mit zwei auf der Axe der x senkrechten und durch ein unendlich kleines Intervall dx von einander entfernten Ebenen durchschneiden, so bestimmen diese Ebenen einen Streifen $abcd$, welcher der dem Zuwachse Δx entsprechende Zuwachs ΔA der Fläche ABCD ist, woraus sich das Differenzial:

$$dA = \psi(x)\,dx$$

der Fläche A, und folglich diese Fläche selbst:

$$A=\int_{x_0}^{X}\psi(x)\,dx$$

ergiebt. Es ist nun noch die Function $\psi(x)$ oder das Differenzial $\psi(x)\,dx$ vermittelst der Data der Aufgabe zu bestimmen. Zu dem Zwecke wollen wir den Streifen $abcd=B$ durch auf der Axe der y senkrechte und um die Länge $\Delta y=dy$ von einander entfernte Ebenen in Elemente zerlegen, deren beide Dimensionen unendlich klein sind; so ist das Element $mnpq$, dessen Projection $m'n'p'q' = \Delta x.\Delta y$ ist, der dem Zuwachse Δy entsprechende Zuwachs $\Delta_y B$ des Streifens B. Ferner hat man nach dem vorhergehenden § und wenn τ den Winkel bezeichnet, welchen die Berührungsebene mit der Ebene der xy bildet:

$$mnpq=\Delta_y B = \frac{m'n'p'q}{\cos\tau+\varepsilon}=\frac{\Delta x\Delta y}{\cos\tau+\varepsilon},$$

folglich:

$$\frac{\Delta_y B}{\Delta y}=\frac{\Delta x}{\cos\tau+\varepsilon}=\frac{dx}{\cos\tau+\varepsilon}$$

$$D_y B=\frac{dB}{dy}=\frac{dx}{\cos\tau}, \quad B=dx\int_y^Y\frac{dy}{\cos\tau}$$

und mithin:

$$A=\int_{x_0}^{X}dx\int_y^Y\frac{dy}{\cos\tau}=\int_{x_0}^{X}\int_x^Y\frac{dxdy}{\cos\varphi}=\int_{x_0}^{X}\int_y^Y\sec\tau\,dydx.$$

Der Winkel τ, welchen die Berührungsebene mit der Ebene der xy bildet, ist zugleich der Winkel, welchen die Normale der krummen Fläche mit der Axe der z bildet, und man hat folglich, wenn man $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$ setzt:

$$\cos\tau=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \sec\tau=\sqrt{p^2+q^2+1}.$$

Wenn die Gleichung der krummen Fläche unter der Form:

$$u = F(x,y,z) = 0$$

gegeben wäre, so hätte man:

$$\cos\tau = \frac{\frac{du}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2}},$$

und folglich, wenn man substituirt:

$$A = \int_{x_0}^{X}\int_{x_0}^{Y} dxdy\sqrt{p^2+q^2+1}$$

oder:

$$A = \int_{x_0}^{X}\int_{y}^{Y} dxdy\,\frac{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2}}{\frac{du}{dz}}.$$

Vermittelst der Gleichung der krummen Fläche, welche z als Function von x, y giebt, kann man den Ausdruck:

$$\sqrt{p^2+q^2+1}$$

oder:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2}}{\frac{du}{dz}}$$

auf die Form $F(x,y)$ bringen, worauf eine erste Integration in Beziehung auf y zwischen den Grenzen $y=\varphi(x)$ $Y=\chi(x)$ giebt:

$$\int_{x_0}^{Y} F(x,y)\,dx = F(x),$$

und die gesuchte krummlinige Fläche wird endlich ausgedrückt durch das Integral:

$$\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx.$$

§. 76. Man kann die Fundamentalformel:

$$A = \int_{x_0}^{x}\int_{y}^{Y} \sec\tau\,dx\,dy$$

auch auf folgende vielleicht noch strengere Art ableiten.

Wir wollen zunächst annehmen, daß es darauf ankomme, den zwischen den vier Ebenen $x=x_0$, $x=x$, $y=y_0$, $y=y$ liegenden Theil der krummen Fläche zu bestimmen, so ist dieser Theil A eine Function von x, y und man kann setzen:

$$A = \varphi(x,y).$$

Die Projection dieser Fläche auf die Ebene der xy ist ferner das Rechteck $(x-x_0)(y-y_0)$, und da sie mit ihrer Projection zugleich verschwinden muß, d. h. für $x=x_0$ bei jedem Werthe von y und für $y=y_0$ bei jedem Werthe von x; so hat man:

$$\varphi(x_0, y)=0, \quad \varphi(x, y_0)=0.$$

Endlich ist das Rechteck $\Delta x \Delta y$ die Projection des den sehr kleinen Incrementen $\Delta x, \Delta y$ entsprechenden Zuwachses $\Delta_x \Delta_y \varphi(x, y)$, und man hat, wenn τ die Neigung der Berührungsebene in einem Puncte des in Rede stehenden Elementes bezeichnet:

$$\Delta y \Delta x = (\cos\tau + \varepsilon)\, \Delta_y \Delta_x \varphi(x, y),$$

woraus folgt:

$$\frac{\Delta_y \frac{\Delta_x \varphi(x, y)}{\Delta x}}{\Delta y} = \frac{1}{\cos\tau + \varepsilon}.$$

Läßt man nun den Werth von Δy ohne Ende abnehmen, so erhält man:

$$\frac{d}{dy}\frac{\Delta_x \varphi(x, y)}{\Delta x} = \frac{1}{\cos\tau + \varepsilon'}$$

und wenn man auch $\Delta x = 0$ setzt, so ist:

$$\frac{d^2\varphi(x, y)}{dy\,dx} = \frac{1}{\cos\tau}$$

oder:

$$\frac{d}{dy}\frac{d\varphi(x, y)}{dx} = \sec\tau.$$

Wenn man die Gleichung:

$$\frac{d}{dy}\frac{\Delta x}{\Delta_x \varphi(x, y)} = \frac{1}{\cos\tau + \varepsilon'}$$

zwischen den Grenzen y, Y integrirt, so erhält man:

$$\Delta_x \varphi(x, Y) = \Delta x \int_{y_0}^{Y} \frac{1}{\cos\tau + \varepsilon'}\, dy$$

für den Werth der Fläche, deren Projection auf der Ebene der xy das durch die vier Linien $x=x$, $X=x+\Delta x$, $y=y$, $y=Y$ bestimmte Rechteck ist.

Wenn man die Gleichung:

$$\frac{d}{dy}\frac{d\varphi(x, y)}{dx} = \sec\tau$$

mit dy multiplicirt und von y_0 an integrirt, so erhält man:

$$\frac{d\varphi(x, y)}{dx} - \frac{d\varphi(x, y_0)}{dx} = \frac{d}{dx}\Big[\Delta(x, y) - \Delta(x, y_0)\Big] = \int_{y_0}^{y} \sec\tau\, dy;$$

aber wegen $\varphi(x, y_0)=0$ hat man:

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dx} = \int_{y_0}^{y} \sec\tau\, dy,$$

folglich:

$$\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \sec\tau\, dydx$$

und endlich wegen $\varphi(x_0,y) = 0$ ist:

$$\varphi(x,y) = A = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \sec\tau\, dxdy.$$

Nehmen wir nun an, daß die zu bestimmende Fläche zwischen zwei Ebenen $x = x_0$, $x = x$ und zwischen zwei cylindrischen Flächen $y = \varphi(x)$, $Y = \chi(x)$ liegt; so ist sie eine gewisse Function der Abscisse x, und man kann setzen:

$$A = f(x).$$

Der Δx entsprechende Zuwachs $\Delta f(x)$ ist eine kleine Fläche, deren Projection auf der Ebene der xy zwischen zwei Ebenen $x = x$, $x = x + \Delta x$ und zwischen zwei kleinen Bogen der Curven $y = \varphi(x)$, $Y = \chi(x)$ liegt. Diese Projection liegt zwischen den beiden Rechtecken, wovon das eine ein eingeschriebenes und das andere ein umschriebenes ist, welche resp. dem kleinsten und größten Werthe entsprechen, welche die Differenz $Y - y$ zwischen den Grenzen $x + \Delta x$ annimmt. Der größte und kleinste Werth der Differenz $Y - y$ sind übrigens zwei Größen von der Form:

$$[\chi(x + \vartheta\Delta x) - \varphi(x + \vartheta'\Delta x)],$$

wo ϑ und ϑ' zwei kleinere Zahlen als die Einheit bezeichnen. Das ein- und umgeschriebene Rechteck sind die Projectionen zweier neuen Flächen, wovon die eine kleiner und die andere größer ist, als die Fläche $\Delta f(x)$. Da ferner jede dieser neuen Flächen zwischen vier Ebenen:

$$x = x,\ X = x + \Delta x,\ y_0 = \chi(x + \vartheta\Delta x),\ y = \varphi(x + \vartheta'\Delta x)$$

liegt, so wird ihr Inhalt nach dem Vorhergehenden durch einen Ausdruck von der Form:

$$\Delta x \int_{y}^{Y} \frac{dy}{\cos\tau + \varepsilon} = \Delta x \int_{\varphi(x+\vartheta'\Delta x)}^{\chi(x+\vartheta\Delta x)} \frac{dy}{\cos\tau + \varepsilon}$$

bestimmt. Dasselbe ist auch mit der Fläche $\Delta f(x)$ der Fall, und man hat:

$$\Delta f(x) = \Delta x \int_{\varphi(x+\vartheta'\Delta x)}^{\chi(x+\vartheta\Delta x)} \frac{dy}{\cos\tau + \varepsilon},$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \int_{\varphi(x+\vartheta'\Delta x)}^{\chi(x+\vartheta\Delta x)} \frac{dy}{\cos\tau + \varepsilon},$$

und wenn man zu der Grenze übergeht:

$$\frac{df(x)}{dx} = \int_{\varphi(x)}^{\chi(x)} \frac{dy}{\cos\tau}.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man von x_0 an integrirt und bemerkt, daß die Fläche $f(x)$ verschwindet, wenn man $x = x_0$ setzt:

$$f(x) = A = \int_{x_0}^{x} dx \int_{\varphi(x)}^{\chi(x)} \frac{dy}{\cos\tau} = \int_{x_0}^{x} \int_{y}^{Y} \frac{dxdy}{\cos\tau},$$

was zu beweisen war.

§. 77. Zusatz 1. Man hat:

$$\int_{y}^{Y} \sec\tau\, dy = (Y-y)\sec t,$$

wo t eine Mittelgröße zwischen den verschiedenen Werthen bezeichnet, welche der Winkel τ annimmt, während sich y zwischen den Grenzen y, Y ändert. Man hat folglich:

$$A = \int_{x_0}^{X} (Y-y)\sec t\, dx = \sec T \int_{x_0}^{X} (Y-y)\, dx = P \sec T$$

wo P die Projection:

$$\int_{x_0}^{X} (Y-y)\, dx$$

der krummen Fläche A auf die Ebene der xy und T einen Mittelwerth zwischen den verschiedenen Werthen von t bezeichnet, welche den verschiedenen Werthen von x entsprechen, und folglich eine Mittelgröße der verschiedenen Neigungen der Fläche A gegen die Ebene der xy. Da diese Ebene der xy aber willkührlich ist, so folgt, daß das Verhältniß zwischen einer krummen Fläche und ihrer Projection auf eine beliebige Ebene eine Mittelgröße zwischen den Secanten der verschiedenen Neigungen der krummen Fläche gegen die fragliche Ebene ist.

Zusatz 2. Wenn die Neigung τ constant und $= T$ wird, so hat man:

$$A = \sec T \int_{x_0}^{X} \int_{y}^{Y} dxdy = P \sec\tau,$$

woraus folgt, daß, wenn eine Fläche in allen ihren Puncten dieselbe Neigung gegen die Ebene der xy hat, ein auf dieser Fläche liegendes Stück dem Producte aus seiner Projection auf die Ebene der xy und aus der Secante der Neigung gleich ist.

Vermittelst dieses Satzes kann man den Inhalt gewisser krummen Flächen direct bestimmen. Gesetzt z. B. man wollte die Oberfläche eines geraden abgestumpften Kegels berechnen, dessen Grundflächen Kreise von den Halbmessern R und r sind; so hat man:

$$P = \pi(R^2 - r^2),\quad A = \pi(R+r)(R-r)\sec\tau.$$

Bezeichnet man nun durch l die Höhe des abgestumpften Kegels, so hat man:

$$R - r = l\cos\tau,\quad \frac{R-r}{\cos\tau} = (R-r)\sec\tau = l;$$

folglich:

$$A = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} l.$$

Die Oberfläche eines geraden abgestumpften Kegels ist folglich gleich dem Producte aus seiner Höhe und aus der halben Summe der Umfänge seiner Grundflächen.

§. 78. Wenn sich die Gleichung der krummen Fläche auf $z = f(x)$ reducirt, d. h. wenn die krumme Fläche ein Cylinder wird, dessen Erzeugungslinie zu der Axe der y parallel ist; so hat man:

$$\frac{dz}{dy} = q = 0, \quad \frac{dz}{dx} = f'(x),$$

$$A = \int_{x_0}^{X} \int_{y}^{Y} dx\,dy \sqrt{1 + [f'(x)]^2},$$

$$A = \int_{x_0}^{X} dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \int_{y}^{Y} dy$$

$$= \int_{x_0}^{X} dx\,(Y - y) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \int_{x_0}^{X} (Y - y) \sec \tau\, dx.$$

Will man alsdann die Fläche berechnen, welche zwischen zwei Erzeugungslinien und zwei zu der Basis parallelen ebenen Curven liegt, so muß man annehmen, daß Y und y zwei constante Größen sind, deren Unterschied der Abstand D der beiden Ebenen oder die Dicke der cylindrischen Schicht ist. Man hat folglich:

$$A = D \int_{x_0}^{X} \sec \tau\, dx.$$

Aber in demselben Falle ist τ oder die Neigung der krummen Fläche gegen die Ebene der xy auch die Neigung der Curve gegen die Axe der x, welche in der Ebene der zx die Basis des Cylinders bildet, und folglich drückt das Integral $\int_{x_0}^{X} \sec \tau\, dx$ offenbar den auf dieser Curve zwischen den gegebenen Erzeugungslinien liegenden Bogen s aus. Hieraus folgt, daß der Flächeninhalt eines Stückes der cylindrischen Fläche, welches zwischen zwei Erzeugungslinien und zwischen zwei in zwei zu der Basis parallelen Ebenen befindlichen Curven liegt, dem Producten aus dem gegenseitigen Abstande dieser Ebenen und dem auf einer der Curven zwischen den beiden Erzeugungslinien liegenden Bogen gleich ist; und folglich ist der Flächeninhalt einer geraden cylindrischen Fläche dem Producte aus der Höhe und dem Umfange der Basis gleich.

Als Rechnungsbeispiel kann man den in der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ liegenden Theil der cylindrischen Fläche $x^2 - Rx + z^2 = 0$ bestimmen, so wird dieser Theil auf der Ebene xy von der Parabel $y^2 = R(R - x)$ begrenzt, welche die Projection des Durchschnittes des Cylinders und der Kugel auf dieser Ebene ist. Man hat folglich:

$$y=-\sqrt{R(R-x)},\quad Y=\sqrt{R(R-x)}$$

und außerdem ist:

$$\sec\tau=\sqrt{p^2+q^2+1}=\sqrt{p^2+1}=\sqrt{1+\frac{(\frac{1}{2}R-x)^2}{Rx-x^2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}R}{\sqrt{Rx-x^2}}.$$

Die Grenzen x_0, X sind ferner $x_0=0$, $X=R$. Man hat folglich für die auf der Seite der positiven z liegende Fläche, wenn man bemerkt, daß $\sec\tau$ von x unabhängig ist:

$$A=\int_{x_0}^{X}\int_{y}^{Y}\sec\tau\,dydx=\int_{0}^{R}\sec\tau\,dx(Y-y)$$

$$=\int_{0}^{R}R^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2R^2$$

und folglich für die ganze innerhalb der Kugel liegende Fläche:

$$A=4R^2.$$

Wenn man den Theil der Kugeloberfläche suchte, welcher auf der Seite der positiven y und der positiven z innerhalb des Cylinders liegt; so fände man:

$$x_0=0,\ X=R,\ y=\sqrt{R(R-x)},\quad Y=\sqrt{R^2-x^2},$$

$$\sec\tau=\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{R}{z}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

$$A=R\int_{0}^{R}\int_{\sqrt{R^2-Rx}}^{\sqrt{R^2-x^2}}dxdy\,\frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Ferner hat man:

$$\int\frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}+C,$$

$$\int_{\sqrt{R^2-Rx}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\sqrt{\frac{R}{R+x}}$$

$$=\arccos\sqrt{\frac{R}{R+x}},$$

folglich:

$$A=R\int_{0}^{R}dx\arccos\sqrt{\frac{R}{R+x}}.$$

Setzt man:

$$u=\arccos\sqrt{\frac{R}{R+x}},\quad x=R\tang^2u,$$

so kommt:

$$\int dx \arccos\sqrt{\frac{R}{R+x}} = \int u\,dx = ux - \int x\,du$$

$$= ux - R\int\left(\frac{1}{\cos^2 u} - 1\right)du = (x+R)u - R\,\mathrm{tang}\,u + C,$$

und folglich:

$$A = R\int_0^R dx \arccos\sqrt{\frac{R}{R+x}} = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)R^2.$$

Wenn man diese letzte Größe doppelt nimmt, so erhält man den auf der Seite der positiven y innerhalb des Cylinders liegenden Theil der Kugelfläche, welcher positiven und negativen Werthen der Ordinate z entspricht, und wenn man diesen Theil mit A bezeichnet; so hat man:

$$A = (\pi - 2)R^2 = (1{,}14159\ldots)R^2.$$

§. 79. Wir wollen uns in der Ebene der xy eine durch die Gleichung $y = f(x)$ ausgedrückte Curve beschrieben denken, und diese Curve sich um die Axe der x drehen lassen; so erzeugt sie eine Rotationsfläche, deren Gleichung folgende ist:

$$y^2 + z^2 = [f(x)]^2,$$

und der auf der Seite der positiven z zwischen zwei auf der Axe der x senkrechten Ebenen liegende Theil dieser Fläche wird durch die Gleichung:

$$A = \int_{x_0}^{X}\int_{-f(x)}^{f(x)} \sec\tau\, dy\, dx$$

gegeben, wofern die Function $f(x)$ zwischen den Grenzen x_0, X das Zeichen nicht ändert. Da man hat:

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{f(x)\,f'(x)}{z}, \quad q = \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z},$$

so ist:

$$\sec\tau = \sqrt{1 + \left[\frac{f(x)\,f'(x)}{z}\right]^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2} = \pm\frac{f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}},$$

$$A = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx\sqrt{1+[f'(x)]^2}\int_{-f(x)}^{+f(x)} \frac{dy}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}}.$$

Nun ist aber:

$$\int_{-f(x)}^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}} = \pi$$

und der Zahlenwerth des Productes:

$$f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2} = y\sqrt{1+y'^2}$$

drückt genau die Normale N der erzeugenden Curve aus. Man hat folglich:

$$A = \pi\int_{x_0}^{X} N\,dx$$

und der ganze Flächeninhalt der Rotationsfläche wird durch die Gleichung:

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{X} N dx.$$

gegeben.

§. 80. Man kann auf eine ganz directe Weise zu einer wichtigen Formel gelangen, welche die vorhergehende als einen besondern Fall unter sich begreift. Es bezeichne B die Fläche, welche auf der Rotationsfläche zwischen zwei festen, durch die Axe der x gehenden und einen Winkel α miteinander bildenden Ebenen und zwei auf dieser Axe senkrechten Ebenen $x = x_0$, $x = x$ liegt. Ferner bezeichne τ die Neigung der Erzeugungslinie im Puncte (x, y, z). Wenn man der Veränderlichen x den Zuwachs Δx ertheilt, so ist $\Delta_x B$ ein kleiner Theil der krummen Fläche, dessen Neigung gegen die Ebene der yz in allen seinen Puncten nahezu dieselbe bleibt und sehr wenig von $\frac{\pi}{2} - \tau$ verschieden ist. Wenn folglich P die Projection von $\Delta_x B$ auf die Ebene der yz bezeichnet, so hat man vermöge eines weiter oben bewiesenen Lehrsatzes:

$$\frac{\Delta_x B}{P} = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) + \varepsilon.$$

Aber P ist die Differenz zwischen zwei Sectoren, deren Halbmesser y und $y + \Delta y$ einen Winkel α mit einander bilden. Man hat folglich:

$$P = \frac{\alpha}{2}[(y + \Delta y)^2 - y^2] = \alpha y \Delta y \left(1 + \frac{\Delta y}{2y}\right),$$

und mithin:

$$\frac{\Delta_x B}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \alpha y \left[\sec\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) + \varepsilon\right]\left(1 + \frac{\Delta y}{2y}\right),$$

und wenn man zu der Grenze übergeht:

$$\frac{dB}{dx} = \frac{dy}{dx} \alpha y \sec\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right).$$

Es ist aber:

$$\frac{dy}{dx} \sec\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) = \pm \operatorname{tang} \tau \sec\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) = \frac{\operatorname{tang}\tau}{\sin\tau} = \frac{1}{\cos\tau} = \sec\tau$$

und außerdem ist das Product $\pm y \sec\tau$ dem absoluten Werthe der Normale N gleich, und man hat folglich:

$$\frac{dB}{dx} = N\alpha, \quad B = \int_{x_0}^{X} N\alpha \, dx = \alpha \int_{x_0}^{X} N dx.$$

Wenn man die Fläche haben will, welche durch die vollständige Umdrehung des zwischen den Grenzen x_0, X liegenden Bogens der Erzeugungslinie beschrieben wird; so muß man $\alpha = 2\pi$ setzen, und man erhält alsdann:

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{X} N dx,$$

oder was daſſelbe iſt:

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{X} y \sec\tau dx = 2\pi \int_{x_0}^{X} y \sqrt{1+y'^2}\, dx.$$

Beiſpiel 1. Die erzeugende Curve ſei eine in der Entfernung R zu der Axe der x parallele gerade Linie, ſo hat man:

$$N = R, \quad A = 2\pi R (X - x_0)$$

und folglich wird die Seitenfläche eines geraden Cylinders mit kreisförmiger Baſis durch das Product aus ſeiner Höhe und dem Umfange ſeiner Grundfläche ausgedrückt.

Beiſpiel 2. Die Erzeugungslinie ſei ein Kreis von dem Halbmeſſer R, deſſen Mittelpunct auf der Axe der x liegt; ſo hat man:

$$N = R, \quad A = 2\pi R (X - x_0).$$

Die Fläche der Kugelzone iſt folglich gleich dem Producte aus ihrer Höhe und dem Umfange eines größten Kreiſes. Setzt man $X - x_0 = 2R$, um die ganze Kugeloberfläche zu erhalten; ſo findet man, daß ſie der vierfachen Fläche des größten Kreiſes gleich iſt.

Beiſpiel 3. Die Erzeugungslinie ſei eine Ellipſe:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ſo iſt die erzeugte Oberfläche das Ellipſoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1,$$

und wenn man $a > b$, $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ ſetzt; ſo hat man:

$$N = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - e^2x^2},$$

$$A = 2\pi \frac{be}{a} \int_{x_0}^{X} \sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2}.$$

Setzt man nun $\frac{a}{e} = a'$, ſo kommt:

$$A = \pi \times \frac{2b}{a'} \int_{x^0}^{X} dx \sqrt{a'^2 - x^2}.$$

In der Ellipſe:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

wird aber die den Abſciſſen x_0, X entſprechende Fläche ausgedrückt durch:

$$\frac{2b}{a'} \int_{x_0}^{X} dx \sqrt{a'^2 - x^2}.$$

Wenn man also eine Ellipse sich um ihre große Axe drehen läßt, so ist der Flächeninhalt der durch die Umdrehung eines Bogens dieser Ellipse erzeugten Zone das Product aus der Zahl π und der Fläche, welche in einer zweiten Ellipse, deren große Axe in dem Verhältnisse von 1 zu $\frac{1}{e}$ größer geworden ist, als die der ersten Ellipse, zwischen den beiden Ebenen liegt, worin sich die Grundflächen der Zone befinden. Hieraus folgt, daß die ganze Oberfläche des Rotationsellipsoides durch folgende Gleichung ausgedrückt wird:

$$A = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{e} \operatorname{arc\,tang} \frac{ae}{b}.$$

Wenn man $a < b$ setzt, oder wenn sich die Ellipse um ihre kleine Axe drehet, und man setzt:

$$e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$$

und folglich:

$$N = \frac{b^2 e}{a^2} \sqrt{\frac{a^4}{b^2 e^2} + x^2};$$

so hat man:

$$A = 2\pi \frac{b^2 e}{a^2} \int_{x_0}^{X} dx \sqrt{\frac{a^4}{b^2 e^2} + x^2} = \pi A',$$

wo A' die in der Hyperbel:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{b^2 e^2 x^2}{a^4} = 1$$

zwischen den Ebenen $x = x_0$, $x = X$ liegende Fläche bezeichnet (§. 73), und man hat folglich für die ganze Oberfläche dieses zweiten Rotationsellipsoides:

$$A = 2\pi b^2 + \frac{\pi a^2}{e} l\left(\frac{1+e}{1-e}\right).$$

Beispiel 4. Die Erzeugungslinie sei eine Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ oder } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

so ist die Gleichung der erzeugten Oberfläche:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1, \text{ oder } \frac{y^2 + z^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

und drückt resp. ein Rotationshyperboloid mit zwei Fächern, oder mit einem Fache aus. Setzt man:

$$ae = \sqrt{a^2 + b^2},$$

so findet man:

$$N = \frac{b}{a} \sqrt{e^2 x^2 \mp a^2}, \quad A = 2\pi \frac{be}{a} \int_{x_0}^{X} dx \sqrt{x^2 \mp \frac{a^2}{e^2}} = \pi A',$$

wo A' die Fläche bezeichnet, welche zwischen den Ebenen $x = x_0$, $x = X$ in den Hyperbeln liegt, welche sich aus den ersten ergeben, wenn man die reelle Axe in dem Verhältnisse von 1 zu $\frac{1}{e}$ abnehmen läßt.

Beispiel 5. Die Erzeugungslinie sei eine Parabel $y^2 = 2px$, so ist $y^2 + z^2 = 2px$ die Gleichung des erzeugten Paraboloides, und man findet:

$$N = \sqrt{2px + p^2}, \quad N^2 = 2px + p^2, \quad x = \frac{N^2 - p^2}{2p},$$

$$dx = \frac{1}{p} N dN, \quad A = \frac{2\pi}{p} \int_{N_0}^{N} N^2 dN = \frac{2\pi}{3p} (N^3 - N_0^3).$$

Setzt man $x_0 = 0$, und folglich $N_0 = p$, so hat man:

$$A = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{N^3}{p} - p^2 \right).$$

Beispiel 6. Die Erzeugungslinie sei die Hyperbel $xy = \frac{1}{2}a^2$, so ist die Gleichung der erzeugten Fläche:

$$x^2 (y^2 + z^2) = \tfrac{1}{4} a^4.$$

Aus der Gleichung:

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{x} y \sec\tau \, dx$$

ergiebt sich:

$$A = \pi a^2 \int_{x_0}^{x} \sec\tau \frac{dx}{x}.$$

Ferner hat man:

$$\operatorname{tang}\tau = -\frac{y}{\frac{a^2}{2x}} = -\frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2}$$

und folglich:

$$x^2 = \frac{a^2}{2\operatorname{tang}\tau}, \quad lx = la - \tfrac{1}{2} l2 - \tfrac{1}{2} l\operatorname{tang}\tau,$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \frac{d\tau}{\sin\tau \cos\tau},$$

also:

$$A = -\tfrac{1}{2}\pi a^2 \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\sin\tau \cos^2\tau}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\pi a^2 \left(\frac{1}{\cos\tau} - \frac{1}{\cos\tau_0} + l\operatorname{tang}\frac{\tau_0}{2} - l\operatorname{tang}\frac{\tau}{2} \right).$$

Beispiel 7. Die Erzeugungslinie sei die logarithmische Linie $y = e^{\frac{x}{a}}$, so giebt die Formel:

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{x} y dx \sqrt{1 + y'^2}.$$

den Werth:

$$A=2\pi\int_{x_0}^{x} e^{\frac{x}{a}}dx\sqrt{1+y'^2}.$$

Ferner iſt:

$$y'=\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}},\quad dy'=\frac{1}{a^2}e^{\frac{x}{a}}dx,\quad e^{\frac{x}{a}}dx=a^2dy',$$

folglich:

$$A=2\pi a^2\int_{y'_0}^{y'} dy'\sqrt{1+y'^2}.$$

Nun iſt aber:

$$\int_{y'^2}^{y'} dy'\sqrt{1+y'^2}=\tfrac{1}{2}y'\sqrt{1+y'^2}+\tfrac{1}{2}l\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}+y'}{\sqrt{1+y'^2}-y'}\right)+C$$

$$=\tfrac{1}{2}\frac{\sin\tau}{\cos^2\tau}+\tfrac{1}{2}l\left(\frac{1+\sin\tau}{1-\sin\tau}\right)+C$$

und mithin:

$$A=\pi a^2\left[\frac{\sin\tau}{\cos^2\tau}+l\tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)-\frac{\sin\tau_0}{\cos^2\tau_0}-l\tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau_0}{2}\right)\right].$$

Beiſpiel 8. Die Erzeugungslinie ſei die Kettenlinie:

$$y=a\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2},$$

ſo hat man:

$$N=\frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

und wenn man $x_0=0$ ſetzt, ſo erhält man:

$$A=\pi a\int_0^x\left(1+\frac{e^{\frac{2x}{a}}+e^{-\frac{2x}{a}}}{2}\right)dx=\pi a\left[x+\frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}-e^{-\frac{2x}{a}}\right)\right]$$

Beiſpiel 9. Die Erzeugungslinie ſei die Cycloide:

$$x=R(\omega-\sin\omega),\quad y=R(1-\cos\omega),$$

ſo iſt:

$$dx\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{dx^2+dy^2}=Rd\omega\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\omega},$$

$$A=2^{\frac{3}{2}}\pi R^2\int_{\omega_0}^{\omega}(1-\cos\omega)^{\frac{3}{2}}d\omega=8\pi R^2\int_{\omega_0}^{\omega}\sin^3\frac{\omega}{2}d\omega.$$

Ferner hat man:

$$8\sin^3\frac{\omega}{2}=\left(\frac{e^{\frac{\omega}{2}\sqrt{-1}}-e^{-\frac{\omega}{2}\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right)^3=6\sin\frac{\omega}{2}-\sin\frac{3\omega}{2}$$

und folglich wenn man $\omega_1 = 0$ setzt:

$$A = 4\pi R^2 \left(\frac{8}{3} - 3\cos\frac{\omega}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3\omega}{2}\right)$$

Die ganze durch die halbe Cycloide erzeugte Rotationsfläche wird erhalten, wenn man $\omega = 2\pi$ setzt und ist:

$$A = \frac{64}{3}\pi R^2 = \frac{\pi}{3}(8R)^2.$$

§. 81. Wenn man nicht mehr die Curve $y = f(x)$, sondern die durch die Gleichung:

$$y = b + f(x)$$

ausgedrückte Curve, wo b eine positive Constante ist, sich um die Axe der x drehen läßt; so hat man:

$$N = y\sqrt{1+y'^2} = [b+f(x)]\times\sqrt{1+[f'(x)]^2},$$

$$A = 2\pi\int_{x_0}^{x} dx f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2},$$

$$+2\pi b\int_{x_0}^{X} dx\sqrt{1+y'^2} = A' + 2\pi bs,$$

wo A' den durch die Curve $y = f(x)$ erzeugten Theil der Oberfläche und s den Bogen der Curve $y = f(x)$ bezeichnet, welcher zwischen den den Abscissen x_0, x entsprechenden Puncten liegt.

Wenn man $-b$ für b, aber $f(x) < b$ setzte, so drückte $A' - 2\pi bs$ nicht mehr die Fläche A, sondern diese mit dem Zeichen — genommene Fläche aus, und man hätte:

$$A + A' = 2\pi bs.$$

Aus dem Vorhergehenden folgt: Wenn man einen Curvenbogen sich 1) um eine beliebige Axe und 2) um eine zu der ersten parallele und von ihr um die Länge b entfernte Axe drehen läßt, so ist der Unterschied zwischen den beiden erzeugten Flächen, wenn die beiden Axen auf derselben Seite des erzeugenden Bogens liegen, oder ihre Summe, wenn diese Axen auf verschiedenen Seiten dieses Bogens liegen, gleich dem Producte aus dem erwähnten Bogen und dem Umfange des von einem Puncte der zweiten Axe um die erste beschriebenen Kreises.

Vermittelst dieses Lehrsatzes, welchen man auch auf den Fall ausdehnen kann, wo der Curvenbogen von den auf der Rotationsaxe senkrechten Ebenen in mehreren Puncten getroffen wird, kann man leicht zeigen, daß jede Curve, welche einen Mittelpunct hat, bei ihrer Umdrehung um eine nicht durch diesen Mittelpunct gehende Axe eine Fläche erzeugt, deren Inhalt dem Producte aus ihrem Umfange und dem Umfange des von ihrem Mittelpuncte um diese Axe beschriebenen Kreises gleich ist.

§. 82. Die Fundamentalformel:

$$A = \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} dxdy\sec\tau$$

ſetzt voraus, daß die Projection der krummen Fläche auf die Ebene der xy von einer auf der Axe der x ſenkrechten Ebene nur in zwei Puncten geſchnitten wird; denn wenn dieſes nicht der Fall wäre, ſo müßte man die Fläche A, um ihren Inhalt zu beſtimmen, in mehrere Theile theilen, wovon jeder nach der vorhergehenden Formel berechnet werden könnte. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß die nach ihrer Größe geordneten Functionen:

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$$

von x zwiſchen den Grenzen $x=x_0$, $x=x$ die Ordinaten der verſchiedenen Linien ausdrücken, welche die verſchiedenen Theile der Projection der Fläche A zwiſchen ſich ſchließen und wir wollen die Fläche A in eben ſo viele entſprechende Theile theilen, deren Größen durch die doppelten Integrale:

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y_1} \sec\tau\, dy dx, \quad \int_{x_0}^{x}\int_{y_2}^{y_3} \sec\tau\, dy dx, \text{ etc.}$$

ausgedrückt werden; ſo erhält man durch Addition aller dieſer Integrale den Werth von A. Man hat folglich:

$$A = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y_1} \sec\tau\, dy dx + \int_{x_0}^{x}\int_{y_2}^{y_3} \sec\tau\, dy dx \text{ etc...}$$
$$= \int_{x_0}^{x}\left(\int_{y_0}^{y_1} \sec\tau\, dy + \int_{y_2}^{y_3} \sec\tau\, dy + \text{etc...}\right) dx.$$

In derſelben Vorausſetzung wird die Projection der Fläche A ausgedrückt durch:

$$\int_{x_0}^{x}\left(\int_{y_0}^{y_1} dy + \int_{y_2}^{y_3} dy + \text{etc.}\right) dx$$
$$= \int_{x_0}^{x} (y_1 - y_0 + y_3 - y_2 + \text{etc...})\, dx.$$

Wenn die Fläche A von den Parallelen zu der Axe der z in mehreren Puncten getroffen würde, d. h. wenn demſelben Werthe von x mehrere Werthe von $\sec\tau$ entſprächen; ſo könnte man dieſe Fläche vermittelſt der obigen Formeln nicht berechnen; aber man kann ſie alsdann immer in mehrere Theile zerlegen, wovon ſich jeder nach den angegebenen Methoden berechnen läßt.

Funfzehnte Vorlesung.

Fortsetzung der geometrischen Anwendungen. — Cubatur der Körper.

---

§. 83. Das Problem der Cubatur der Körper besteht in der Bestimmung des von einer, oder von mehreren gegebenen Flächen eingeschlossenen Volumes. Zuerst läßt sich leicht beweisen, daß das Volumen V eines geraden Cylinders mit einer beliebigen Basis B dem Producte aus dem Flächeninhalte der Basis B und der Höhe H gleich ist, so daß man $V = BH$ hat.

Beweis. Wir wollen den Cylinder so stellen, daß die Erzeugungslinie desselben zu der Axe der x parallel ist und daß die Ebene seiner Basis mit der Ebene der zy zusammenfällt. Es bezeichne $f(z)$ den linearen Durchschnitt der Basis mit einer auf der Axe der z senkrechten Ebene und b, v resp. den Theil der Basis B und des Volumens V, welcher unter der schneidenden Ebene liegt. Wenn man der Veränderlichen z einen Zuwachs Δz ertheilt, so bekommen b und v die Zuwächse Δb, Δv. Ferner hat man offenbar:

$$\Delta b = \Delta z[f(z) + \varepsilon], \quad \Delta V = H\Delta z[f(z) + \varepsilon'],$$

wo ε, ε' Größen bezeichnen, welche mit Δz verschwinden, und folglich:

$$\frac{db}{dz} = f(z), \quad \frac{dv}{dz} = Hf(z),$$

und wenn man von $z = z_0$ bis $z = Z$ integrirt, wo $z = z_0$ und $z = Z$ die Gleichungen der Ebenen sind, welche das cylindrische Volumen V begrenzen; so erhält man:

$$B = \int_{z_0}^{Z} f(z)dz, \quad V = H\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = B \times H,$$

was bewiesen werden sollte.

Wenn der Durchschnitt $f(z)$ der Basis B mit einer auf der Axe der z senkrechten Ebene sich in ein System mehrerer besonderer Längen $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, ... verwandelte, so müßte man die Basis B und das Volumen V in diesen Längen entsprechende Theile B_1, B_2, ..., V_1, V_2, ... zerlegen, und man erhielte alsdann:

$$V_1 = HB_1, \quad V_2 = HB_2, \quad V_3 = HB_3, \ldots,$$
$$V = V_1 + V_2 + V_3 \ldots = H(B_1 + B_2 + B_3 \ldots) = BH.$$

Wir wollen nun annehmen, daß das Volumen V gesucht würde, welches von einer beliebigen zwischen zwei Ebenen $x = x_0$, $x = X$ liegenden Fläche eingeschlossen wird. Es sei $F(x)$ der Inhalt des Durchschnittes des Volumens V mit einer auf der Axe der x senkrechten und der Abscisse x entsprechenden Ebene, und V bezeichne den zwischen den beiden Ebenen $x = x_0$, $x = x$ liegenden Theil des Volumens. Wenn man der Veränderlichen x einen Zuwachs Δx ertheilt, so bekommt das Volumen V den Zuwachs $\Delta V = \Delta x\,[F(x) + \varepsilon]$, wo ε eine Größe bezeichnet, welche mit Δx verschwindet. Denn das sehr kleine Volumen ΔV liegt zwischen den in und um dasselbe beschriebenen Cylindern, welche beide Δx zur Höhe und sehr wenig von $F(x)$ verschiedene Flächen zu ihren Grundflächen haben. Aus der vorhergehenden Gleichung folgt:

$$\frac{dV}{dx} = F(x), \quad dV = F(x)\,dx,$$

und wenn man zwischen den Grenzen x_0 und x, oder x_0 und X integrirt:

$$V = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx, \quad V = \int_{x_0}^{X} F(x)\,dx.$$

Diese Formel findet selbst in dem Falle statt, wo sich die Fläche $F(x)$ des Durchschnittes des Volumens V mit einer auf der Axe der x senkrechten Ebene in eine Summe mehrerer Flächen $F_1(x)$, $F_2(x)$,.... verwandelt, welche von verschiedenen Umfängen begrenzt werden. Alsdann ist das Volumen V die Summe mehrerer Volumina, welche durch:

$$\int_{x_0}^{X} F_1(x)\,dx, \int_{x_0}^{X} F_2(x)\,dx, \int_{x_0}^{X} F_3(x)\,dx, \ldots,$$

ausgedrückt werden, und man hat:

$$V = \int_{x_0}^{X} F_1(x)dx + \int_{x_0}^{X} F_2(x)dx + \text{etc.} = \int_{x_0}^{X} [F_1(x) + F_2(x) + \text{etc...}]dx$$
$$= \int_{x_0}^{X} F(x)\,dx.$$

§. 84. Zusatz 1. Wenn der Durchschnitt $F(x)$ constant und $= B$ ist, was statt findet, wenn das Volumen V ein Theil eines Cylinders ist; so hat man:

$$V = B\int_{x_0}^{X} dx = B(X - x_0) = BH,$$

wo H den gegenseitigen Abstand der beiden Ebenen bezeichnet. Hieraus folgt, daß das Volumen eines schiefen Cylinders von der Grundfläche B und der Höhe H durch das Product BH ausgedrückt wird.

Zusatz 2. Wenn der Durchschnitt $F(x)$ sich immer ähnlich bleibt, was z. B. der Fall ist, wenn das Volumen V ein Theil des Kegels ist, dessen Spitze im Anfangspuncte der Coordinaten und dessen Basis in einer auf der Axe der x senkrechten Ebene liegt; so ist der Flächeninhalt des Durchschnittes $F(x)$ dem Quadrate seiner Entfernung von der Spitze des Kegels proportional, so daß man, wenn B die Grundfläche und H die Höhe des Kegels bezeichnet, hat:

$$\frac{F(x)}{B} = \frac{x^2}{H^2}, \quad F(x) = \frac{Bx^2}{H^2},$$

$$V = \int_0^H \frac{Bx^2 dx}{H^2} = \frac{B}{H^2}\int_0^H x^2 dx = \frac{BH^3}{3H^2} = \frac{1}{3}BH.$$

Das Volumen eines Kegels von beliebiger Grundfläche ist folglich dem dritten Theile des Productes aus seiner Grundfläche und Höhe gleich.

Das Volumen eines zwischen den Ebenen $x_0 = h$, $x = H$ liegenden abgestumpften Kegels wird ausgedrückt durch:

$$V = \frac{B}{H^2}\int_h^H x^2 dx = \frac{B}{H^2}\left(\frac{H^3 - h^3}{3}\right).$$

Wenn man die kleine Grundfläche des abgestumpften Kegels mit b und die Höhe desselben mit h_1 bezeichnet, so hat man:

$$\frac{b}{B} = \frac{h^2}{H^2}, \quad \frac{h}{H} = \sqrt{\frac{b}{B}}, \quad h_1 = H - h,$$

und da:

$$H^3 - h^3 = (H - h)(H^2 + Hh + h^2)$$

ist; so findet man:

$$V = \frac{h_1}{3}\left(B + B\frac{h}{H} + B\frac{h^2}{H^2}\right) = \frac{h_1}{3}(B + \sqrt{Bb} + b),$$

d. h. das Volumen eines abgestumpften Kegels ist der dritte Theil des Productes, welches man erhält, wenn man seine Höhe mit der Summe dreier Flächen multiplicirt, welche resp. den beiden Grundflächen des Kegels und dem geometrischen Mittel zwischen ihnen gleich sind.

Wenn man den Satz: daß die Durchschnitte eines Kegels mit parallelen Ebenen den Quadraten der Entfernungen dieser Ebenen von der Spitze des Kegels proportional sind, nicht aus der Elementargeometrie entlehnen wollte; so könnte man denselben auf folgende Art beweisen. Es sei $f(\eta, \zeta) = 0$ der Durchschnitt des Kegels in der Entfernung $= 1$ vom Anfangspunkte oder von der Spitze des Kegels mit einer auf der Axe der x senkrechten Ebene, so wird die durch den Punct (η, ζ) gehende Erzeugungslinie durch die beiden Gleichungen:

$$\frac{y}{x} = \eta, \quad \frac{z}{x} = \xi,$$

ausgedrückt, und wenn man η, ζ zwischen den drei vorhergehen-

den Gleichungen eliminirt, so wird die resultirende Gleichung $f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ für alle Puncte sämmtlicher Erzeugungslinien erfüllt, und sie drückt folglich die in Rede stehende Kegelfläche aus. Die Gleichungen der Durchschnitte dieser Fläche mit den Ebenen $x = h$, $x = \mathrm{H}$ sind:

$$f\left(\frac{y}{h}, \frac{z}{h}\right) = 0, \; f\left(\frac{y}{\mathrm{H}}, \frac{z}{\mathrm{H}}\right) = 0,$$

und ihre Flächeninhalte a, A werden nach einem bewiesenen Lehrsatze (§. 72) durch $\mathrm{A}_1 h^2$, $\mathrm{A}_1 \mathrm{H}^2$ ausgedrückt, wo A_1 den Inhalt der von der Curve $f(y, z) = 0$ eingeschlossenen Fläche bezeichnet, und man hat folglich:

$$\frac{a}{\mathrm{A}} = \frac{h^2}{\mathrm{H}^2},$$

was zu beweisen war.

§. 85. Zusatz 3. Man hat:

$$\mathrm{V} = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}(x)\, dx = (\mathrm{X} - x_0)\, \mathrm{F}(\xi),$$

und folglich ist das Volumen eines Körpers gleich dem Producte aus der gegenseitigen Entfernung der beiden den Körper begrenzenden parallelen Ebenen und aus einem Mittelwerthe der Flächeninhalte der Durchschnitte dieses Körpers mit Ebenen, welche zwischen den beiden ersten liegen und zu ihnen parallel sind. Hieraus folgt, daß das Verhältniß zwischen einem gegebenen Volumen und seiner Projection auf eine beliebige Axe eine Mittelgröße zwischen den Flächen der verschiedenen Durchschnitte dieses Volumens mit Ebenen, welche auf der Axe senkrecht sind, ist. Man könnte auch leicht zeigen, daß das Verhältniß zwischen einem Volumen und seiner Projection auf eine Ebene eine Mittelgröße zwischen den verschiedenen Werthen ist, welche das Verhältniß der von der Oberfläche dieses Volumens auf einer stets zu der Ebene parallelen Secante abgeschnittenen Längen annehmen kann.

Zusatz 4. Für ein zweites Volumen V′ hat man:

$$\mathrm{V}' = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}(x)\, dx,$$

und folglich:

$$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}'} = \frac{\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}(x)\, dx}{\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}(x)\, dx};$$

aber wenn man in der bekannten Gleichung:

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \varphi(x)\chi(x)\, dx = \varphi(\xi) \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \chi(x)\, dx,$$

setzt:

$$f(x)=\mathrm{F}(x),\quad \chi(x)=\mathrm{F}(x),\quad \varphi(x)=\frac{\mathrm{F}(x)}{F(x)},$$

so ergiebt sich daraus:

$$\frac{\mathrm{V}'}{\mathrm{V}}\frac{\int_{x_0}^{\mathrm{X}}\mathrm{F}(x)\,dx}{\int_{x_0}^{\mathrm{X}}F(x)\,dx}=\frac{\mathrm{F}(\xi)}{F(\xi)}.$$

Hieraus folgt, daß das Verhältniß zwischen den beiden Volumen V, V′ eine Mittelgröße zwischen den verschiedenen Werthen ist, welche das Verhältniß der beiden Durchschnitte dieser beiden Volumina mit einer stets zu einer gegebenen Ebene parallelen Ebene annehmen kann, und da das Verhältniß der beiden Durchschnitte nach §. 72 selbst eine Mittelgröße zwischen den verschiedenen Werthen des Verhältnisses der Längen ist, welche die beiden Durchschnittslinien auf einer stets zu einer gegebenen Axe parallelen beweglichen geraden Linie abschneiden; so folgt, daß das Verhältniß der von den beiden krummen Oberflächen eingeschlossenen Volumina eine Mittelgröße zwischen den Werthen des Verhältnisses der Längen ist, welche die beiden krummen Oberflächen von einer stets zu einer gegebenen Axe parallelen geraden Linie abschneiden.

Zusatz 5. Aus dem vorhergehenden Zusatze folgt: 1) wenn die Durchschnitte zweier Volumina mit einem Systeme paralleler Ebenen in einem constanten Verhältnisse zu einander stehen, so stehen die beiden Volumina auch in demselben Verhältnisse zu einander; 2) daß, wenn die von den Oberflächen der beiden Volumina auf einer beständig zu einer gewissen Axe parallelen geraden Linie abgeschnittenen Längen in einem constanten Verhältnisse stehen, die beiden Volumina auch in demselben Verhältnisse zu einander stehen. Dieses findet z. B. statt, wenn das eine Volumen V von einer geschlossenen krummen Oberfläche begrenzt wird, deren Gleichung:

$$f(x, y, z)=0$$

ist, während das andere Volumen V′ von einer der krummen Flächen:

$$f\left(\frac{x}{a}, y, z\right)=0,\ f\left(x, \frac{y}{b}, z\right)=0,\ f\left(x, y, \frac{z}{c}\right)=0$$

eingeschlossen wird. Denn wenn sich aus der ersten Gleichung ergiebt:

$$x=\varphi(y, z),\quad y=\chi(x, z),\quad z=\psi(x, y),$$

so folgt aus den letzten:

$$x=a\varphi(x, y, z),$$

oder:

$$y=b\chi(x, y, z),$$

oder:

$$z=c\psi(x, y, z),$$

woraus erhellet, daß die beiden krummen Oberflächen auf den zu einer der Axen parallelen geraden Linien Längen abschneiden, welche in einem constanten Verhältnisse a, oder b, oder c zu einander stehen, und folglich verhält sich das Volumen V zu dem Volumen V'_1 wie 1 zu a, oder b, oder c.

Wenn man successive die Volumina mit einander vergleicht, welche von den durch die vier folgenden Gleichungen:

$$f(x, y, z)=0,\quad f\left(\frac{x}{a}, y, z\right)=0$$

$$f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, z\right)=0,\ f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)=0,$$

ausgedrückten krummen Flächen begrenzt werden; so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, daß das Verhältniß des zweiten Volumens zum ersten, des dritten zum zweiten und des vierten zum dritten resp. durch die Zahlen a, b, c, und folglich das Verhältniß des vierten Volumens zu dem ersten durch das Product abc ausgedrückt wird. Um also das von einer geschlossenen und durch eine Gleichung von der Form:

$$f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)=0,$$

ausgedrückten krummen Fläche begrenzte Volumen zu finden, indem a, b, c drei positive Constanten bezeichnen, braucht man nur das von der krummen Fläche $f(x, y, z)=0$ begrenzte Volumen zu bestimmen und dasselbe durch das Product der drei Constanten a, b, c zu multipliciren. Wenn $a=b=c$ ist, so reducirt sich die Gleichung:

$$f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)=0$$

auf die Form:

$$f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right)=0$$

und drückt die Oberfläche eines Körpers aus, welcher dem von der Oberfläche $f(x, y, z)=0$ begrenzten Körper ähnlich ist. Ferner verhalten sich die Dimensionen des zweiten Körpers zu denen des ersten, wie a zu 1, und aus den vorhin bewiesenen Sätzen folgt, daß sich die Volumina zweier ähnlicher Körper wie die Cubi oder Würfel ihrer respectiven Dimensionen verhalten.

§. 86. Zur Anwendung der Formel:

$$A=\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx$$

braucht man nur den Flächeninhalt $F(x)$ des Durchschnittes des Körpers mit einer auf der Axe der x senkrechten Ebene zu berechnen, was vermittelst der bereits aufgestellten Principien leicht geschehen kann.

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß x_0, X zwei Constanten, y, Y zwei Functionen der Veränderlichen x und z, Z zwei Functionen der Veränderlichen x, y sind, und daß man das Volumen bestimmen soll, welches einerseits von den durch die beiden Gleichungen:

$$z=z, \quad z=Z$$

ausgedrückten krummen Flächen, andererseits von den beiden durch die Gleichungen:

$$y=y, \quad y=Y$$

ausgedrückten cylindrischen Flächen und endlich von den beiden Ebenen:

$$x=x_0, \quad x=X$$

begrenzt wird; so wird der Durchschnitt $EFF'E' = F(x)$ dieses Volumens mit einer zu der Ebene der yz parallelen und einem besondern Werthe der Abscisse entsprechenden Ebene von vier Linien eingeschlossen, nämlich von den auf den krummen Flächen $z=z$, $z=Z$ liegenden beiden Curven EF, $E'F'$ und von zwei zu der Axe der z parallelen und auf den Cylindern $y=y$, $y=Y$ liegenden geraden Linie EE', FF', und um die Gleichungen dieser vier Linien zu erhalten, braucht man nur x in den Gleichungen:

$$z=z, \quad z=Z, \quad y=y_0, \quad y=Y$$

als constant zu betrachten. Bezeichnet nun $f(x, y)$ den linearen Durchschnitt GG' der Fläche $F(x)$ mit einer auf der Axe der y senkrechten und einem besondern Werthe von y entsprechenden Ebene; so hat man offenbar:

$$f(x, y) = GG' = Gg - gG' = Z - z_0$$

und nach bekannten Formeln:

$$F(x) = \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy = \int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\,dy = \int_{y_0}^{Y} \int_{z_0}^{Z} dz\,dy.$$

Man hat also in dem allgemeinsten Falle drei Integrationen zu verrichten, nämlich eine in Beziehung auf z zwischen den Grenzen $z=z_0$, $z=Z$, welche Functionen von x und y sind, die zweite zwischen den Grenzen y_0, Y, welches blos Functionen von x sind und die dritte zwischen den constanten Grenzen x_0, X. Wenn sich die beiden cylindrischen Flächen $y=y_0$, $y=Y$ nach zwei Erzeugungslinien durchschneiden, und wenn man annimmt, daß x_0, X genau die Abscissen der auf den erwähnten Erzeugungslinien liegenden Puncte bezeichnen, so wird das Volumen V in allen Richtungen von den zwei krummen Flächen und von den beiden cylindrischen Flächen begrenzt. Dasselbe würde noch der Fall sein, wenn sich die beiden cylindrischen Flächen nach den, den Abscissen x_0, X entsprechenden Erzeugungslinien berührten. Diese beiden cylindrischen Flächen reducirten sich auf eine einzige, wenn die

beiden Functionen y_0, Y zwei aus einer einzigen Gleichung zwischen y und x abgeleitete Werthe von y ausdrückten.

Endlich kann es in derselben Voraussetzung geschehen, daß die Flächen $z = z_0$, $z = Z$ von einander verschieden sind und sich nach einer auf der cylindrischen Fläche liegenden Curve durchschneiden, oder daß z_0, Z die beiden aus einer einzigen Gleichung $F(x, y, z) = 0$, welche eine convexe und überall geschlossene krumme Fläche ausdrückt, und um welche die cylindrische Fläche beschrieben wäre, abgeleitete Werthe von z sind. In dem ersten Falle wird das Volumen V in allen Richtungen von den krummen Flächen begrenzt und im zweiten Falle drückt V das von der krummen Oberfläche:

$$F(x, y, z) = 0$$

eingeschlossene Volumen aus.

§. 87. Die Fläche $F(x)$ ist leicht zu bestimmen, wenn die krumme Oberfläche eine Rotationsfläche ist. Wir wollen annehmen, daß man in der Ebene der xy eine durch die Gleichung $y = f(x)$ ausgedrückte Curve beschrieben habe und dieselbe sich um die Axe der x drehen lasse; so erzeugt sie eine Rotationsfläche, deren Durchschnitt $F(x)$ mit einer auf der Axe der x senkrechten Ebene ein Kreis ist, dessen Halbmesser die Ordinate der erzeugenden Curve ist. Man hat also:

$$F(x) = \pi y^2$$

und folglich:

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} y^2 \, dx.$$

Beispiel 1. Die erzeugende Curve sei ein Kreis $x^2 + y^2 = R^2$, so ist:

$$V = \pi \int_0^x (R^2 - x^2)\, dx = \pi x (R^2 - \tfrac{1}{3} x^2) = \tfrac{2}{3} \pi R^2 x + \tfrac{1}{3} \pi y^2 x.$$

Das Volumen eines Kugelabschnittes, welcher zwischen zwei parallelen Ebenen liegt, wovon die eine durch den Mittelpunkt der Kugel geht, übertrifft das Volumen des geraden Kegels, dessen Höhe die des Kugelabschnittes und dessen Grundfläche die kleine Grundfläche des letztern ist, genau um eine Größe, welche dem Producte aus der Oberfläche der Kugelzone und dem dritten Theile des Halbmessers der Kugel gleich ist. Wenn die Höhe des Kugelabschnittes dem Halbmesser R gleich wird, so wird das Volumen $V = \frac{2}{3} \pi R^3$ und das Doppelte dieser Größe, nämlich $\frac{4}{3} \pi R^3$, drückt das Volumen der ganzen Kugel aus. Hieraus folgt nach §. 85, daß das Volumen des Ellipsoides $= \frac{4}{3} \pi abc$ ist.

Beispiel 2. Die Erzeugungslinie sei die Parabel $y^2 = 2px$, so hat man, wenn man $x_0 = 0$ setzt:

$$V = \pi p \int_0^x 2x\, dx = \pi p x^2 = \tfrac{1}{2} \pi y^2 x.$$

Das Volumen des Körpers, welcher durch die Umdrehung eines

zwischen dem Scheitel und der Ebene $x=x$ liegenden Stückes der Parabel erzeugt wird, ist folglich die Hälfte des Volumens des umschriebenen Cylinders.

Beispiel 3. Die Erzeugungslinie sei die Curve $y=Ax^a$, so findet man, wenn man $x_0=0$ setzt:

$$V=\pi A^2\int_0^x x^{2a}dx=\pi A^2\frac{x^{2a+1}}{2a+1}=\frac{1}{2a+1}\,y^2x.$$

Das Volumen des durch die Umdrehung der von dieser Curve begrenzten Fläche erzeugten Körpers verhält sich folglich zu dem Volumen des umschriebenen Cylinders, wie 1 zu $2a+1$.

Beispiel 4. Die Erzeugungslinie sei die logarithmische Curve $y=a\lg x$, so hat man, wenn man $x_0=0$ setzt:

$$V=\pi a^2\int_0^x [\lg(x)]^2dx=\pi a^2x\left\{[\lg(x)]^2-2\lg x+2\right\}.$$

Wenn die Gleichung der logarithmischen Curve auf die Form $y=e^{\frac{x}{a}}$ gebracht wäre, so fände man, wenn man wieder $x_0=0$ setzt:

$$V=\pi\int_0^x e^{\frac{2x}{a}}dx=\frac{\pi a}{2}\left(e^{\frac{2x}{a}}\right)=\frac{\pi a}{2}(y^2-1).$$

Beispiel 5. Die Erzeugungslinie sei die Kettenlinie:

$$y=a\,\frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2},$$

so hat man, wenn man $x_0=0$ setzt:

$$V=\frac{\pi a^2}{4}\int_0^x\left(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx=\frac{\pi a^2}{2}\left[x+\frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}}-e^{-\frac{2x}{a}}\right)\right].$$

Beispiel 6. Die Erzeugungslinie sei die Cycloide:

$$x=R(\omega-\sin\omega),\quad y=R(1-\cos\omega),$$

so hat man:

$$dx=yd\omega,\quad y^2dx=y^3d\omega=R^3(1-\cos\omega)^3d\omega,$$

$$V=\pi R^3\int_{\omega_0}^{\omega}(1-\cos\omega)^3d\omega,$$

und wenn man $x_0=0$, $\omega_0=0$ setzt:

$$V=\pi R^3\int_0^{\omega}(1-\cos\omega)^3d\omega.$$

Ferner ist:

$$(1-\cos\omega)^3=2^3\sin^6\frac{\omega}{2}=\frac{1}{(-2)^3}\left(e^{\frac{\omega}{2}\sqrt{-1}}-e^{-\frac{\omega}{2}\sqrt{-1}}\right)^6$$

$$=\tfrac{1}{4}(10-15\cos\omega+6\cos 2\omega-\cos 3\omega),$$

und folglich:

$$V = \frac{\pi R^3}{4}(10\omega - 15\sin\omega + 3\sin 2\omega - \tfrac{1}{3}\sin 3\omega).$$

In dieser Gleichung braucht man nur $\omega = 2\pi$ zu setzen, um das Volumen des durch die Umdrehung der von dem ersten Cycloidenbogen eingeschlossenen Fläche erzeugten Körpers zu erhalten, und auf diese Weise findet man:

$$V = 5\pi^2 R^3.$$

§. 88. Wenn man nicht blos eine durch die Gleichung $y = f(x)$ ausgedrückte Curve, sondern zwei Curven $y = y$, $y = Y$ sich um die Axe der x drehen läßt, wo y, Y zwei Functionen der Veränderlichen x sind, deren Werthe zwischen den Grenzen $x = x_0$, $x = X$ immer positiv sind; so wird das durch die Umdrehung der zwischen den beiden Curven liegenden Fläche erzeugte Volumen offenbar durch die Differenz der Integrale:

$$\pi\int_{x_0}^{X} Y^2 dx, \quad \pi\int_{x_0}^{X} y^2 dx,$$

ausgedrückt, und man hat:

$$V = \pi\int_{x_0}^{X}(Y^2 - y^2)dx = 2\pi\int_{x_0}^{X}\int_{y}^{Y} y\,dy\,dx.$$

Zu derselben Gleichung gelangt man sehr einfach, wenn man bemerkt, daß der Durchschnitt $F(x)$ des Volumens V die Differenz zweier Kreise ist, deren Halbmesser y und Y sind, so daß man hat:

$$F(x) = \pi Y^2 - \pi y^2 = \pi(Y^2 - y^2), \text{ etc.}$$

§. 89. Wenn die Coordinaten y, Y alle um dieselbe Größe b zunehmen, oder wenn sich die Rotationsaxe von allen Puncten der beiden Curven um dieselbe Größe b entfernt; so wird das Volumen des neuen erzeugten Körpers ausgedrückt durch:

$$V' = \pi\int_{x_0}^{X}[(Y+b)^2 - (y+b)^2]dx$$
$$= \pi\int_{x_0}^{X}(Y^2 - y)^2\,dx + 2\pi b\int_{x_0}^{X}(Y - y)\,dx.$$

Aber das Integral:

$$\int_{x_0}^{X}(Y - y)dx$$

drückt den Inhalt A der zwischen den beiden Curven $y = y$, $y = Y$ liegenden ebenen Fläche aus und das Integral:

$$\pi\int_{x_0}^{X}(Y^2 - y^2)dx$$

ist das bereits berechnete Volumen V. Man hat also:

$$V' = V + 2\pi bA.$$

Hieraus folgt: wenn man eine ebene Fläche sich um eine in ihrer Ebene liegende, aber nicht durch sie gehende Axe und dann um eine zweite von der fraglichen Fläche um die Größe b weiter entfernte zu der ersten parallelen Axe drehen läßt, so ist der Unterschied der durch die Umdrehung der ebenen Fläche um die zweite und um die erste Axe erzeugten Volumina gleich dem Producte aus dem Inhalte dieser Fläche und dem Umfange des Kreises, dessen Halbmesser der gegenseitigen Entfernung der beiden Rotationsaxen gleich ist.

Wenn sich die ebene Fläche A durch eine in der Entfernung b zu der Axe der x parallel gezogene gerade Linie in zwei symmetrische Theile theilen läßt; so muß man haben:

$$y = b - f(x), \quad Y = b + f(x),$$

und folglich ist:

$$V = \pi \int_{x_0}^{X} \left\{ [b + f(x)]^2 - [b - f(x)]^2 \right\} dx = 4\pi b \int_{x_0}^{X} f(x) dx;$$

aber man hat auch:

$$A = \int_{x_0}^{X} \left\{ [b + f(x)] - [b - f(x)] \right\} dx = 2 \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx$$

und folglich $V = 2\pi b A$. Wenn man also eine ebene Fläche durch eine Axe in zwei symmetrische Theile theilen kann, so ist das Volumen, welches durch die Umdrehung dieser Fläche um eine zweite zu der ersten parallele und nicht durch die fragliche Fläche gehende Axe erzeugt wird, gleich dem Producte aus dem Inhalte dieser Fläche und dem Umfange des Kreises, dessen Halbmesser der gegenseitigen Entfernung der beiden Rotationsaxen gleich ist. So ist z. B., das durch die Umdrehung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

um die durch einen Endpunct der Axe $2b$ gezogene Tangente erzeugte Volumen gleich dem Producte aus dem Flächeninhalte πab der Ellipse und dem Umfange des von dem Mittelpuncte dieser Curve beschriebenen Kreises; also $V = 2\pi^2 ab^2$.

§. 90. Aus der Formel:

$$V = \int_{x_0}^{X} F(x) dx$$

kann man folgenden bemerkenswerthen Lehrsatz ableiten: Wenn zwei zu einer Axe parallele Ebenen gegeben sind, wovon in der einen ein geschlossener Umfang liegt, und man läßt eine gerade Linie sich so fortbewegen, daß sie successive durch die verschiedenen Puncte dieses Umfanges geht und mit der betrachteten Axe immer einen rechten Winkel bildet; so ist das Volumen V des Körpers, welcher von der durch die Bewegung der geraden Linie erzeugten krummen Fläche und von den beiden gegebenen Ebenen eingeschlos-

sen wird, gleich dem Producte aus seiner Höhe und aus der halben Summe der ebenen Flächen, welche seine Grundflächen bilden.

Beweis. Wir wollen die gegebene Axe zur Axe der x nehmen und es sei b die gegenseitige Entfernung der beiden zu dieser Axe parallelen Ebenen. Wenn man das Volumen V mit einer auf derselben Axe senkrechten und der Abscisse x entsprechenden Ebene durchschneidet, so ist der Durchschnitt F (x) offenbar ein Trapez, dessen parallele Seiten die geradlinigen Durchschnitte der schneidenden Ebene mit den beiden Grundflächen des Volumens V sind. Wenn man diese beiden Durchschnitte mit $f(x)$ und $\mathrm{f}(x)$ bezeichnet, so hat man:

$$\mathrm{F}(x)=\frac{b}{2}\,[f(x)+\mathrm{f}(x)],\quad \mathrm{V}=b\,\frac{\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+\int_{x_0}^{x}\mathrm{f}(x)\,dx}{2}$$

Aber wenn man die beiden Grundflächen mit A und A′ bezeichnet, so hat man auch:

$$\mathrm{A}=\int_{x_0}^{x} f(x)dx,\quad \mathrm{A}'=\int_{x_0}^{x}\mathrm{f}(x)dx,$$

folglich:

$$\mathrm{V}=b\,\frac{\mathrm{A}+\mathrm{A}'}{2}.$$

§. 91. Um von der Formel:

$$\mathrm{V}=\int_{x_0}^{\mathrm{X}}\int_{y_0}^{\mathrm{Y}} z\,dx\,dy$$

eine Anwendung zu machen, wollen wir das Volumen V suchen, welches zwischen der Ebene der xy, einer cylindrischen Fläche, deren Erzeugungslinie zu der Axe der z parallel ist und der Oberfläche des durch die Gleichung $xy=cz$ oder $z=\frac{xy}{c}$ ausgedrückten hyperbolischen Paraboloides liegt; so haben wir:

$$\mathrm{V}=\frac{1}{c}\int_{x_0}^{\mathrm{X}}\int_{y}^{\mathrm{Y}} xy\,dy\,dx=\frac{1}{2c}\int_{x}^{\mathrm{X}}(\mathrm{Y}^2-y^2)\,x\,dx.$$

Wenn sich die Basis der cylindrischen Fläche auf einen durch die Gleichung:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\mathrm{R}^2,$$

ausgedrückten Kreis reducirt, so ist:

$$y=b-\sqrt{\mathrm{R}^2-(x-a)^2},\quad \mathrm{Y}=b+\sqrt{\mathrm{R}^2-(x-a)^2},$$
$$\mathrm{Y}^2-y^2=4b\,\sqrt{\mathrm{R}^2-(x-a)^2},$$
$$x_0=a-\mathrm{R},\quad \mathrm{X}=a+\mathrm{R}$$

und folglich:

$$\mathrm{V}=2\,\frac{b}{c}\int_{a-\mathrm{R}}^{a+\mathrm{R}}\sqrt{\mathrm{R}^2-(x-a)^2}\times x\,dx,$$

oder wenn man $x-a=Rt$ setzt:

$$V=2\,\frac{b}{c}R^2\int_{-1}^{+1}(a+Rt)\,\sqrt{1-t^2}\,dt.$$

Ferner ist offenbar:

$$\int_{-1}^{+1}t\sqrt{1-t^2}\,dt=0,$$

während das Integral:

$$\int_{-1}^{+1}dt\,\sqrt{1-t^2}$$

die Hälfte der Fläche des Kreises von dem Halbmesser $=1$ ausdrückt, und folglich $=\frac{\pi}{2}$ ist. Man hat also:

$$V=\pi R^2\,\frac{bc}{a},$$

und das gesuchte Volumen ist mithin gleich dem Producte aus dem Flächeninhalte πR^2 der Grundfläche und einer vierten Proportionale zu den drei Längen a, b und c.

Wenn man für die cylindrische Fläche mit einer kreisförmigen Basis ein System von vier auf den Axen der x und der y senkrechten Ebenen $x=x_0$, $x=X$, $y=y_0$, $y=Y$ substituirt; so findet man:

$$V=\frac{1}{4c}(X^2-x_0^2)(Y^2-y_0^2)$$
$$=(X-x_0)(Y-y_0)\,\frac{x_0y_0+x_0Y+Xy_0+XY}{4c}$$

und wenn man setzt:

$$z_1=\frac{x_0y_0}{c},\quad z_2=\frac{x_0Y}{c},\quad z_3=\frac{Xy_0}{c},\quad z_4=\frac{XY}{c},$$

so ist:
$$V=(X-x_0)(Y-y_0)\,\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}.$$

Wir wollen noch bemerken, daß man, um das hyperbolische Paraboloid zu construiren, nur das windschiefe Viereck zu zeichnen braucht, dessen Winkelspitzen mit den Endpuncten der Ordinaten z_1, z_2, z_3, z_4 zusammenfallen und auf zwei gegenüberliegenden Seiten desselben eine gerade Linie sich fortbewegen zu lassen, welche beständig in einer zu den beiden andern Seiten parallelen Ebene liegt.

Auf diese Weise erhält man folgenden Satz: Wenn man auf den vier Seitenflächen eines geraden Prismas, dessen Grundfläche ein Rechteck ist, ein windschiefes Viereck beschreibt und eine gerade Linie sich auf zwei gegenüberliegenden Seiten dieses Viereckes so bewegen läßt, daß sie stets zu den Seitenflächen des Prismas parallel bleibt, worin die beiden andern Seiten des Viereckes liegen; so ist das Volumen, welches zwischen der durch diese ge-

rade Linie erzeugten Fläche und der rechteckigen Grundfläche des Prismas liegt, gleich dem Producte aus dem Flächeninhalte dieſes Rechteckes und dem vierten Theile der Summe der vier Längen, welche auf den Kanten des Prismas zwiſchen der Grundfläche und dem windſchiefen Vierecke liegen.

§. 92. Die Formel:

$$V = \int_{x_0}^{X} F(x)\,dx$$

zeigt auch, daß man zur Beſtimmung des von einer gegebenen Oberfläche begrenzten Volumens nur eine beliebige Axe zu ziehen und in einer durch dieſe Axe gelegten feſten Ebene eine Hülfscurve von ſolcher Beſchaffenheit zu beſchreiben braucht, daß der Durchſchnitt des Volumens mit einer auf dieſer Axe ſenkrechten beweglichen Ebene immer dem Rechtecke gleich iſt, welches aus einer gegebenen geraden Linie b und dem geradlinigen Durchſchnitte der beweglichen Ebene mit der zwiſchen der Hülfscurve und der Axe liegenden Fläche conſtruirt iſt. Wenn man annimmt, daß dieſe Fläche in dem Sinne der Axe von zwei geraden Linien begrenzt wird, nach welchen die in ihre äußerſten beiden Lagen gekommene bewegliche Ebene die feſte Ebene durchſchneidet und ſie mit der Länge b multiplicirt; ſo iſt das Product genau das Maß des betrachteten Volumens.

Denn wenn die betrachtete Axe zur Axe der x genommen wird und $F(x)$ iſt der Durchſchnitt des Volumens mit einer auf dieſer Axe ſenkrechten Ebene, ſo iſt $\frac{F(x)}{b}$ die Ordinate der Hülfscurve oder der geradlinige Durchſchnitt der zwiſchen der Curve und der Axe liegenden Fläche. Dieſe Fläche wird folglich ausgedrückt durch:

$$\int_{x_0}^{X} \frac{F(x)}{b}\,dx = \frac{1}{b}\int_{x_0}^{X} F(x)dx$$

und wenn man dieſes Integral mit der Länge b multiplicirt; ſo erhält man offenbar das Volumen:

$$V = \int_{x_0}^{X} F(x)dx.$$

Beiſpiel 1. Wenn das Volumen V das eines Kegels oder einer Pyramide mit beliebiger Grundfläche iſt, wovon die Spitze mit dem Anfangspuncte zuſammenfällt, und man nimmt eine auf der Grundfläche ſenkrechte gerade Linie zur Axe der x; ſo iſt der Durchſchnitt $F(x)$ dem Quadrate x^2 proportional, und folglich iſt die Hülfscurve eine Parabel, welche den Anfangspunct zum Scheitel und die Axe der x zur Axe hat; und da die zwiſchen einer Parabel, ihrer Axe und einer Ordinate liegende Fläche $\frac{2}{3}$ des umſchriebenen Rechteckes beträgt, ſo folgt daraus, daß das Volumen eines Kegels oder einer Pyramide mit einer beliebigen Baſis dem dritten Theile des Volumens eines Cylinders von derſelben Grundfläche und derſelben Höhe gleich iſt.

Beiſpiel 2. Wenn der Durchſchnitt $F(x)$ ſich auf ein Trapez reducirt, deſſen parallele Seiten die Durchſchnitte zweier ebener Flächen ſind, deren Ebenen zu der gegebenen Axe parallel ſind, und b bezeichnet die gegenſeitige Entfernung der beiden Ebenen; ſo iſt die Ordinate der Hülfscurve genau die halbe Summe der eben erwähnten Durchſchnittslinien, und hieraus ergiebt ſich leicht, daß die zwiſchen der Axe der x und der Hülfscurve liegende Fläche die halbe Summe der beiden ebenen Flächen iſt. Aus dem Vorhergehenden ergiebt ſich der Lehrſatz in §. 90 unmittelbar.

Ebenſo leicht könnte man vermittelſt des letzten Lehrſatzes das Volumen beſtimmen, welches in einer Kugel, einem Hyperboloide, Ellipſoide ꝛc. zwiſchen zwei parallelen Ebenen liegt.

Sechszehnte Vorlesung.

Andere Ableitungsart der Formeln für die Quadratur ebener Flächen und für die Cubatur der Körper.

---

§. 93. Da das Problem der Quadratur der Flächen und der Cubatur der Körper sehr wichtig ist, so wird es nicht überflüssig sein, die Auflösung desselben noch aus einem neuen allgemeinern Gesichtspuncte zu betrachten.

Wenn man eine ebene oder krumme, aber völlig fixirte Fläche betrachtet, so wird die Lage eines Punctes derselben durch zwei auf einander senkrechte oder schiefe, geradlinige oder krummlinige etc. Coordinaten bestimmt, welche wir in allen Fällen durch x, y bezeichnen wollen, und eine beliebige, auf dieser Fläche beschriebene Linie kann durch eine Gleichung ausgedrückt werden, deren erster Theil die beiden Veränderlichen x, y, oder wenigstens eine derselben enthält. In diesem letzten Falle, d. h. wenn die gegebene Gleichung nur eine der Veränderlichen x, y enthält, werden wir sagen, daß die entsprechende Linie von der ersten Art ist. Die Linien der ersten Art sind also diejenigen, deren Gleichungen folgende Form haben:

$$f(x) = 0, \text{ oder } f(y) = 0,$$

welche sich, wenn man sie in Beziehung auf die eine darin vorkommende Veränderliche auflöst, auf folgende reduciren:

$$x = \text{const}, \text{ oder } y = \text{const}.$$

Dagegen werden wir Linien der zweiten Art alle diejenigen nennen, deren Gleichungen von der Form:

$$f(x, y) = 0,$$

oder:

$$y = f(x)$$

sind.

§. 94. Hiernach ist einleuchtend, daß jedem gegebenen Werthe von x oder von y immer eine Linie der ersten Art entspricht, und daß man durch einen gegebenen Punct immer zwei solcher Linien

ziehen kann. Die beiden Linien der ersten Art, deren Gleichungen resp.

$$y=0,\quad x=0$$

sind, wollen wir coordinirte Linien oder Coordinatenlinien der x und der y nennen, so ist der Anfangspunct der Coordinaten der Durchschnittspunct dieser beiden Linien, d. h. der Punct, dessen Coordinaten Null sind.

Nun sei M der Punct, dessen Coordinaten x, y und N ein zweiter Punct, dessen Coordinaten $x+\Delta x$, $y+\Delta y$ sind, wo Δx, Δy zwei sehr kleine, den Veränderlichen x, y ertheilte Incremente bezeichnen, und a bezeichne die zwischen den durch die Puncte M und N gehenden vier Linien der ersten Art liegende kleine Fläche MNPQ; so ist die Fläche a im Allgemeinen von den vier Größen:

$$x,\ y,\ \Delta x,\ \Delta y$$

abhängig und verschwindet mit dem Producte $\Delta x\ \Delta y$ immer zu gleicher Zeit; denn um sie verschwinden zu machen, braucht man nur einen der Factoren dieses Productes $=0$ zu setzen. Aber wenn man Δx und Δy ohne Ende abnehmen läßt, so convergirt das Verhältniß $\frac{a}{\Delta x.\Delta y}$ gegen eine Grenze, welche nur noch von den Veränderlichen x und y abhängen kann und sich in mehreren Coordinatensystemen auf eine bloße constante Größe reducirt. So hat man z. B. für ein System rechtwinkliger Coordinaten in der Ebene $a=\Delta x.\Delta y$, und folglich $\frac{a}{\Delta y.\Delta y}=1$.

Für ein System schiefwinkliger Coordinaten in der Ebene, welche den Winkel ω miteinander bilden, hat man:

$$a=\Delta x.\Delta y\sin\omega,$$

$$\frac{a}{\Delta x.\Delta y}=\sin\omega,\ \text{etc.}$$

Wenn man also im allgemeinen $\lim\frac{a}{\Delta x.\Delta y}=u$ setzt, so hat man in dem Falle rechtwinkliger Coordinaten $u=1$, in dem Falle schiefwinkliger Coordinaten $u=\sin\omega$, etc. Andere Coordinatensysteme können für die Größe u statt eines constanten Werthes einen veränderlichen Werth, d. h. eine Function von x und y geben. Sobald man den Werth von u gefunden hat, kann man, wie wir sogleich zeigen werden, die von einer beliebigen ebenen Curve eingeschlossene Fläche daraus ableiten.

§. 95. Betrachten wir zunächst einen geschlossenen Umfang, welcher von vier Linien der ersten Art, nämlich von den durch den festen Punct (x_0, y_0) und von den durch den beweglichen Punct (x, y) gehenden Linien gebildet wird; so ist die von diesem Umfange eingeschlossene Fläche selbst veränderlich, weshalb wir sie mit $\chi(x,y)$ bezeichnen wollen.

Wenn nun Δ_x den Zuwachs bezeichnet, welchen eine Function

von x erhält, worin man x um Δx wachsen läßt, und ebenso Δ_y den Zuwachs, welchen eine Function von y bekommt, worin man y um Δy wachsen läßt; so hat man $v = \Delta_y . \Delta_x \chi(x, y)$, und da das Verhältniß $\frac{a}{u \Delta x . \Delta y}$ die Einheit zur Grenze hat:

$$\Delta_x . \Delta_y \chi(x, y) = a = (1 \pm \varepsilon) u \Delta x . \Delta y,$$

wo ε eine sehr kleine Zahl bezeichnet.

Wenn man die beiden Theile der vorhergehenden Gleichung durch $\Delta x . \Delta y$ dividirt und zu den Grenzen übergeht, so erhält man:

$$\frac{D_y . D_x \chi(x, y)}{dxdy} = u,$$

oder:

$$D^2_{yx} \chi(x, y) = \frac{d^2 \chi(x, y)}{dxdy} = u.$$

Wenn man diese letzte Gleichung in Beziehung auf y von $y = y_0$ an integrirt und die Bedingungsgleichung $\chi(x, y_0) = 0$, welche für jeden Werth von x erfüllt werden muß, berücksichtigt; so findet man:

$$D_x \chi(x, y) = \int_{y_0}^{y} u dy.$$

Integrirt man alsdann wieder in Beziehung auf x von $x = x_0$ an und berücksichtigt die Bedingungsgleichung $\chi(x_0, y) = 0$, welcher für jeden Werth von y genügt werden muß; so erhält man die Formel:

$$\chi(x, y) = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} u dy = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} u dxdy.$$

Es ist wohl zu bemerken, daß aus der Gleichung:

$$D_x \chi(x, y) = \int_{y_0}^{y} u dy.$$

folgt:

$$\Delta_x \chi(x, y) = \Delta x (1 + \varepsilon) \int_{y_0}^{y} u dy,$$

weil $\Delta_x \chi(x, y)$, d. h. die Fläche, welche einerseits zwischen den den Abscissen $x, x + \Delta x$ und andererseits zwischen den den Ordinaten y_0, y entsprechenden Linien der ersten Art liegt, durch ein Product von folgender Form:

$$\Delta x (1 + \varepsilon) \int_{y_0}^{y} u dy$$

ausgedrückt wird, wo ε eine sehr kleine Zahl bezeichnet.

Wenn man $y = Y$ setzt, wo Y eine constante Größe bezeichnet, so verwandelt sich das vorhergehende Product in:

$$\Delta x\,(1+\varepsilon)\int_{y_0}^{Y} u\,dy$$

und drückt die Fläche aus, welche zwischen den den Abscissen $x, x+\Delta x$ und den Ordinaten y_0 und Y entsprechenden Linien der ersten Art liegt.

§. 96. Wir wollen nun annehmen, daß, indem x_0 wieder eine constante Größe bezeichnet, y, Y nicht mehr zwei constante Werthe von y, sondern zwei Functionen der Veränderlichen x bezeichnen, und die Fläche suchen, welche einerseits von den Linien der zweiten Art, deren Gleichungen $y=y$, $y=Y$ sind, und andererseits von den den Abscissen x_0 und x entsprechenden Linien der ersten Art begrenzt wird; so ändert sich diese Fläche mit x, und wenn man sie mit $\varphi(x)$ bezeichnet, so bekommt sie das Increment $\Delta\varphi(x)$, wenn man x um Δx wachsen läßt. Es sei PQRS das fragliche Increment, welches einerseits von den den Abscissen $x, x+\Delta x$ entsprechenden Linien der ersten Art PR und QS und andererseits von den den Stücken PQ, RS der Linien der zweiten Art, welche in den Puncten P, R die Ordinaten y und Y haben, eingeschlossen wird; so ist klar, daß man ohne Veränderung des Werthes der Fläche PQRS nach einander, oder gleichzeitig die Linie der ersten Art P′Q′ für die Linien der zweiten Art PQ, für welche Y die Ordinate im Puncte P ist, und die Linie der ersten Art R′S′ für die Linie der zweiten Art RS, für welche y die Ordinate des Punctes R ist, setzen kann. Man hat folglich auch:

$$\Delta_x\varphi(x) = \mathrm{P'Q'R'S'}.$$

Ferner schneidet die Linie R′S′ offenbar die Linie RS, und hat folglich eine Gleichung von der Form:

$$y = y + \varepsilon',$$

wo ε' einen gewissen Zuwachs bezeichnet, welchen die als Function von x betrachtete Ordinate y erhält, wenn man x um eine gewisse kleinere Größe als Δx wachsen läßt. Ebenso ist die Gleichung der Linie P′Q′ von der Form:

$$y = Y + \varepsilon'',$$

wo ε'' die Ordinate eines Punctes der Linie PQ ist, welcher einer zwischen x und $x+\Delta x$ liegenden Abscisse entspricht. Dieses vorausgesetzt findet man, vermöge des Vorhergehenden (§. 95.):

$$\mathrm{P'Q'R'S'} = (1+\varepsilon)\,\Delta x\int_{y+\varepsilon'}^{Y+\varepsilon''} u\,dy$$

und folglich auch:

$$\Delta_x\varphi(x) = (1+\varepsilon)\,\Delta x\int_{y+\varepsilon'}^{Y+\varepsilon''} u\,dy,$$

wo ε' und ε'' Zahlen sind, welche ohne Ende mit Δx abnehmen. Wenn man die beiden Theile der vorhergehenden Gleichung durch Δx dividirt und zu den Grenzen übergeht, so ergiebt sich daraus:

$$D_x \varphi(x) = \int_y^Y u dy.$$

Integrirt man alsdann von $x = x_0$ an und berücksichtigt die Bedingungsgleichung $\varphi(x_0) = 0$, so erhält man:

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} dx \int_y^Y u dy = \int_{x_0}^{x} \int_y^Y u dx dy.$$

Alsdann muß man aber bemerken, daß die erste Integration in Beziehung auf y zwischen den Grenzen y. Y, welche von der Veränderlichen x abhängen, und die zweite Integration in Beziehung auf x von der Grenze x_0 an, welche eine constante Größe ist, geschehen muß.

Wenn man, indem y, Y zwei Functionen von x und x_0, X zwei constante Größen bezeichnen, die Fläche suchte, welche einerseits von den durch die Gleichungen $y = y$, $y = Y$ ausgedrückten Linien der zweiten Art und andererseits von den durch die Gleichungen $x = x_0$, $x = X$ ausgedrückten Linien der ersten Art eingeschlossen wird; so fände man für den Werth dieser Fläche:

$$A = \int_{x_0}^{X} \int_y^Y u dx dy.$$

In dem besondern Falle, wo y, Y constant werden, reducirt sich der vorhergehende Werth von A auf den zuvor erhaltenen Werth, wie leicht vorher einzusehen war.

Anmerkung. Es verdient bemerkt zu werden, daß die vorhergehende Methode nicht blos zur Bestimmung der von den durch die obigen Gleichungen ausgedrückten Linien eingeschlossenen Fläche, sondern auch zur Bestimmung jeder andern Größe dienen kann, welche mit dieser Fläche zu- oder abnehmen muß. Denn eine solche Größe würde auch durch das Integral:

$$\int_{x_0}^{X} \int_y^Y u dx dy$$

ausgedrückt, wenn $(u \pm \varepsilon)\, \Delta x \Delta y$ nicht mehr das Element der Fläche, sondern das entsprechende Element der gesuchten Größe bezeichnete.

Wenn die gegebene Fläche von einem beliebigen Umfange begrenzt würde, so ließe sie sich leicht in mehrere Theile zerlegen, wo auf jeden die vorhergehende Methode anwendbar wäre.

§. 97. Nachdem wir die allgemeinen Principien für die Quadratur der Flächen aufgestellt haben, wollen wir zu dem Probleme der Cubatur übergehen.

Die Lage eines Punctes im Raume wird durch seine drei rechtwinkligen oder schiefwinkligen, geradlinigen oder krummlinigen, etc. Coordinaten, welche wir in allen Fällen durch die drei Buchstaben x, y, z bezeichnen wollen, bestimmt. Hiernach kann eine beliebige Fläche durch eine Gleichung ausgedrückt werden, deren erster Theil die drei Veränderlichen x, y, z oder zwei derselben, aber wenigstens eine enthält. Um diese drei Fälle von einander zu unterscheiden, werden wir sagen, daß eine Fläche von der ersten, zweiten, dritten Art sei, jenachdem ihre Gleichung

eine, zwei, oder drei Veränderliche enthält. Die Gleichung einer Fläche der ersten Art hat also eine der drei Formen:

$$f(x)=0,\ f(y)=0,\ f(z)=0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$x=c,\ y=c',\ z=c''.$$

Die Gleichung einer Fläche der zweiten Art hat eine der drei Formen:

$$f(x,y)=0,\ f(x,z)=0,\ f(y,z)=0,$$

oder:

$$y=f(x),\ z=f(x),\ z=f(y).$$

Endlich ist die Gleichung einer Fläche der dritten Art von der Form:

$$f(x,y,z)=0,$$

wofür man auch folgende setzen kann:

$$z=f(x,y).$$

Hiernach ist einleuchtend, daß jedem gegebenen Werthe von x, y oder z immer eine Fläche der ersten Art entspricht, und daß man durch einen gegebenen Punct immer drei solcher Flächen legen kann. Wir wollen die drei Flächen der ersten Art, deren Gleichungen resp. folgende sind:

$$x=0,\ y=0,\ z=0$$

die Coordinatenflächen oder die coordinirten Flächen der yz, der zx und der xy nennen. Diese Flächen durchschneiden sich nach drei Linien, welche wir die Coordinatenlinien oder die coordinirten Linien der x, der y und der z nennen wollen, und diese Linien durchschneiden sich in einem Puncte, welcher der Anfangspunct der Coordinaten ist. Der Anfangspunct der Coordinaten ist also der Punct, dessen drei Coordinaten sich auf Null reduciren.

Da eine Linie als der Durchschnitt zweier Flächen betrachtet werden kann, so wird sie ganz natürlich durch zwei Gleichungen ausgedrückt. Wenn diese Gleichungen von der Form sind:

$$z=0,\ f(x,y)=0,$$

so liegt die Linie in der Coordinatenfläche der xy und ist nichts anderes, als der Durchschnitt dieser Coordinatenfläche mit der Fläche der zweiten Art, welche durch die Gleichung $f(x,y)=0$ ausgedrückt wird. Es ist einleuchtend, daß jede Fläche der zweiten Art, welche durch eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen ausgedrückt wird, eine der Coordinatenflächen nach einer Linie der zweiten Art durchschneidet, zu welcher die fragliche Gleichung gehört, und wir wollen diese Linie die Basis oder Grundlinie der Fläche nennen.

§. 98. Betrachten wir nun das Volumenelement, welches von den sechs Flächen der ersten Art begrenzt wird, die durch die beiden Puncte gehen, deren Coordinaten resp. folgende sind:

$$x,\ y,\ z,$$
$$x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z.$$

Dieses Volumen, welches in dem Falle rechtwinkliger Coordinaten durch das Product $\Delta x\Delta y\Delta z$ ausgedrückt wird, verschwindet in allen Fällen mit diesem Producte, und kann folglich durch einen Ausdruck von der Form:

$$(w\pm\varepsilon)\Delta x\Delta y\Delta z$$

dargestellt werden, wo w die Grenze bezeichnet, gegen welche das Verhältniß des erwähnten Volumenelementes zu dem genannten Producte convergirt, wenn die Werthe von Δx, Δy, Δz immer kleiner werden, und wo ε eine Größe ist, welche mit diesem Producte ohne Ende abnimmt. Die Größe w kann in jedem Coordinatensysteme nur eine constante Größe, oder eine bestimmte Function der Veränderlichen x, y, z sein. Hat man den constanten, oder den veränderlichen Werth dieser Größe w einmal gefunden, so läßt sich daraus leicht der Ausdruck des von einer beliebigen Oberfläche begrenzten Volumens ableiten.

Denn wir wollen zunächst das Volumen v suchen, welches zwischen den sechs Flächen der ersten Art liegt, die durch die Puncte gehen, deren Coordinaten folgende sind:

$$x,\ y,\ z,$$
$$x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z.$$

Man kann dieses Volumen als den Zuwachs in Beziehung auf x und y eines andern Volumens betrachten, welches von den Flächen der ersten Art eingeschlossen wird, die durch die beiden Puncte gehen, deren Coordinaten resp. folgende sind:

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\ x,\ y,\ z.$$

Wir wollen dieses letzte Volumen mit $\psi(x,y,z)$ bezeichnen, und Δ_x, Δ_y, Δ_z sollen die Incremente bezeichnen, welche Functionen von x, y, z erhalten, wenn man x um Δx, oder y um Δy, oder z um Δz wachsen läßt; so ist das gesuchte Volumen:

$$v=\Delta_y\Delta_x\psi(x,y,z)$$

und außerdem hat man offenbar:

$$\Delta_z\Delta_y\Delta_x\psi(x,y,z)=(w+\varepsilon)\Delta x\Delta y\Delta z.$$

Wenn man die beiden Theile der vorhergehenden Gleichung durch Δ_z dividirt und dann Δ_z gegen die Grenze Null convergiren läßt, so erhält man die folgende Formel:

$$\mathrm{D}_z.\Delta_y\Delta_x\psi(x,y,z)=(w+\varepsilon)\Delta x\Delta y.$$

Integrirt man alsdann in Beziehung auf z von $z=z_0$ an und bemerkt, daß für jeden Werth von x,y die Bedingungsgleichung:

$$\psi(x, y, z_0) = 0$$

statt findet; so erhält man:

$$v = \Delta_y \Delta\ \psi(x, y, z) = \Delta x \Delta y \int_{z_0}^{z} (w \pm \varepsilon)\, dz,$$

oder was dasselbe ist:

$$v = \Delta_y \Delta_x \psi(x, y, z) = (1 + \varepsilon)\, \Delta x \Delta y \int_{z_0}^{z} w dz,$$

wo ε eine Zahl bezeichnet, welche in den verschiedenen Formeln verschiedene Werthe hat, die aber immer sehr klein sind, wenn Δx und Δy selbst sehr klein sind.

Wenn man das Volumen haben wollte, welches einerseits von den den Coordinaten:

$$x,\ x + \Delta x;\quad y,\ y + \Delta y$$

entsprechenden Flächen der ersten Art, und andererseits von den durch die Gleichungen $z = z_0$, $z = \mathrm{Z}$ ausgedrückten Flächen der ersten Art begrenzt wird; so brauchte man nur in dem zweiten Theile der betreffenden Formel z für Z zu setzen, und man erhielte alsdann für den gesuchten Werth einen Ausdruck von der Form:

$$(1 + \varepsilon)\, \Delta x \Delta y \int_{z_0}^{\mathrm{Z}} w dz,$$

wo ε wieder eine unendlich kleine Größe bezeichnet.

§. 99. Wir wollen nun annehmen, daß x, X zwei constante Größen, y, Y zwei Functionen von x und z, Z zwei Functionen von x, y sind, und das Volumen suchen, welches einerseits von den durch die Gleichungen:

$$x = x,\ x = \mathrm{X},\ y = y,\ y = \mathrm{Y}$$

ausgedrückten Flächen der ersten und zweiten Art und andererseits von den dnrch die Gleichungen:

$$z = z,\quad z = \mathrm{Z}$$

ausgedrückten Flächen der dritten Art begrenzt wird; so nimmt dieses Volumen zu, oder ab, jenachdem die von den vier Grundlinien der Flächen der ersten und zweiten Art eingeschlossene Fläche zu- oder abnimmt, und wenn man durch $(u + \varepsilon)\, \Delta x \Delta y$ das Element bezeichnet, auf welches sich dieses Volumen reducirt, wenn man für die Flächen $x = \mathrm{X}$, $y = \mathrm{Y}$ die beiden Flächen der ersten Art setzt, welche den Coordinaten:

$$x,\ x + \Delta x,\quad y,\ y + \Delta y$$

entsprechen; so erhält man für den Ausdruck des gesuchten Volumens:

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \int_{y}^{\mathrm{Y}} u dx dy.$$

Es ist nun noch der Werth von u oder der des Volumenelementes:

$$(u + \varepsilon)\, \Delta x \Delta y$$

zu bestimmen, welches einerseits von den den Coordinaten:

$$x,\ x+\Delta x,\quad y,\ y+\Delta y$$

entsprechenden Flächen der ersten Art und andererseits von den durch die Gleichungen $z=z$, $z=Z$ ausgedrückten Flächen der dritten Art begrenzt wird. Nun kann man aber, ohne dieses Volumenelement zu ändern, für den kleinen Theil der Fläche der dritten Art, welcher in dem Puncte (x,y,z) anfängt und in dem Puncte:

$$(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta^2_{xy}z)$$

endet, einen entsprechenden Theil der Fläche der ersten Art setzen, deren Gleichung von der Form $z=z+\varepsilon'$ wäre, wo ε' sowohl als Δx, Δy eine unendlich kleine Größe ist. Ferner kann man für den kleinen Theil der dritten Art, welcher sich von dem Puncte $(x,\ y,\ Z)$ bis zu dem Puncte:

$$(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ Z+\Delta^2_{xy}Z)$$

erstreckt, einen entsprechenden Theil der Fläche der ersten Art setzen, deren Gleichung von der Form $z=Z+\varepsilon''$ ist, wo ε'' wieder eine unendlich kleine Größe bezeichnet.

Um ferner das Volumen zu erhalten, welches einerseits von den durch die Gleichungen:

$$z=z+\varepsilon',\quad z=Z+\varepsilon''$$

ausgedrückten Flächen der ersten Art und andererseits von den den Coordinaten:

$$x,\ x+\Delta x,\quad y,\ y+\Delta y$$

entsprechenden Flächen der ersten Art begrenzt wird, braucht man offenbar in der Formel:

$$v=(1+\varepsilon)\,\Delta x\Delta y\int_{z_0}^{z} w dz$$

nur $z+\varepsilon'$ für z_0 und $Z+\varepsilon''$ für Z zu setzen. Man erhält folglich für dieses Volumen einen Ausdruck von der Form:

$$(1+\varepsilon''')\,\Delta x\Delta y\int_{z+\varepsilon'}^{Z+\varepsilon''} w dz,$$

wo ε''' eine unendlich kleine Größe ist. Wenn man diesen Ausdruck gleich $(u+\varepsilon)\,\Delta x\Delta y$ setzt, so findet man:

$$u+\varepsilon=(1+\varepsilon''')\int_{z+\varepsilon'}^{Z+\varepsilon''} w dz,$$

und wenn man zu den Grenzen übergeht:

$$u=\int_{z}^{Z} w dz.$$

Nachdem der Werth von u auf diese Weise bestimmt ist, verwandelt sich die Formel, welche das von den gegebenen Flächen eingeschlossene Volumen ausdrückt, in folgende:

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y}^{Y}\int_{z}^{Z} w\,dx\,dy\,dz.$$

Man hat alſo, wenn V das geſuchte Volumen bezeichnet und die Integration in Beziehung auf z zwiſchen den veränderlichen Grenzen z, Z, die in Beziehung auf y zwiſchen den veränderlichen Grenzen y, Y und endlich die in Beziehung auf x zwiſchen den conſtanten Grenzen x_0, X verrichtet wird:

$$V=\int_{x_0}^{X}\int_{y}^{Y}\int_{z}^{Z} w dx dy dz.$$

Anmerkung. Es verdient bemerkt zu werden, daß die vorhergehende Methode nicht blos zur Beſtimmung des von den fraglichen Flächen begrenzten Volumens, ſondern auch zur Beſtimmung jeder andern Größe dienen kann, welche mit dieſem Volumen gleichzeitig zu- oder abnimmt. Eine ſolche Größe würde noch durch das Integrel ausgedrückt, welches den zweiten Theil der vorhergehenden Formel bildet, wenn man durch:

$$(w+\varepsilon)\,\Delta x\Delta y\Delta z$$

nicht mehr das Element des Volumens V, ſondern das correſpondirende Element der geſuchten Größe bezeichnete.

Wenn das gegebene Volumen von einer beliebigen Fläche begrenzt würde, ſo könnte man daſſelbe leicht ſo in mehrere Theile zerlegen, daß jeder dieſer Theile durch die vorhergehende Methode berechnet werden könnte.

§. 100. Wenn man die beiden Theile der Gleichung:

$$\Delta_x\Delta_y\Delta_z\psi(x,y,z)=(w\pm\varepsilon)\,\Delta x\Delta y\Delta z$$

durch $\Delta x\Delta y\Delta z$ dividirt und zu den Grenzen übergeht, ſo erhält man:

$$w=\frac{d^3\psi(x,y,z)}{dx\,dy\,dz}=D^3_{xyz}\psi(x,y,z).$$

Ferner kann man für $\psi(x,y,z)$ das Volumen nehmen, welches von den den Coordinaten o,x; o,y; o,z entſprechenden ſechs Flächen der erſten Art begrenzt wird, und folglich braucht man nur dieſes letzte Volumen zu kennen, um daraus den Werth von w abzuleiten.

Um von den vorhergehenden Formeln eine erſte Anwendung zu geben, wollen wir zunächſt die Coordinaten x,y,z rechtwinklig annehmen; ſo wird das von den ſechs Flächen der erſten Art, welche durch den Anfangspunct und durch den Punct (x,y,z) gehen, eingeſchloſſene Volumen $\psi(x,y,z)$ durch folgende Gleichung beſtimmt:

$$\psi(x,y,z)=xyz,$$

woraus ſich ergiebt:

$$w=\frac{d^3\psi(x,y,z)}{dxdydz}=1.$$

Zu demſelben Reſultate gelangt man auch, wenn man bemerkt, daß das von den durch die Puncte:

$$(x, y, z),\ (x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$$

gehenden rechtwinkligen Ebenen begrenzte Volumen ſich auf ein rechtwinkliges Parallelepipedum reducirt, deſſen Dimenſionen reſp. gleich Δx, Δy, Δz ſind, ſo daß man hat:

$$v = \Delta x \Delta y \Delta z$$

und folglich:

$$\lim. w(1 \pm \varepsilon) = 1,\ w = 1.$$

Hiernach iſt alſo:

$$V = \int_{x_0}^{X} \int_{y}^{Y} \int_{z}^{Z} dx dy dz = \int_{x_0}^{X} \int_{y}^{Y} (Z - z)\, dx dy.$$

Wenn man ſchiefe Coordinaten anwendet und mit a das Volumen des Parallelepipedums bezeichnet, wovon drei zuſammenſtoßende Kanten zu den Coordinatenaxen parallel und der Längeneinheit gleich ſind; ſo findet man:

$$\psi(x, y, z) = axyz$$

und für $w = a$:

$$V = a \int_{y_0}^{X} \int_{y}^{Y} \int_{z}^{Z} dx dy dz = a \int_{x_0}^{X} \int_{y}^{Y} (Z - z)\, dx dy.$$

Wir wollen nun annehmen, daß die Lage des Punctes im Raume durch Polarcoordinaten:

$$x = \vartheta,\ y = u,\ z = r$$

beſtimmt ſei, wo r den von dem betrachteten Puncte nach dem zum Anfangspuncte genommenen feſten Puncte gezogenen Radiusvector, u den von dieſem Radiusvector mit einer feſten Axe oder vielmehr den mit einer durch den Anfangspunct gehenden Halbaxe und ϑ den von einer durch dieſe Halbaxe gehenden feſten Ebene mit einer durch dieſelbe Halbaxe und durch den Radiusvector gehenden Ebene gebildeten Winkel bezeichnet. Die Flächen der erſten Art, d. h. diejenigen, welche durch Gleichungen von der Form:

$$u = c, \text{ oder } \vartheta = c', \text{ oder } r = c''$$

ausgedrückt werden, ſind offenbar entweder gerade Kegelflächen mit kreisförmigen Baſen, welche die feſte Axe zur Axe haben, oder durch die feſte Axe gehende Ebenen, oder Kugelflächen, welche den Anfangspunct zum Mittelpuncte haben.

Von den Gleichungen $u = 0$, $\vartheta = 0$, $r = 0$ gehört die erſte zu der feſten Ebene, die zweite zu der feſten Axe und die dritte zu dem feſten Anfangspuncte.

Hiernach wird das durch $\psi(u, \vartheta, r)$ ausgedrückte Volumen begrenzt: 1) von zwei Ebenen, welche die feſte Axe enthalten und einen Winkel u mit einander bilden, 2) von einem Theile der

Kegelfläche, deren Erzeugungslinie mit der festen Axe den Winkel u bildet, und 3) von einem Theile der Kugelzone, deren Höhe gleich:

$$r(1-\cos u)$$

und deren Oberfläche:

$$2\pi r\,[r(1-\cos u)] = 2\pi r^2(1-\cos u)$$

ist.

Ferner verhält sich das Volumen $\psi(u,\vartheta,r)$ zu dem Kugelsector wie ϑ zu 2π, woraus folgt:

$$\psi(u,\vartheta,r) = \frac{\vartheta}{2\pi}\,\frac{2\pi}{3}\,r^3(1-\cos u)$$

oder was dasselbe ist:

$$\psi(u,\vartheta,r) = \frac{r^3}{3}(1-\cos u)\vartheta.$$

Man hat also:

$$w = \frac{d^3\psi(u,\vartheta,r)}{du\,d\vartheta\,dr} = r^2\sin u$$

und folglich:

$$V = \int_{u_0}^{U}\int_{\vartheta}^{\Theta}\int_{r}^{R} r^2\sin u\,du\,d\vartheta\,dr.$$

In diesen letzten Gleichungen sind r, R Functionen der Veränderlichen u, ϑ; ϑ und Θ Functionen der einen Veränderlichen u, und u_0, U constante Größen. Zu diesem Ausdrucke des Volumens V würde man auch gelangen, wenn man bemerkte, daß der den gleichzeitigen Incrementen, du, $d\vartheta$, dr entsprechende unendlich kleine Zuwachs des Volumens als ein rechtwinkliges Parallelepipedum betrachtet werden kann, dessen drei Dimensionen $r\,du$, $r\sin u\,d\vartheta$, dr sind und dessen Volumen $= r^2\sin u\,du\,d\vartheta\,dr$ ist.

Siebenzehnte Vorlesung.

Reduction der vielfachen Integrale. — Erste Methode vermittelst einer Coordinatenveränderung.

---

§. 101. Die Reduction der vielfachen Integrale ist in der letzten Zeit der Gegenstand der Untersuchungen vieler Geometer gewesen, unter welchen wir hier nur Cauchy, Lejeune-Dirichlet, Liouville, Lamé, Catalan, Tortolini namentlich anführen wollen, und wir haben es nicht für unzweckmäßig gehalten, die von ihnen eingeschlagenen Wege, sowie die wichtigen Resultate, welche sie erhalten haben, hier näher zu bezeichnen.

Die erste Reductionsmethode besteht darin, daß man statt der ursprünglichen Coordinaten neue anwendet, wodurch die Integration erleichtert wird.

Gewöhnlich wird die Lage eines Punctes im Raume durch drei rechtwinklige Coordinaten x, y, z, oder durch drei Polarcoordinaten bestimmt, welche z. B. der Radiusvector r oder die Entfernung des betrachteten Punctes vom Anfangspuncte der Coordinaten, der von der Projection des Radiusvectors auf die Ebene von xy mit der Axe der y gebildete Winkel ϑ und der von dem Radiusvector mit der Axe der x gebildete Winkel u sein können. Wenn die Axen aufeinander senkrecht sind, so sind die Polarcoordinaten durch die bekannten Gleichungen:

$$x = r\cos u, \quad y = r\sin u\cos\vartheta, \quad z = r\sin u\sin\vartheta$$

verbunden.

§. 102. Lamé hat in seinen interessanten Abhandlungen über die Theorie der Wärme von einer neuen Art von Coordinaten Gebrauch gemacht, welche derselbe elliptische Coordinaten genannt hat, und wobei ein beliebiger Punct des Raumes als der Durchschnittspunct dreier Flächen betrachtet wird, wovon jede von einem veränderlichen Parameter abhängt. So kann z. B. ein beliebiger Punct des Raumes als der Durchschnittspunct der drei Flächen:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=1$$

betrachtet werden, und wenn man setzt:

$$b<c,\quad \lambda>c>b,\quad \mu>b<c,\quad \nu<b<c;$$

so ist die erste dieser drei Flächen ein Ellipsoid, die zweite ein Hyperboloid mit einem Fache und die dritte ein Hyperboloid mit zwei Fächern. Die Brennpunctsdistanzen $2b$, $2c$, $2\sqrt{c^2-b^2}$ der Hauptschnitte sind ein gemeinschaftliches Element aller Flächen, welche man erhalten kann, wenn man die drei Parameter λ, μ, ν sich ändern läßt, weshalb man diese Flächen auch homofocale Flächen genannt hat.

Wenn man eine schickliche Eliminationsmethode anwendet, *) so erhält man die drei Gleichungen:

$$bcx=\lambda\mu\nu,$$

$$by\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{\lambda^2-b^2}\,\sqrt{\mu^2-b^2}\,\sqrt{b^2-\nu^2},$$

$$cz\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{\lambda^2-c^2}\,\sqrt{c^2-\mu^2}\,\sqrt{c^2-\nu^2},$$

welche x, y, z als Functionen von λ, μ, ν geben, und die Werthe

---

*) J. Binet hat zu diesem Zwecke ein höchst sinnreiches und einfaches Verfahren angegeben, welches auf eine beliebige Anzahl von Gleichungen anwendbar ist und in Folgendem besteht: Es seien n Gleichungen von der Form:

$$\frac{\xi}{\xi_1-\alpha}+\frac{\eta}{\xi_1-\beta}+\frac{\zeta}{\xi_1-\gamma}+\text{etc.}=1,$$

$$\frac{\xi}{\xi_2-\alpha}+\frac{\eta}{\xi_2-\beta}+\frac{\zeta}{\xi_2-\gamma}+\text{etc.}=1,$$

$$\frac{\xi}{\xi_3-\alpha}+\frac{\eta}{\xi_3-\beta}+\frac{\zeta}{\xi_3-\gamma}+\text{etc.}=1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

gegeben, und wir wollen die n Unbekannten $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ durch $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ausgedrückt, suchen. Zu dem Zwecke setzen wir:

$$F(x)=(x-\alpha)\quad(x-\beta)\quad(x-\gamma)\ldots,$$

$$f(x)=(x-\xi_1)\quad(x-\xi_2)\quad(x-\xi_3)\ldots.$$

Die Differenz $F(x)-f(x)$ ist ein Polynom des $n-1$ten Grades, und da in dem Bruche $\frac{F(x)-f(x)}{F(x)}$ der Grad des Zählers wenigstens um eine Einheit niedriger ist, als der Grad des Nenners, so hat man nach der Theorie der Zerlegung rationaler Brüche in einfache, identisch:

$$\frac{F(x)-f(x)}{F(x)}+\frac{F(\alpha)-f(\alpha)}{F'(\alpha)}\frac{1}{x-\alpha}+\frac{F(\beta)-f(\beta)}{F'(\beta)}\frac{1}{x-\beta}+\frac{F(\gamma)-f(\gamma)}{F'(\gamma)}\frac{1}{x-\gamma}+\text{etc.}$$

von x^2, y^2, z^2 leiſten derſelben Gleichung des ſechsten Grades Genüge. Denn wenn man die Gleichung:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

in Beziehung auf λ ordnet, und ſetzt:

$$A = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2,$$
$$B = x^2(b^2 + c^2) + y^2c^2 + z^2b^2 + b^2c^2,$$
$$C = b^2c^2x^2,$$

ſo findet man:

$$\lambda^6 - A\lambda^4 + B\lambda^2 - C = 0.$$

Wenn man, ſtatt von der Gleichung des Ellipſoides, von der Gleichung des Hyperboloide ausgegangen wäre, ſo würde man zu derſelben Gleichung des ſechsten Grades gelangt ſein, und da λ^2, μ^2, ν^2 zugleich Wurzeln dieſer Gleichung ſind; ſo hat man:

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = A,\ \lambda^2\mu^2 + \lambda^2\nu^2 + \mu^2\nu^2 = B,\ \lambda^2\mu^2\nu^2 = C.$$

Wenn man in dieſer Gleichung ſucceſſive ſetzt:

$$x = \xi_1,\quad x = \xi_2,\quad x = \xi_3, \ldots,$$

und die Gleichungen:

$$F(\alpha) = 0,\quad F(\beta) = 0,\quad F(\gamma) = 0, \ldots,$$
$$f(\xi_1) = 0,\quad f(\xi_2) = 0,\quad f(\xi_3) = 0, \ldots$$

berückſichtigt, ſo findet man:

$$-\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}\frac{1}{\xi_1 - \alpha} - \frac{f(\beta)}{F'(\beta)}\frac{1}{\xi_1 - \beta} - \frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}\frac{1}{\xi_1 - \gamma} - \ldots = 1,$$
$$-\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}\frac{1}{\xi_2 - \alpha} - \frac{f(\beta)}{F'(\beta)}\frac{1}{\xi_2 - \beta} - \frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}\frac{1}{\xi_2 - \gamma} - \ldots = 1,$$
$$-\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}\frac{1}{\xi_3 - \alpha} - \frac{f(\beta)}{F'(\beta)}\frac{1}{\xi_3 - \beta} - \frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}\frac{1}{\xi_3 - \gamma} - \ldots = 1.$$

Dieſe Gleichungen ſind für alle Werthe von α, β, γ, ..., ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... identiſch und ſie reduciren ſich auf die gegebenen Gleichungen, wenn man ſetzt:

$$-\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)} = \xi = -\frac{(\alpha - \xi_1)(\alpha - \xi_2)(\alpha - \xi_3)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)\ldots},$$
$$-\frac{f(\beta)}{F'(\beta)} = \eta = -\frac{(\beta - \xi_1)(\beta - \xi_2)(\beta - \xi_3)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)\ldots},$$
$$-\frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)} = \zeta = -\frac{(\gamma - \xi_1)(\gamma - \xi_2)(\gamma - \xi_3)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)\ldots}.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dieſe letzten Werthe machen alſo die gegebenen Gleichungen auch identiſch und ſind folglich die geſuchten Werthe der Unbekannten ξ, η, ζ, ...

Um auf den Fall der drei vorhin betrachteten Gleichungen zurückzukommen, braucht man in den vorhergehenden Formeln nur zu ſetzen:

$\xi = x^2$, $\eta = y^2$, $\zeta = z^2$; $\xi_1 = \lambda^2$, $\xi_2 = \mu^2$, $\xi_3 = \nu^2$; $\alpha = 0$, $\beta = b^2$, $\gamma = c^2$.

Wenn man nun zwischen diesen drei Gleichungen und der Gleichung des sechsten Grades successive λ, oder μ, oder ν eliminirt, so erhält man die Gleichungen der homofocalen Flächen.

§. 103. Diese Flächen, welche acht Puncte miteinander gemein haben, haben sehr merkwürdige Eigenschaften. Die Berührungsebenen derselben im Puncte (x, y, z) haben folgende Gleichungen:

$$\frac{x\xi}{\lambda^2} + \frac{y\eta}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z\zeta}{\lambda^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x\xi}{\mu^2} + \frac{y\eta}{\mu^2 - b^2} + \frac{z\zeta}{c^2 - \mu^2} = 1,$$

$$\frac{x\xi}{\nu^2} - \frac{y\eta}{b^2 - \nu^2} - \frac{z\zeta}{c^2 - \nu^2} = 1$$

und sind aufeinander senkrecht; denn wenn man die Winkel, welche die Perpendikel auf diesen drei Ebenen mit den Axen bilden, mit α, β, γ; $\alpha' \beta' \gamma'$; $\alpha'' \beta'' \gamma''$ bezeichnet, so hat man:

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{x}{\lambda^2}} = \frac{\cos\beta}{\frac{y}{\lambda^2 - b^2}} = \frac{\cos\gamma}{\frac{z}{\lambda^2 - c^2}},$$

$$\frac{\cos\alpha'}{\frac{x}{\mu^2}} = \frac{\cos\beta'}{\frac{y}{\mu^2 - b^2}} = -\frac{\cos\gamma'}{\frac{z}{c^2 - \mu^2}},$$

$$\frac{\cos\alpha''}{\frac{x}{\nu^2}} = -\frac{\cos\beta''}{\frac{y}{b^2 - \nu^2}} = -\frac{\cos\gamma''}{\frac{z}{c^2 - \nu^2}}.$$

Die Gleichungen, welche x, y, z als Functionen von λ, μ, ν geben, führen auf folgende Identitäten:

$$\frac{x^2}{\lambda^2\mu^2} + \frac{y^2}{(\lambda^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)} - \frac{z^2}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}$$
$$= \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \text{etc.} = 0,$$

$$\frac{x^2}{\lambda^2\nu^2} - \frac{y^2}{(\lambda^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)} - \frac{z^2}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}$$
$$= \cos\alpha\cos\alpha'' + \cos\beta\cos\beta'' + \text{etc.} = 0,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2\nu^2} - \frac{y^2}{(\mu^2 - b^2)\cdot(b^2 - \nu^2)} + \frac{z^2}{(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}$$
$$= \cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \text{etc.} = 0,$$

vermöge welcher die Cosinus der Winkel zwischen den Berührungsebenen Null, und folglich diese Ebenen auf einander senkrecht sind. Hieraus folgt, daß eine homofocale Fläche alle Flächen der beiden andern Systeme normal durchschneidet.

Betrachten wir z. B. eins der durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

ausgedrückten Ellipsoide, so gehen durch einen beliebigen Punct M desselben zwei Hyperboloide, das eine mit einem Fache und das andere mit zwei Fächern, welche dieselben Brennpuncte haben, als dieses Ellipsoid, so daß sie sich, indem ihre Berührungsebenen immer auf der Berührungsebene des Ellipsoides senkrecht sind, nach einer Curve von doppelter Krümmung durchschneiden, deren Krümmungsebene immer auf dem gegebenen Ellipsoide normal ist. Es sei M′ ein Punct dieser Durchschnittscurve, welcher auf einem zweiten, dem ersten unendlich nahe kommenden und den Parameter $\lambda + d\lambda$ habenden Ellipsoide in der Nähe des Punctes M liegt. Es bezeichne $d_\lambda s$ das Element MM′ und $d_\lambda x$, $d_\lambda y$, $d_\lambda z$ seine drei Projectionen auf die Axen; so ist klar, daß μ und ν bei dem Uebergange von dem Puncte M zu dem Puncte M′ constant bleiben, und daß λ die einzige veränderliche elliptische Coordinate ist. Man erhält also, wenn man die drei Gleichungen, welche x, y, z als Functionen von λ, μ, ν geben, in Beziehung auf λ differenzirt:

$$bcd_\lambda x = \mu\nu d\lambda,$$

$$bd_\lambda y\sqrt{c^2-b^2} = \frac{\lambda\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{\sqrt{\lambda^2-b^2}}d\lambda,$$

$$cd_\lambda z\sqrt{c^2-b^2} = \frac{\lambda\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{\sqrt{\lambda^2-c^2}}d\lambda,$$

und folglich nach verrichteten Reductionen:

$$d_\lambda s = \frac{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2}}d\lambda.$$

Ebenso findet man, wenn $d_\mu s$, $d_\nu s$ die Elemente der Durchschnittscurven des Ellipsoides mit dem Hyperboloide mit zwei Fächern, oder mit dem Hyperboloide mit einem Fache bezeichnen:

$$d_\mu s = \frac{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}},$$

$$d_\nu s = \frac{\sqrt{\lambda^2-\nu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}.$$

Alle die Curven, wovon $d_\mu s$, $d_\nu s$ die Elemente sind, und nach welchen dasselbe Ellipsoid von allen homofocalen Hyperboloiden geschnitten wird, sind nichts anders, als die Krümmungslinien dieser Fläche. Denn die Gleichung der Krümmungslinien des Ellipsoides, dessen Axen λ^2, λ^2-b^2, λ^2-c^2 sind, ist:

$$x(c^2-b^2)\,dydz - c^2\,y\,dzdx + b^2 zdx\,dy = 0,$$

oder wenn man durch $dxdydz$ dividirt:

$$(c^2-b^2)\frac{x}{dx} - c^2\frac{y}{dy} + b^2\frac{z}{dz} = 0,$$

oder:

$$b^2\left(\frac{z}{dz}-\frac{x}{dx}\right)=c^2\left(\frac{y}{dy}-\frac{x}{dx}\right).$$

Wenn man auf einer der Curven, deren Element $d_\mu s$ ist, fortgeht, so sind λ und ν constant, μ ist allein veränderlich, und man hat:

$$\frac{x}{dx}=\frac{x}{d_\mu x}=\frac{\mu}{d\mu},\quad \frac{y}{dy}=\frac{y}{d_\mu y}=\frac{\mu^2-b^2}{\mu d\mu},$$
$$\frac{z}{dz}=\frac{z}{d_\mu z}=\frac{\mu^2-c^2}{\mu d\mu}$$

Substituirt man nun diese Werthe in die Gleichung der Krümmungslinien, so wird sie identisch gemacht, und folglich bilden die Curven, deren Element $d_\mu s$ ist ein System von Krümmungslinien des Ellipsoides. Dasselbe gilt von den Curven, deren Element $d_\nu s$ ist, und für welche man die Ausdrücke:

$$\frac{x}{dx}=\frac{x}{d_\nu x}=\frac{\nu}{d\nu},\quad \frac{y}{dy}=\frac{y}{d_\nu y}=\frac{\nu^2-b^2}{\nu d\nu},$$
$$\frac{z}{dz}=\frac{z}{d_\nu z}=\frac{\nu^2-c^2}{\nu d\nu}$$

hat, welche die Gleichung:

$$(c^2-b^2)\,\frac{x}{dx}-c^2\,\frac{y}{dy}+b^2\,\frac{z}{dz}=0$$

ebenfalls identisch machen.

Es ist also durch das Vorhergehende bewiesen, daß alle homofocale Flächen irgend zweier der drei Systeme eine beliebige krumme Fläche des dritten Systemes normal durchschneiden und darauf alle ihre Krümmungslinien bestimmen.

§. 104. Zuweilen substituirt man für die betrachteten krummen Flächen Varietäten derselben, z. B. die Kugel für das Ellipsoid und die beiden schiefen Kegel mit elliptischer Basis für die beiden Hyperboloide. In diesem Falle hat man, wenn r den Halbmesser der Kugel oder ihren Parameter, b und $c>b$ zwei Constanten, $\mu\gtrless\begin{matrix}b\\c\end{matrix}$ und $\nu<b<c$ zwei andere veränderliche Parameter bezeichnen, die drei Gleichungen:

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$
$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-\mu^2}=0,\quad \frac{x^2}{\nu^2}-\frac{y^2}{b^2-\nu^2}-\frac{z^2}{c^2-\nu^2}=0,$$

wovon die beiden letzten die Asymptotenkegel der Hyperboloide mit einem Fache oder mit zwei Fächern ausdrücken. Die beiden Kegel und die Kugel bilden ein System orthogonaler Flächen und die Coordinaten x, y, z sind folglich mit den Coordinaten r, μ, ν durch die Gleichungen:

$$bcx = r\mu\nu,$$
$$by\sqrt{c^2-b^2} = r\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2},$$
$$cz\sqrt{c^2-b^2} = r\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}$$

verbunden. Wir werden bald zeigen, welchen Vortheil die Transformation der Coordinaten bei der Reduction gewiſſer vielfacher Integrale gewährt. Aber zuvor wollen wir die allgemeinen Formeln wieder kurz in Erinnerung bringen, welche in der Integralrechnung zur Vertauſchung der unabhängigen Veränderlichen dienen.

Achtzehnte Vorlesung.

Fortsetzung. — Allgemeine Formel für die Transformation der Veränderlichen in den vielfachen Integralen.

---

§. 105. Wir wollen zunächst annehmen, daß ein doppeltes Integral:

$$\int\int U dx dy = \int\int F(x, y)\, dx dy$$

gegeben sei, und daß man für die unabhängigen Veränderlichen x, y zwei neue Veränderliche t, u, wovon x und y bestimmte Functionen sind, substituiren will; so untersucht man zunächst, was die Function $U = F(x, y)$ wird und berechnet das Product $dxdy$ auf folgende Weise. Da x, y bestimmte Functionen von t und u sind, so hat man, wenn man mit x'_t, x'_u, y'_t, y'_u die partiellen Ableitungen:

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dx}{du}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dy}{du},$$

bezeichnet:

$$dx = x'_t dt + x'_u du, \quad dy = y'_t dt + y'_u du.$$

Man würde offenbar einen Fehler begehen, wenn man, um das Product $dx.dy$ zu erhalten, diese beiden Werthe mit einander multiplicirte; denn da in dem gegebenen doppelten Integrale die beiden Veränderlichen x, y unabhängig sind, so muß y constant bleiben, wenn man in Beziehung auf x differenzirt, das Differenzial dx setzt y als constant voraus, und um dasselbe zu erhalten, muß man nothwendig $dy = 0$ setzen. Auf diese Weise erhält man:

$$dx = x'_t dt + x'_u du, \quad 0 = y'_t dt + y'_u du$$

und wenn man du zwischen diesen beiden Gleichungen eliminirt; so findet man:

$$dx = \frac{x'_t y'_u - y'_t x'_u}{y'_u} dt.$$

Wenn man diesen Werth in das doppelte Integral substituirte und zugleich x und u eliminirte, was immer möglich ist; so würde dasselbe blos eine Function von y und t. Alsdann müßten diese beiden Veränderlichen unabhängig sein, die Existenz von

dy ſetzte $dt = 0$ voraus, und die auf $dy = y'_u\,du$ reducirte Gleichung:

$$dy = y'_t dt + y'_u du$$

gäbe den Werth von dy, und folglich den von $dx.dy$. Durch dieſe Transformation verwandelte ſich das doppelte Integral in folgendes:

$$\int\int \varphi\,(t, u)\,(x'_t y'_u - y'_t x'_u)\,dt du.$$

Wir wollen z. B. das Integral:

$$\int\int dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

nehmen, ſo iſt das Product $dx.dy$ nach dem Vorhergehenden bereits berechnet und es bleibt blos $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ noch als Function von t und u zu beſtimmen übrig. Da z eine Function von x und y iſt, ſo iſt daſſelbe in Beziehung auf t und u eine Function von einer Function, und man hat folglich:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}$$

oder:

$$z'_t = \frac{dz}{dx}x'_t + \frac{dz}{dy}y'_t;$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{du}$$

oder:

$$z'_u = \frac{dz}{dx}x'_u + \frac{dz}{dy}y'_u.$$

Aus dieſen beiden Gleichungen ergeben ſich leicht die folgenden Werthe von $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y_u z'_t - y'_t z'_u}{x'_t y'_u - y'_t x'_u}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{x'_t z'_u - x'_u z'_t}{x'_t y'_u - y'_t x'_u}.$$

Subſtituirt man dieſe Werthe, ſo wie den von $dx.dy$ in das doppelte Integral; ſo wird daſſelbe unmittelbar auf folgende Form gebracht:

$$\int\int dt du \sqrt{(x'_t y'_u - x'_u y'_t)^2 + (x'_t x'_u - z'_u x'_t)^2 + (y'_t z'_u - y'_u z'_t)^2}.$$

§. 106. Wir wollen nun das dreifache Integral:

$$\int\int\int U\,dx\,dy\,dz = \int\int\int F\,(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

betrachten, worin man für die Veränderlichen x, y, z drei neue Veränderliche t, u, v ſubſtituiren will, welche mit den erſten durch gegebene Gleichungen verbunden ſind. Bezeichnen wir wieder die

partiellen Ableitungen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx}{du}$,.... mit x'_t, x'_u, x'_v, y'_t, y'_u, y'_v, z'_t, z'_u, z'_v, so haben wir:

$$dx = x'_t dt + x'_u du + x'_v dv,$$
$$dy = y'_t dt + y'_u du + y'_v dv,$$
$$dz = z'_t dt + z'_u du + z'_v dv.$$

Um den Werth des Productes $dx.dy.dz$, worin x, y, z als unabhängige Veränderliche betrachtet werden, zu erhalten, berechnet man zuerst den Werth von dx, indem man y und z als constant betrachtet, d. h. $dy = 0$, $dz = 0$ setzt, wodurch dx als Function von dt vermittelst der drei Gleichungen:

$$dx = x'_t dt + x'_u du + x'_v dv,$$
$$0 = y'_t dt + y'_u du + y'_v dv,$$
$$0 = z'_t dt + z'_u du + z'_v dv$$

bestimmt wird, zwischen welchen man leicht du und dv eliminirt.

Auf diese Weise findet man:

$$du = \frac{z'_t y'_v - y'_t z'_v}{y'_u z'_v - y'_v z'_u} dt, \quad dv = \frac{y'_t z'_u - z'_v y'_u}{y'_u z'_v - y'_v z'_u} dt,$$

$$dx = \frac{x'_t(y'_u z'_v - y'_v z'_u) + y'_t(z'_u x'_v - z'_v x'_u) + z'_t(x'_u y'_v - x'_v y'_u)}{y'_u z'_v - y'_v z'_u} dt.$$

Da dieser Werth das Product $dxdydz$ auf die Veränderlichen t, y, z zurückführt, so findet man dy, wenn man $dt = 0$, $dz = 0$ setzt, welches giebt:

$$dy = y'_u du + y'_v dv; \quad 0 = z'_u du + z'_v dv.$$

Wenn man in den Werth von dy den von $dv_u = \frac{z'_u du}{z'_v}$ substituirt; so erhält man:

$$dy = \frac{y'_u z'_v - y'_v z_u}{z'_v} du.$$

Da endlich t, u und z die gegenwärtigen Veränderlichen sind, so muß man, um dz zu erhalten, $dt = 0$, $du = 0$ setzen, und man bekommt:

$$dz = z'_v dv.$$

Wenn man die Werthe von dx, dy, dz miteinander multiplicirt, so wird das dreifache Integral:

$$\int\int\int V \, dx\, dy\, dz$$

in folgendes verwandelt:

$$\int\int\int V dt du dv [x'_t(y'_u z'_v - y'_v z'_u) + y'_t(z'_u x'_v - z'_v x'_u) + z'_t(x'_u y'_v - x'_v y'_u)].$$

Wenn $V = 1$ oder das gegebene dreifache Integral blos:

$$\int\int\int dx\, dy\, dz$$

wäre, so verwandelte sich dasselbe in:

$$\iiint dt du dv\,[x'_t(y'_u x'_v - y'_v x'_u) + y'_t(z'_u x'_v - z'_v x'_u) + z'_t(x'_u y'_v - x'_v y'_u)].$$

§. 107. Diese Transformationsformeln sind zuerst von Euler im Jahre 1769 und später von Lagrange im Jahre 1773 angewandt. Der Beweis derselben, welchen wir vorhin nach Lacroix mitgetheilt haben, läßt viel zu wünschen übrig. Uebrigens hat man bis jetzt diese Vertauschung der Veränderlichen nur in dem Falle eines doppelten oder dreifachen Integrales betrachtet, und es blieb noch die allgemeine Transformationsformel abzuleiten übrig. Diese Lücke ist ganz neuerlich zuerst von Jacobi und dann von Catalan ausgefüllt. Auch Cauchy hat sich mit demselben Gegenstande beschäftigt, und seine Methode zeichnet sich, wie immer, durch Strenge und Eleganz aus. Zum bessern Verständnisse des Folgenden wollen wir in Erinnerung bringen, daß der Werth irgend einer der durch die n Gleichungen des ersten Grades:

$$\begin{aligned}
a_0 x &+ b_0 y &+ c_0 z &+ \ldots + h_0 t &= k_0,\\
a_1 x &+ b_1 y &+ c_1 z &+ \ldots + h_1 t &= k_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n-1} x &+ b_{n-1} y &+ c_{n-1} z &+ \ldots + h_{n-1} t &= k_{n-1}
\end{aligned}$$

bestimmten Unbekannten, z. B. der Werth von x, durch die symbolische Formel:

$$x = \frac{(b-k)(c-k)\ldots(h-k)(c-b)\ldots(h-b)\ldots(h-g)}{(b-a)(c-a)\ldots(h-a)(c-b)\ldots(h-b)\ldots(h-g)}$$

gegeben wird, worin man nach der bekannten Entwickelung für die Exponenten $0, 1, 2, \ldots, n$ die entsprechenden Indices setzen muß. Die bloße Ansicht dieser Formel zeigt: 1) daß der gemeinschaftliche Nenner der Werthe der Unbekannten keine constanten Glieder k_0 k_1, k_2, k_3, k_4,....., k_n enthält, und 2) daß sich der Zähler des Ausdruckes jeder Unbekannten aus dem gemeinschaftlichen Nenner ergiebt, wenn man für die Coefficienten dieser Unbekannten die constanten Größen k_0, k_1, k_2, k_3,....., k_n setzt.

Wenn man durch:

$$\Sigma(a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})$$

die Summe bezeichnet, welche man erhält, wenn man in dem mit dem Zeichen + genommenen Producte $a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1}$ die Indices $0, 1, 2, 3, \ldots n-2, n-1$ permutirt und die so erhaltenen Producte zu dem gegebenen addirt, wo jedes dieser neuen Producte mit dem Zeichen +, oder mit dem Zeichen — genommen wird, jenachdem es aus dem ersten Producte vermittelst einer geraden, oder ungeraden Anzahl successiver Vertauschungen gebildet ist; so ist der gemeinschaftliche Nenner D gleich der Summe:

$$\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})$$

und man hat:

$$x = \frac{\Sigma(\pm k_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})}{\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})}.$$

Wenn die Constanten k_1, k_2,..., k_{n-1} Null wären, so hätte man offenbar:

$$x = \frac{k_0 \Sigma(\pm b_1 c_2 \ldots g_{n-2} k_{n-1})}{\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} k_{n-1})}.$$

§. 108. Nun wollen wir das Integral der n^{ten} Ordnung

$$S = \int\int\int \ldots F(x, y, z, \ldots, t)\, dx dy dz \ldots dt = \int\int\int \ldots U\, dx dy dz \ldots dt$$

betrachten, und annehmen, daß es darauf ankomme, für die Veränderlichen x, y, z,.... t andere Veränderliche ξ, η, ζ,...., τ, welche mit den ersten durch die n Gleichungen:

$$x = f_0(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau), \quad y = f_1(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau),$$
$$z = f_2(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau), \ldots, \quad t = f_{n-1}(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau)$$

verbunden sind, zu substituiren. Wir wollen annehmen, daß man in S zuerst in Beziehung auf x integrirt, so muß man y, z,..., t in den gegebenen Gleichungen, welche alsdann $n+1$ Veränderliche ξ, η,..., τ, x enthalten, als constant betrachten, und wenn man sie differenzirt, so findet man:

$$dx = D_\xi x d\xi + D_\eta x d\eta + \ldots + D_\tau x d\tau,$$
$$0 = D_\xi y d\xi + D_\eta y d\eta + \ldots + D_\tau y d\tau,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = D_\xi t d\xi + D_\eta t d\eta + \ldots + D_\tau t d\tau,$$

und wenn man setzt:

$$L = \Sigma(\pm D_\xi x D_\eta y D_\zeta z \ldots D_\tau t),$$
$$M = \Sigma(\pm D_\eta y D_\zeta z \ldots\ldots D_\tau t),$$

so erhält man:

$$d\xi = \frac{M}{L} dx, \quad dx = L \frac{d\xi}{M}$$

und folglich:

$$S = \int\int\int \ldots UL d\xi \frac{dy\, dz \ldots dt}{M}.$$

Betrachtet man nun y allein als veränderlich und z,....,t als constant; so findet man:

$$dy = D_\eta y\, d\eta + D_\zeta y\, d\zeta + \ldots + D_\tau y\, d\tau,$$
$$0 = D_\eta z\, d\eta + D_\zeta z d\zeta + \ldots + D_\tau z d\tau,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = D_\eta t d\eta + \ldots\ldots\ldots + D_\tau t d\tau,$$

und wenn man setzt:

$$N = \Sigma \pm D_\zeta z \ldots D_\tau t,$$
$$d\eta = \frac{N}{M} dy, \quad \frac{dy}{M} = \frac{d\eta}{N},$$

ſo iſt: $$S = \int\int\int \ldots . UL d\xi\, d\eta \frac{dx \ldots . dt}{N}.$$

Man hat folglich:

$$S = \int\int\int \ldots UL d\xi \frac{dy dx \ldots dt}{M} = \int\int\int \ldots UL d\xi d\eta \frac{dx \ldots dt}{N} = \ldots .$$

Uebrigens muß man für die letzte der Summen L, M, N,... offenbar die Einheit ſetzen; denn wenn man z. B. blos drei Veränderliche x, y, z betrachtet, ſo erhält man nach den beiden Syſtemen von Gleichungen, welche $d\xi$, $d\eta$ gegeben haben, die folgende Gleichung:

$$dx = D_\zeta x d\zeta, \quad dx = N d\zeta,$$

woraus ſich ergiebt:

$$\frac{dx}{N} = \frac{d\zeta}{1}.$$

Man erhält alſo, nachdem alle die Veränderlichen x, y, z,.... eliminirt ſind, endlich:

$$\begin{aligned} S &= \int\int\int \ldots UL d\xi d\eta d\zeta \ldots d\tau \\ &= \int\int\int \ldots U d\xi d\eta d\zeta \ldots d\tau \Sigma (\pm D_\xi x D_\eta y D_\zeta z \ldots D_\tau t \\ &= \int\int\int \ldots U d\xi d\eta d\zeta \ldots d\tau \Sigma (\pm D_\xi f_0 D_\eta f_1 \ldots D_\tau f_{n-1}). \end{aligned}$$

Um die Summe im zweiten Theile zu erhalten, muß man die Veränderlichen ξ, η, ζ,...., τ auf alle mögliche Arten permutiren.

§. 109. Anmerkung. Wenn x, y, z,...., s $(n-1)$ veränderliche Functionen von $(n-1)$ andern Veränderlichen ξ, η, ζ,...., σ ſind, ſo hat man nach dem Vorhergehenden:

$$dx dy dz \ldots ds = \Sigma (\pm D_\xi x D_\eta y D_\zeta z \ldots D_\sigma s) d\xi\, d\eta\, d\zeta \ldots d\sigma.$$

Wir wollen nun annehmen, daß dieſelben Veränderlichen x, y, z,...., s Functionen von n andern Veränderlichen ξ, η, ζ,.... σ, τ ſind, wo τ ſelbſt eine durch die Gleichung:

$$f(x, y, z, \ldots, t) = 0$$

beſtimmte und von ξ, η, ζ,...., σ abhängige Function iſt, indem t eine neue Function von ξ, η, ζ,...., σ, τ bezeichnet.

In dem Ausdrucke:

$$\Sigma (\pm D_\xi x D_\eta y D_\zeta z \ldots D_\sigma s)$$

muß man für jeden der Factoren $D_x p = \frac{dp}{dx}$ die Summe $\frac{dp}{d\lambda} + \frac{dp}{dx}\frac{dx}{d\lambda}$ ſetzen. Wenn man die Gleichung $f = 0$ in Beziehung auf λ differenzirt, ſo hat man:

$$\frac{df}{d\lambda} + \frac{df}{dx}\frac{dx}{d\lambda} = 0, \quad D_\lambda \tau = \frac{d\tau}{d\lambda} = -\frac{D_\lambda f}{D_\tau f},$$

und folglich:

$$\frac{dp}{d\lambda} + \frac{dp}{dx}\frac{dx}{d\lambda} = D_\lambda p + D_\tau p\, D_\lambda \tau = D_\lambda p - D_\tau p \frac{D_\lambda f}{D_\tau f}$$

Da aber λ eine Function von $x, y, z, \ldots, t$ ist, so hat man auch:

$$D_\lambda f = D_x f D_\lambda x + D_y f D_\lambda y + D_z f D_\lambda z + \ldots + D_t f D_\lambda t,$$

und wenn man substituirt; so findet man, daß man für den Ausdruck $dx\,dy\,dz \ldots .ds$ den folgenden:

$$\frac{D_t f}{D_\tau f} \Sigma (\pm D_\xi x D_\eta y D_\zeta z \ldots . D_\tau t)$$

substituiren muß. Auf diese Weise gelangt man zu dem folgenden Lehrsatze: Wenn die n Veränderlichen $x, y, z, \ldots, t$, welche Functionen von n andern Veränderlichen $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau$ sind, mit einander durch die Gleichung:

$$f(x, y, z, \ldots t) = 0$$

verbunden sind; so hat man nothwendig:

$$\frac{dx dy dz \ldots dt}{D_t f} = \Sigma (\pm D_\xi x D_\eta y D_\zeta z \ldots D_\tau t) \frac{d\xi d\eta d\zeta \ldots d\tau}{D_\tau f}.$$

Beispiel. Wenn die Veränderlichen $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau$ mit den Veränderlichen $x, y, z, \ldots, t$ durch n lineare Gleichungen:

$$\xi = a_0 x + b_0 y + c_0 z + \ldots + h_0 t,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\tau = a_{n-1} x + b_{n-1} y + c_{n-1} z + \ldots + h_{n-1} t$$

verbunden wären, so hätte man:

$$\frac{dx dy dz \ldots dt}{Df} = \Sigma \pm (a_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1}) \frac{d\xi d\eta d\zeta \ldots d\tau}{D_\tau f} = \frac{d\xi d\eta \ldots d\tau}{D_\tau f}.$$

Ist ferner:

$$f(x, y, z, \ldots, t) = x^2 + y^2 \ldots + t^2 - 1 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \ldots + \tau^2 - 1,$$

so kommt:

$$D_t f = 2t, \quad D_\tau f = 2\tau,$$

$$\frac{dx dy dz \ldots dt}{t} = \frac{d\xi d\eta d\xi \ldots d\tau}{\tau}$$

§. 110. Das Verfahren von Catalan ist kurz folgendes: Wir wollen annehmen, daß die Veränderlichen $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau$ mit den Veränderlichen $x, y, z, \ldots, t$ durch die n Gleichungen:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 0, \ldots, \quad f_{n-1} = 0,$$

verbunden sind, und daß man in S zuerst in Beziehung auf x integrirt; so muß man alsdann in den gegebenen Gleichungen, welche $n+1$ Veränderliche $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau, x$ enthalten, $y, z, \ldots, t$ als Constanten betrachten, und wenn man ξ zur unabhängigen Veränderlichen nimmt; so hat man zur Bestimmung von dx als Function von $d\xi$ die n Gleichungen:

$$D_x f_0\, dx + D_\xi f_0 d\xi + \ldots + D_\tau f_0\, d\tau = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_x f_{n-1} dx + D_\xi f_{n-1} d\xi + \ldots + D_\tau f_{n-1} d\tau = 0,$$

welche man auf folgende Form bringen kann:

$$(1)\quad \begin{cases} D_x f_0\, dx + D_\eta f_0\, d\eta + \ldots + D_\tau f_0\, d\tau = -D_\xi f_0\, d\xi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_x f_{n-1} dx + D_\eta f_{n-1} d\eta + \ldots + D_\tau f_{n-1} d\tau = -D_\xi f_{n-1} d\xi, \end{cases}$$

und welche für dx einen Werth von der Form:

$$dx = -\frac{N_0}{D_0}\, d\xi$$

geben. Substituirt man diesen Werth in S und wendet die gegebenen Gleichungen zur Elimination von $x, \eta, \zeta, \ldots, \tau$ an, so wird S durch die n Veränderlichen $y, z, \ldots, t$ und ξ ausgedrückt. Will man nun in Beziehung auf y integriren, so muß man alle übrigen Größen als constant betrachten, d. h. dy wird als Function der neuen Veränderlichen und $d\eta$ durch die n Gleichungen:

$$(*)\, D_x f_0\, dx + D_y f_0\, dy + D_\eta f_0\, d\eta + \ldots + D_\tau f_0\, d\tau = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_x f_{n-1} dx + D_y f_{n-1} dy + D_\eta f_{n-1} d\eta + \ldots + D_\tau f_{n-1} d\tau = 0,$$

welche man auch folgendermaßen schreiben kann:

$$D_x f_0\, dx + D_y f_0\, dy + \ldots + D_\tau f_0\, d\tau = -D_\eta f_0\, d\eta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_x f_{n-1} dx + D_y f_{n-1} dy + \ldots + D_\tau f_{n-1} d\tau = -D_\eta f_{n-1} d\eta$$

gegeben. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$dy = -\frac{N_1}{D_1}\, d\eta,$$

und wenn man auf diese Weise fortfährt, so sieht man, daß man endlich zu der Auflösung des Systemes von Gleichungen:

$$D_x f_0\, dx + D_y f_0\, dy + \ldots + D_t f_0\, dt + D_\tau f_0\, d\tau = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_x f_{n-1} dx + D_y f_{n-1} dy + \ldots + D_t f_{n-1} dt + D_\tau f_{n-1} d\tau = 0,$$

gelangt, welche man auch wie folgt ausdrücken kann:

$$D_x f_0\, dx + D_y f_0\, dy + \ldots + D_t f_0\, dt = -D_\tau f_0\, d\tau,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_x f_{n-1} dx + D_y f_{n-1} dy + \ldots + D_t f_{n-1} dt = -D_\tau f_{n-1} d\tau,$$

und welche geben:

$$dt = -\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}\, d\tau;$$

folglich:

---

*) Obgleich dx mit $d\xi$ verschwindet, wenn man ξ als constant betrachtet, so muß man doch in Beziehung auf x differenziren, weil die Veränderlichen $\eta, \zeta, \ldots, \tau$ die Veränderliche x implicite enthalten.

$$dx\,dy\,dz\,..\,dt = (-1)^n \frac{D_0}{N_0}\frac{N_1}{D_1}\frac{N_2}{D_2}\cdots\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,...d\tau.$$

Aber dieser Ausdruck kann beträchtlich vereinfacht werden; denn um den Zähler N_1 zu erhalten, braucht man in dem Ausdrucke von D_1 für den Coefficienten $D_y f_0$ von dy nur den in derselben Gleichung vorkommenden Coefficienten $D_y f_0$ von $d\eta$ zu setzen. Aus dieser Bemerkung und daraus, daß der gemeinschaftliche Nenner nicht geändert wird, wenn sich die zweiten Theile der linearen Gleichungen ändern, folgt, daß der Zähler N_1 dem Nenner in Beziehung auf die Gleichungen:

$$D_x f_0\,\alpha_0 + D_\eta f_0\,\alpha_1 + \ldots + D_\tau f_0\,\alpha_{n-1} = 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_x f_{n-1}\,\alpha_0 + D_\eta f_{n-1}\,\alpha_1 + \ldots + D_\tau f_{n-1}\,\alpha_{n-1} = 1$$

gleich ist. Nun ist aber dieser Nenner derselbe, als der der Gruppe (1), folglich:

$$N_1 = D_0.$$

Ebenso fände man, daß:

$$N_2 = D_1,\quad N_3 = D_2,\ldots,\quad N_{n-1} = D_{n-2},$$

folglich:

$$dx = -\frac{N_0}{D_0}\,d\xi,\quad dy = -\frac{D_0}{D_1}\,d\eta,\ldots,\quad dt = -\frac{D_{n-2}}{D_{n-1}}\,d\tau$$

und mithin:

ist.
$$dx\,dy\,dz\ldots dt = (-1)^n \frac{N_0}{D_{n-1}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\ldots d\tau.$$

§. 111. Diese Transformationsformel kann man leicht vermittelst einer empirischen Regel wiederfinden. Zu dem Zwecke wollen wir bemerken, daß man N_0 aus D_0 ableitet, wenn man den Coefficienten von dx für den von $d\xi$ setzt, und folglich kann man, da der gemeinschaftliche Nenner nur von den Coefficienten des ersten Theils und nicht von dem zweiten Theile der vorhergehenden Gleichung, so wie auch nicht von der Bezeichnung der Unbekannten abhängt, sagen, daß N_0 der gemeinschaftliche Nenner in Beziehung auf die Gleichungen:

$$D_\xi f_0\,d\xi + D_\eta f_0\,d\eta + \ldots + D_\tau f_0\,d\tau = 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_\xi f_{n-1}\,d\xi + D_\eta f_{n-1}\,d\eta + \ldots + D_\tau f_{n-1}\,d\tau = 1$$

ist, während D_{n-1} der den Gleichungen:

$$D_x f_0\,dx + D_y f_0\,dy + \ldots + D_t f_0\,dt = 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_x f_{n-1}\,dx + D_y f_{n-1}\,dy + \ldots + D_t f_{n-1}\,dt = 1$$

entsprechende gemeinschaftliche Nenner ist.

Man differenzire alſo jede der Gleichungen:

$$f_0 = 0,\quad f_1 = 0, \ldots,\quad f_{n-1} = 0,$$

indem man alle Veränderliche als unabhängig betrachtet, ſetze den von den urſprünglichen Differenzialen abhängigen Theil gleich Null, oder gleich einer Conſtante, und ebenſo den von den neuen Differenzialen abhängigen Theil gleich Null oder gleich einer Conſtante; ſo erhält man zwei Gruppen, jede von n Gleichungen, wovon in der erſten Gruppe die Differenziale der urſprünglichen Veränderlichen und in der zweiten die der neuen Veränderlichen als Unbekannte vorkommen. Wenn man alsdann den Nenner für die erſte Gruppe mit D und den für die zweite Gruppe mit Δ bezeichnet; ſo hat man für die geſuchte Transformationsformel:

$$\mathrm{D}\,dx\,dy\,dz \ldots dt = \pm \Delta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \ldots d\tau.$$

Man wendet das doppelte Zeichen ſtatt $(-1)^n$ an, weil die Nenner D, Δ das Zeichen ändern können, je nach der Ordnung, in welcher die zu ihrer Beſtimmung dienenden Gleichungen aufeinander folgen; aber in jedem beſondern Falle hört die Unbeſtimmtheit von ſelbſt auf.

Außerdem hat man:

$$\mathrm{D} = \Sigma(\pm \mathrm{D}_x f_0\, \mathrm{D}_y f_1 \ldots \mathrm{D}_t f_{n-1}),$$
$$\Delta = \Sigma(\pm \mathrm{D}_\xi f_0\, \mathrm{D}_\eta f_1 \ldots \mathrm{D}_\tau f_{n-1}).$$

Wenn die urſprünglichen Veränderlichen explicite durch die Gleichungen:

$$x = \mathfrak{f}_0,\quad y = \mathfrak{f}_1, \ldots,\quad t = \mathfrak{f}_{n-1}$$

als Functionen der neuen Veränderlichen gegeben ſind, ſo findet man:

$$\mathrm{D} = 1$$

und:

$$dx\,dy\,dz \ldots dt = \Sigma(\pm \mathrm{D}_\xi x \mathrm{D}_\eta y \ldots \mathrm{D}_\tau t)\, d\xi\, d\eta \ldots d\tau,$$

wie nach der Methode von Cauchy.

Neunzehnte Vorlesung

Fortsetzung. — Reduction der vielfachen Integrale durch eine Transformation der Coordinaten.

§. 112. Beispiel 1. Betrachten wir zunächst das doppelte Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha x+\alpha' y,\ \beta x+\beta' y)\,dx\,dy.$$

Wenn man setzt:

$$\alpha x+\alpha' y=\xi,\quad \beta x+\beta' y=\eta,$$

diese Gleichungen in Beziehung auf x und y auflöst und für $dx\,dy$ seinen nach den für die Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen gegebenen Regeln berechneten Werth substituirt; so erhält man, wenn man mit k den absoluten Werth $\sqrt{(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2}$ der Differenz $\alpha\beta'-\alpha'\beta$ bezeichnet:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha x+\alpha' y,\quad \beta x+\beta' y)$$
$$=\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta,$$

oder einfacher:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha x+\alpha' y,\quad \beta x+\beta' y)$$
$$=\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dx\,dy.$$

Wir wollen nun annehmen, daß man für die Veränderlichen x, y, welche ursprünglich rechtwinklige Coordinaten ausdrücken, vermittelst der bekannten Formeln:

$$x=r\cos u=r\mathrm{u},\quad y=r\sin u=r\mathrm{v}$$

die Polarcoordinaten r und u substituirt; so kommt:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} F[(\alpha\cos u+\alpha'\sin u)r,\ (\beta\cos u+\beta'\sin u)r]\,r\,dr\,du$$
$$=\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} F(r\cos u,\ r\sin u)\,r\,dr\,du$$

und wenn man ſetzt:

$$F(x,y) = e^{-r} f\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right),$$

$$w = [(\alpha\cos u + \alpha'\sin u)^2 + (\beta\cos u + \beta'\sin u)^2]^{\frac{1}{2}},$$

ſo iſt:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f\left(\frac{\alpha\cos u + \alpha'\sin u}{w}, \frac{\beta\cos u + \beta'\sin u}{w}\right)\frac{re^{-r}\,dr\,du}{w^2}$$
$$= \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f\cos u, \sin u)\, e^{-r} r\,dr\,du.$$

Es iſt aber:

$$\int_0^{\infty} re^{-r}\,dr = 1;$$

folglich:

$$(a)\quad \int_0^{2\pi} f\left(\frac{\alpha\cos u + \alpha'\sin u}{w}, \frac{\beta\cos u + \beta'\sin u}{w}\right)\frac{du}{w^2}$$
$$= \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} f(\cos u, \sin u)\,du.$$

Wenn die Coefficienten $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ den Bedingungen:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 = 1, \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0$$

genügen müßten, ſo hätte man folglich:

$$k = 1, \quad w = (\cos^2 u + \sin^2 u)^{\frac{1}{2}} = 1$$

und:

$$(b)\quad \int_0^{2\pi} f(\alpha\cos u + \alpha'\sin u, \ \beta\cos u + \beta'\sin u)\,du$$
$$= \int_0^{2\pi} f(\cos u, \ \sin u)\,du,$$

$$\int_0^{2\pi} f(\alpha\mathfrak{u} + \alpha'\mathfrak{v}, \beta\mathfrak{u} + \beta'\mathfrak{v})\,du = \int_0^{2\pi} f(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})\,du.$$

§. 113. Beiſpiel 2. Wir wollen nun das dreifache Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z, \ \beta x + \beta' y + \beta'' z,$$
$$\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)\,dx\,dy\,dz.$$

betrachten.

Wenn man ſetzt:

$$\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z = \xi, \quad \beta x + \beta' y + \beta'' z = \eta, \quad \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z = \zeta,$$
$$k = \sqrt{(\alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma)^2}$$

und berechnet den Werth von $dx\,dy\,dz$, ſo findet man:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha x+\alpha' y+\alpha'' z,\ \beta x+\beta' y+\beta'' z,\ \gamma x+\gamma' y+\gamma'' z)\,dx\,dy\,dz$$
$$=\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$
$$=\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Wir wollen nun annehmen, daß man in diese letzte Formel für die rechtwinklige Coordinaten ausdrückenden Veränderlichen x, y, z Polarcoordinaten r, u, ϑ vermittelst der bekannten Formeln:

$$x=r\cos u,\quad y=r\sin u\cos\vartheta,\quad z=r\sin u\sin\vartheta,$$

welche man folgendermaßen ausdrücken kann:

$$x=\mathfrak{u}r,\quad y=\mathfrak{v}r,\quad z=\mathfrak{w}r,$$

wenn man der Kürze wegen setzt:

$$\mathfrak{u}=\cos u,\quad \mathfrak{v}=\sin u\cos\vartheta,\quad \mathfrak{w}=\sin u\sin\vartheta,$$

einführen will; so findet man:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} F[(\alpha\mathfrak{u}+\alpha'\mathfrak{v}+\alpha''\mathfrak{w})r,\ \beta\mathfrak{u}+\beta'\mathfrak{v}+\beta''\mathfrak{w})r,$$
$$(\gamma\mathfrak{u}+\gamma\mathfrak{v}+\gamma''\mathfrak{w})r]r^2\sin u\,dr\,du\,d\vartheta$$
$$=\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} F(\mathfrak{u}r,\mathfrak{v}r,\mathfrak{w}r)r^2\sin u\,dr\,du\,d\vartheta.$$

Setzt man ferner in diese Formel:

$$F(x,y,z)=\tfrac{1}{2}e^{-r}f\left(\frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ \frac{z}{r}\right),$$

berücksichtigt die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} r^2e^{-r}dr=1$$

und setzt der Kürze wegen:

$$w=[(\alpha\mathfrak{u}+\alpha'\mathfrak{v}+\alpha''\mathfrak{w})^2+(\beta\mathfrak{u}+\beta'\mathfrak{v}+\beta''\mathfrak{w})^2+(\gamma\mathfrak{u}+\gamma'\mathfrak{v}+\gamma''\mathfrak{w})^2]^{\frac{1}{2}},$$

so findet man:

$$(\mathrm{A})\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left[\frac{\alpha\mathfrak{u}+\alpha'\mathfrak{v}+\alpha''\mathfrak{w}}{w},\ \frac{\beta\mathfrak{u}+\beta'\mathfrak{v}+\beta''\mathfrak{w}}{w},\ \frac{\gamma\mathfrak{u}+\gamma'\mathfrak{v}+\gamma''\mathfrak{w}}{w}\right]\frac{\sin u\,du\,d\vartheta}{w^3}$$
$$=\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\mathfrak{u},\mathfrak{v},\mathfrak{w})\sin u\,du\,d\vartheta.$$

Wenn die Coefficienten $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β''; $\gamma, \gamma'\ \gamma''$ den Bedingungsgleichungen:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1,\ \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1,$$
$$\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0,\ \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma=0,$$
$$\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0$$

genügen müßten, so hätte man:

$$k=1,\quad w=1,$$

$$\text{(B)}\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha u+\alpha' v+\alpha'' w,\ \beta u+\beta' v+\beta'' w,$$
$$\gamma u+\gamma' v+\gamma'' w)\sin\vartheta\, du\, dv\, d\vartheta$$
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(u,v,w)\sin\vartheta\, du\, dv\, d\vartheta.$$

Wenn die Coefficienten α, α', α'', etc. blos den drei letzten Bedingungsgleichungen genügten, und man setzte:

$$\rho=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}},\ \rho'=(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)^{\frac{1}{2}},\ \rho''=(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)^{\frac{1}{2}},$$

so fände man:

$$k=\rho\rho'\rho'',\quad w=(\rho^2u^2+\rho'^2v^2+\rho''^2w^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Wenn sich die Function $f(x,y,z)$ auf eine Function $f(x)$ der einen Veränderlichen x reducirte, so hätte man blos:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha\cos u+\alpha'\sin u\cos\vartheta+\alpha''\sin u\sin\vartheta)\sin\vartheta\, du\, d\vartheta$$
$$=2\pi\int_0^{\infty} f[(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2)^{\frac{1}{2}}\cos u]\sin u\, du.$$

Diese Formel ist zuerst im Jahre 1819 von Poisson abgeleitet.

Wenn man in der Gleichung (A) setzt.

$$f(x,y,z)=\frac{r}{P}f\left(\frac{P}{Q}\right),$$

indem r, P, Q folgende Werthe haben:

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$P=kx+ky+lz,\ Q=(ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2ezx+2fxy)^{\frac{1}{2}},$$

so braucht man, um den Bedingungsgleichungen:

$$\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0,\ \alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma=0,$$
$$\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,$$

welche ausdrücken, daß die drei neuen Coordinatenaxen auf einander senkrecht sind, zu genügen, für α, β, γ, s; $\alpha', \beta', \gamma', s'$; $\alpha'', \beta'', \gamma'', s''$ nur die drei Werthsysteme von α, β, γ, s zu nehmen, welche den Gleichungen:

$$\frac{a\alpha+f\beta+e\gamma}{\alpha}=\frac{f\alpha+b\beta+d\gamma}{\beta}=\frac{e\alpha+d\beta+c\gamma}{\gamma}=s,$$

genügen und den drei Wurzeln der Gleichung mit s:

$(a-s)(b-s)(c-s)-d^2(a-s)-e^2(b-s)-f^2(c-s)+2def=0$

entsprechen. Denn alsdann sind die drei neuen Coordinatenebenen zu den drei Hauptdiametralebenen der Fläche des zweiten Grades:

$$ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2ezx+2fxy=k$$

parallel, und folglich auf einander senkrecht.

Wir wollen ferner annehmen, daß die nach x, y, z aufgelösten Gleichungen:

$$ax+fy+ez=x,\ fx+by+dz=y,\ ex+dy+cz=z$$

geben:

$$x=ax+fy+ez,\ y=fx+by+dz,\ z=ex+dy+cz.$$

Endlich seien P, Q die Werthe von P, Q, wenn man darin u, v, w für x, y, z setzt, und außerdem wollen wir setzen:

$$D=(abc-ad^2-be^2-cf^2+2def)^{\frac{1}{2}},$$
$$K=(ah^2+bk^2+cl^2+2dkl+2elh+2fhk)^{\frac{1}{2}};$$

so ergiebt sich aus der Formel (A):

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(\frac{P}{Q}\right)\frac{\sin u\,du\,d\vartheta}{P^3}=\frac{2\pi}{K^3D}\int_0^{\pi} f(K\cos u)\frac{\sin u\,du}{\cos^2 u\sqrt{\cos^2 u}}.$$

Betrachtet man den besondern Fall, wo:

$$k=0,\ l=0,\ b=c,\ d=e=f=0$$

ist, so hat man:

$$P=hx,\ Q=[ax^2+b(y^2+z^2)]^{\frac{1}{2}},\ P=hr=hr\cos u,$$
$$Q=(a\cos^2 u+b\sin^2 u)^{\frac{1}{2}},\ D=b\sqrt{a},\ K=h\sqrt{a}=\frac{h}{\sqrt{a}},$$

folglich:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left[\frac{h\cos u}{(a\cos^2 u+b\sin^2 u)^{\frac{1}{2}}}\right]\frac{\sin u\,du\,d\vartheta}{h^3\cos^3 u}$$
$$=\frac{2\pi a^2}{h^3b}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{h\cos u}{\sqrt{a}}\right)\frac{\sin u\,du\,d\vartheta}{\cos^2 u\,du\sqrt{\cos^2 u}},$$

und wenn man die Integration in Beziehung auf ϑ verrichtet:

$$\int_0^{\pi} f\left[\frac{h\cos u}{(a\cos^2 u+b\sin^2 u)^{\frac{1}{2}}}\right]\frac{\sin u\,du}{\cos^3 u}=\frac{\pi a^2}{b}\int_0^{\pi} f\left(\frac{h\cos u}{\sqrt{a}}\right)\frac{\sin u\,du}{\cos^3 u}.$$

Aus dieser letzten Gleichung ergiebt sich leicht:

$$\int_0^{\pi} f\left[\frac{h\cos u}{(a\cos^2 u+b\sin^2 u)^{\frac{1}{2}}}\right]\frac{\sin u\,du}{(a\cos^2 u+b\sin^2 u)^{\frac{1}{2}}}$$
$$=\frac{1}{b\sqrt{a}}\int_0^{\pi} f\left(\frac{h\cos u}{\sqrt{a}}\right)\sin u\,du.$$

und hieraus folgt, wenn man $\cos u = x$ setzt:

$$\int_{-1}^{+1} f\left\{\frac{kx}{[(a-b)x^2+b]^{\frac{1}{2}}}\right\} \frac{dx}{[(a-b)x^2+b]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{b\sqrt{a}} \int_{-1}^{+1} f\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) dx.$$

Aus dieser letzten Gleichung ließen sich merkwürdige Lehrsätze über die Transformation der elliptischen Functionen ableiten.

§. 114. Beispiel 3. Wir wollen nun das Integral:

$$S = \int\int dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 + \left(\frac{ds}{dy}\right)^2}$$

betrachten, welches den Inhalt einer krummen Fläche:

$$f(x, y, z) = 0$$

ausdrückt. Wenn man für die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z mit Hülfe der Gleichungen:

$$x = r\cos u, \quad y = r\sin u\cos\vartheta, \quad z = r\sin u\sin\vartheta$$

die Polarcoordinaten r, u und ϑ substituirt, so wird die Gleichung der krummen Fläche:

$$F(r, p, q) = 0$$

und ihr Flächeninhalt wird, wie wir gesehen haben, durch die Gleichung:

$$S = \int\int du d\vartheta \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

ausgedrückt, worin:

$$X = y'_\vartheta z'_u - y'_u z'_\vartheta, \quad Y = z'_\vartheta x'_u - z'_u x'_\vartheta, \quad Z = x'_\vartheta y'_u - x'_u y'_\vartheta$$

ist. Außerdem hat man:

$$x'_u = r'_u \cos u - r\sin u,$$
$$x'_\vartheta = r'_\vartheta \cos u,$$
$$y'_u = r'_u \sin u\cos\vartheta + r\cos u\cos\vartheta,$$
$$y'_\vartheta = r'_\vartheta \sin u\cos\vartheta - r\sin u\sin\vartheta,$$
$$z'_u = r'_u \sin u\sin\vartheta + r\cos u\sin\vartheta,$$
$$z'_\vartheta = r'_\vartheta \sin u\sin\vartheta + r\sin u\cos\vartheta$$

und folglich:

$$X = r^2 \sin u\cos\vartheta + rr'_u \sin^2 u,$$
$$Y = rr'_\vartheta \sin\vartheta - (r'_u \cos u - r\sin u)\, r\sin u\cos\vartheta,$$
$$Z = rr'_\vartheta \cos\vartheta + (r'_u \cos u - r\sin u)\, r\sin u\sin\vartheta,$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = r^2 [r'^2_\vartheta + (r^2 + r'^2_u)\sin^2 u].$$

Setzt man also:

$$R = \sqrt{r'^2_\vartheta + (r^2 + r'^2_u)\sin^2 u},$$

so findet man:

$$S = \int\int R\, r\, du\, d\vartheta.$$

Wir wollen diese sehr einfache Formel auf das Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ oder } r = \frac{abc}{\sqrt{Au^2 + Bv^2 + Cw^2}}$$

anwenden, wo:

$$A = b^2c^2, \quad B = a^2c^2, \quad C = a^2b^2,$$
$$u = \cos u, \quad v = \sin u \cos\vartheta, \quad w = \sin u \sin\vartheta$$

gesetzt ist. In diesem Falle hat man:

$$r'_u = \frac{-abc\,(B\cos^2 u + C\sin^2 u - A)\sin u \cos u}{(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$r'_\vartheta = \frac{-abc\,(C - B)\sin^2 u \sin\vartheta\cos\vartheta}{(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und folglich:

$$r^2 + r'^2_u = \frac{a^2b^2c^2\,[A^2\cos^2 u + (B\cos^2\vartheta + C\sin^2\vartheta)\sin^2 u]}{(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)^3},$$

$$R = abc\sin u\,\frac{(A^2u^2 + B^2v^2 + C^2w^2)^{\frac{1}{2}}}{(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wenn man die ganze Oberfläche S des Ellipsoides haben will, so muß man in Beziehung auf u zwischen den Grenzen $0, \pi$ und in Beziehung auf ϑ zwischen den Grenzen $\pi, -\pi$ integriren, und alsdann erhält man endlich:

$$S = a^2b^2c^2 \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0}^{\pi} \sin u\, du\, d\vartheta\, \frac{(A^2u^2 + B^2v^2 + C^2w^2)^{\frac{1}{2}}}{(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wenn man das aus dem Mittelpuncte des Ellipsoides auf die Berührungsebene desselben gefällte Perpendikel mit N bezeichnet, so hat man:

$$N = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = \frac{a^2b^2c^2}{r\,(A^2u^2 + B^2v^2 + C^2w^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$(A^2u^2 + B^2v^2 + C^2w^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^2b^2c^2}{rN},$$

ferner:

$$\sqrt{Au^2 + Bv^2 + Cw^2} = \frac{abc}{r},$$

und folglich, wenn man substituirt:

$$S = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{r^3 \sin u\, du\, d\vartheta}{N}.$$

Das doppelte Integral des zweiten Theiles der vorhergehenden Gleichung läßt sich, wie wir sehen werden, leicht auf ein einfaches Integral zurückführen; aber um gewisse merkwürdige Eigenschaften des Ellipsoides besser hervortreten zu lassen, wollen wir dieses Integral einer neuen Transformation unterwerfen. Es seien α, β zwei neue Polarcoordinaten, welche mit den ursprünglichen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z durch die drei Gleichungen:

$$x = a\cos\alpha, \quad y = b\sin\alpha\cos\beta, \quad z = c\sin\alpha\sin\beta$$

verbunden sind; so gehört der durch diese Gleichungen bestimmte Punct offenbar dem Ellipsoide an; denn man hat:

$$\frac{a^2\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta}{b^2} + \frac{c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{c^2} = 1.$$

Außerdem ist:

$$x'_\alpha = -a\sin\alpha, \qquad x'_\beta = 0,$$
$$y'_\alpha = b\cos\alpha\cos\beta, \quad y'_\beta = -b\sin\alpha\sin\beta,$$
$$z'_\alpha = c\cos\alpha\sin\beta, \quad z'_\beta = c\sin\alpha\cos\beta,$$

und wenn man der Kürze wegen setzt:

$$\xi = \cos\alpha, \quad \eta = \sin\alpha\cos\beta, \quad \zeta = \sin\alpha\sin\beta,$$
$$X = bc\xi\sin\alpha, \quad Y = ac\eta\sin\alpha, \quad Z = -ab\zeta\sin\alpha,$$

so ist:

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = \sin\alpha\sqrt{A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2},$$
$$S = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta \sqrt{A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2},$$

wo die Grenzen für die Veränderlichen α, β offenbar dieselben sind, als für die frühern Coordinaten u, ϑ.

Bezeichnet N wieder das aus dem Mittelpuncte des Ellipsoides auf die Berührungsebene desselben gefällte Perpendikel, so hat man:

$$N = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}} = \frac{abc}{\sqrt{A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2}}$$

und folglich:

$$S = abc\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta}{N}.$$

Die Vergleichung dieses Werthes von S mit dem weiter oben gefundenen:

$$S = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{r^2\sin u\, du\, d\vartheta}{N}$$

führt auf einige interessante Resultate, und damit sie sich besser herausstellen, wollen wir zuvor die zwischen den Coordinaten α, β und den frühern Polarcoordinaten r, u, ϑ, oder zwischen den Co-

ordinaten ξ, η, ζ und den Coordinaten u, v, w ſtattfindenden Relationen ſuchen. Wie wir geſehen haben, iſt:

$$x = ru, \quad y = rv, \quad z = rw,$$
$$x = a\xi, \quad y = b\eta, \quad z = c\zeta,$$

und folglich, wenn man wieder ſetzt:

$$A = b^2c^2, \quad B = a^2c^2, \quad C = a^2b^2,$$

ſo iſt:

$$\xi = \frac{u\sqrt{A}}{\sqrt{Au^2+Bv^2+Cw^2}}, \quad \eta = \frac{v\sqrt{B}}{\sqrt{Au^2+Bv^2+Cw^2}},$$
$$\zeta = \frac{w\sqrt{C}}{\sqrt{Au^2+Bv^2+Cw^2}},$$
$$u = \frac{a\xi}{\sqrt{a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2}}, \quad v = \frac{b\eta}{\sqrt{a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2}},$$
$$w = \frac{c\zeta}{\sqrt{a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2}}.$$

Setzt man:

$$\alpha'^2 = b^2\cos^2\beta + c^2\sin^2\beta$$

und ſubſtituirt, nachdem man den Quotienten $\frac{w}{v}$ beſtimmt hat, für u, v, w ihre Werthe; ſo findet man:

$$\cos u = \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha+\alpha'^2\sin^2\alpha}}, \quad \operatorname{tang}\vartheta = \frac{c}{b}\operatorname{tang}\beta.$$

Da die Veränderlichen u und ϑ unabhängig ſind, ſo muß man bei der Differenzirung von $\cos u$ die Größe β, und folglich α als conſtant betrachten. Man hat folglich alsdann:

$$\sin u\,du = \frac{a\alpha'\sin\alpha\,d\alpha}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha+\alpha'^2\sin^2\alpha)^3}}.$$

Differenzirt man die Gleichung, welche $\operatorname{tang}\vartheta$ giebt, ſo findet man ebenſo:

$$d\vartheta(1+\operatorname{tang}^2\vartheta) = \frac{c}{b}(1+\operatorname{tang}^2\beta)\,d\beta$$

und einfacher:

$$d\vartheta = \frac{bcd\beta}{\alpha'^2}.$$

Aus den vorhergehenden Gleichungen folgt:

$$\sin u\,du\,d\vartheta = \frac{abc\sin\alpha\,d\alpha\,d\beta}{(a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2)^{\frac{3}{2}}},$$
$$Au^2+Bv^2+Cw^2 = \frac{Aa^2\xi^2+Bb^2\eta^2+Cc^2\zeta^2}{a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2} = \frac{a^2b^2c^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2}$$
$$= \frac{a^2b^2c^2}{a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2},$$

$$r = \frac{abc}{(Au^2+Bv^2+Cw^2)^{\frac{1}{2}}} = (a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$r^3 \sin u\, du\, d\vartheta = abc \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta.$$

Wenn man die beiden Theile dieser merkwürdigen Gleichung zwischen den entsprechenden Grenzen integrirt, welche $0, \pi$ für u und α und $-\pi, +\pi$ für ϑ und β sind; so hat man:

$$\int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} r^3 \sin u\, du\, d\vartheta = \int_0^{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a^3b^3c^3 \sin u\, du\, d\vartheta}{(Au^2+Bv^2+Cw^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\pi abc,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u\, du\, d\vartheta}{(Au^2+Cv^2+Cw^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi}{a^2b^2c^2} = \frac{4\pi}{A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}}.$$

Dieses zuerst von Poisson angegebene bestimmte Integral ergiebt sich leicht aus der allgemeinen Formel in §. 113.

Da die Grenzen der Veränderlichen α, β auch die von u und ϑ sind, so hat man:

$$abc\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta}{N} = abc\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin u\, du\, d\vartheta}{N},$$

und folglich:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{r^3 \sin u\, du\, d\vartheta}{N} = abc\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\alpha\, d\alpha\, d\beta}{N}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich eine sehr merkwürdige Folgerung. Es seien a', b' die beiden Axen der Ellipse, welche man erhält, wenn man das Ellipsoid mit einer Ebene durchschneidet, welche zu der Berührungsebene parallel und von dem Mittelpuncte des Ellipsoides um die Länge N entfernt ist; so hat man:

$$abc = a'b'N, \quad N = \frac{abc}{a'b'},$$

und folglich:

$$S = \iint a'b' \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta,$$

$$\frac{d^2S}{a'b'} = \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta,$$

und wenn man zwischen den Grenzen $-\pi, +\pi$; $0, \pi$ integrirt:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d^2S}{\pi a'b'} = 4.$$

Diese Gleichung drückt aus, daß die Summe aus den Quotienten der Flächenelemente eines Ellipsoides und der Flächen der zu den Berührungsebenen dieser Elemente parallelen Diametraldurchschnitte $= 4$ ist. Chasles hat von diesem Lehrsatze einen rein geometrischen Beweis gegeben.

§. 115. Wenn man zur Transformation des dreifachen Integrales:

$$V = \iiint dx\, dy\, dz$$

Polarcoordinaten anwendete, welche durch die Gleichungen:

$$x = r\cos u, \quad y = r\sin u\cos\vartheta, \quad z = r\sin u\sin\vartheta$$

bestimmt würden, so fände man, wie wir bereits gesehen haben:

$$V = \int\int\int r^2 \sin u\, du\, d\vartheta\, dr,$$

und wenn man zwischen den Grenzen $0, r$ integrirt:

$$V = \tfrac{1}{3}\int\int r^3 \sin u\, du\, d\vartheta.$$

In dem Falle des Ellipsoides:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

hat man:

$$r = \frac{abc}{(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)^{\frac{1}{2}}},$$

und wenn man zwischen den Grenzen $-\pi$, $+\pi$, 0 und π integrirt; so erhält man für das Volumen des ganzen Ellipsoides:

$$V = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{a^3b^3c^3 \sin u\, du\, d\vartheta}{3(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)^{\frac{1}{2}}}$$

und da dieses Volumen, wie wir gesehen haben, $= \frac{4}{3}\pi abc$ ist, so hat man:

$$V = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin u\, du\, d\vartheta}{(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi}{a^2b^2c^2} = \frac{4\pi}{A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}}.$$

Man findet also auf diese Weise den Werth des bestimmten Integrales im ersten Theile der Gleichung wieder, wogegen man auch von dem bekannten Werthe dieses Integrales ausgehen kann, um das Volumen $V = \frac{4}{3}\pi abc$ zu berechnen. Dieses Volumen ergiebt sich auch unmittelbar vermittelbst der Polarcoordinaten:

$$x = a\cos\alpha, \quad y = b\sin\alpha\cos\beta, \quad z = c\sin\alpha\sin\beta;$$

denn man findet:

$$V = \tfrac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} r^3 \sin u\, du\, d\vartheta$$

$$= \tfrac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} abc \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta = \tfrac{4}{3}\pi abc.$$

§. 116. Wir wollen als viertes Beispiel dieselben Integrale:

$$S = \int\int dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

$$V = \int\int\int dx\, dy\, dz$$

betrachten, welche den Inhalt einer krummen Fläche und des von ihr eingeschlossenen Volumens geben; aber wir wollen jetzt statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z elliptische Coordinaten

r, μ, ν anwenden. Die in Beziehung auf μ und ν genommenen partiellen Ableitungen von r, x, z wollen wir mit:

$$r'_\mu,\ x'_\mu,\ y'_\mu,\ z'_\mu;\quad r'_\nu,\ x'_\nu,\ y'_\nu,\ z'_\nu$$

bezeichnen und:

$$\mathrm{X} = y'_\nu z'_\mu - z'_\nu y'_\mu,\quad \mathrm{Y} = z'_\nu x'_\mu - x'_\nu z'_\mu,\quad \mathrm{Z} = x'_\nu y'_\mu - y'_\nu x'_\mu$$

setzen; so ergiebt sich:

$$\mathrm{S} = \int\int d\mu d\nu \sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2}.$$

Wenn man die Gleichungen:

$$x = \frac{r\mu\nu}{bc},\quad y = \frac{r\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$z = \frac{r\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}},$$

differenzirt und der Kürze wegen setzt:

$$\sqrt{\mu^2 - b^2} = m,\quad \sqrt{b^2 - \nu^2} = n,$$
$$\sqrt{c^2 - \mu^2} = p,\quad \sqrt{c^2 - \nu^2} = q;$$

so findet man:

$$x'_\mu = \frac{r\nu + \mu\nu r'_\mu}{bc},\quad x'_\nu = \frac{r\mu + \mu\nu r'_\nu}{bc},$$

$$y'_\mu = \frac{1}{b\sqrt{c^2 - b^2}}\left(\frac{n}{m} r\mu + mnr'_\mu\right),\quad y'_\nu = \frac{1}{b\sqrt{c^2 - b^2}}\left(mnr'_\nu - \frac{m}{n} r\nu\right),$$

$$z'_\mu = \frac{1}{c\sqrt{c^2 - b^2}}\left(pqr'_\mu - \frac{p}{q} r\mu\right),\quad z'_\nu = \frac{1}{c\sqrt{c^2 - b^2}}\left(pqr'_\nu - \frac{p}{q} r\nu\right),$$

$$\mathrm{Z} = \frac{1}{mnc\sqrt{c^2 - b^2}}\left[\mu r'_\mu m^2 + \nu r'_\nu n^2 + r(\mu^2 - \nu^2)\right],$$

$$\mathrm{Y} = \frac{r}{pqc\sqrt{c^2 - b^2}}\left[\mu r'_\mu p^2 - \nu r'_\nu q^2 - r(\mu^2 - \nu^2)\right],$$

$$\mathrm{X} = \frac{r}{mnpqbc}\left[r\mu\nu(\mu^2 - \nu^2) - \mu r'_\nu n^2 q^2 - \nu r'_\mu m^2 p^2)\right],$$

und wenn man, nachdem diese drei Ausdrücke auf denselben Nenner gebracht sind, die Summe der Quadrate $\mathrm{X}^2, \mathrm{Y}^2, \mathrm{Z}^2$ bildet, so erhält man:

$$\mathrm{S} = \iint r d\mu d\nu \sqrt{\frac{(\mu^2 - \nu^2)\left[m^2 p^2 r'^2_\mu + n^2 q^2 r'^2_\nu + (\mu^2 - \nu^2) r^2\right]}{m^2 n^2 p^2 q^2}}.$$

Wenn μ wieder zwischen b, c liegt und ν kleiner als b ist; so erhält man den achten Theil des Ellipsoides vermittelst des bestimmten Integrales: *)

*) Weiter unten werden wir allgemeiner das Mittel zur Bestimmung der Grenzen der Veränderlichen x, y, z, r, μ und ν angeben, und zeigen, daß

$$S = \int_0^b \int_b^c r\,d\mu\,d\nu \sqrt{\frac{(\mu^2-\nu^2)[m^2p^2r'\mu^2+n^2q^2r'\nu^2+(\mu^2-\nu^2)r'^2]}{m^2n^2p^2q^2}}.$$

Der einfachste Fall ist der, wo die gegebene Fläche eine Kugelfläche ist. Da alsdann der Halbmesser r constant ist, so hat man:

$$r'_\mu = 0, \quad r'_\nu = 0,$$

und wenn S' die ganze Oberfläche der Kugel bezeichnet; so wird sie einmal durch $4\pi r^2$ und dann durch das achtfache vorhergehende Integral, welches sich in dem gegenwärtigen Falle auf:

$$\int_0^b \int_b^c \frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}$$

reducirt, ausgedrückt, und wenn man diese beiden Ausdrücke derselben Fläche einander gleich setzt; so erhält man:

$$\int_0^b \int_b^c \frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Dieses letzte bestimmte Integral drückt also den achten Theil einer Kugeloberfläche von dem Halbmesser $=1$ aus, und wurde zuerst von Lamé angegeben, dann von Poisson als richtig bestätigt und von Chasles und Terquem geometrisch bewiesen.

§. 117. Wir wollen nun zu dem dreifachen Integrale:

$$V = \int\int\int dx\,dy\,dz$$

übergehen, so verwandelt sich dasselbe bekanntlich, wenn r, μ, ν drei neuen Coordinaten bezeichnen, welche mit den frühern x, y, z durch die Gleichungen:

$$dx = \alpha\,dr + \beta\,d\mu + \gamma\,d\nu,$$
$$dy = \alpha'\,dr + \beta'\,d\mu + \gamma'\,d\nu,$$
$$dz = \alpha''\,dr + \beta''\,d\mu + \gamma''\,d\nu$$

verbunden sind, in folgendes dreifache Integral:

$$V = \int\int\int [\alpha''(\gamma\beta' - \beta\gamma') + \beta''(\gamma'\alpha - \gamma\alpha') + \gamma''(\alpha'\beta - \alpha\beta')]\,dr\,d\mu\,d\nu.$$

In dem von uns betrachteten Falle hat man vermöge der zwischen x, y, z und r, μ, ν stattfindenden Gleichungen:

$$dx = \frac{\mu\nu\,dr + r\nu\,d\mu + r\mu\,d\nu}{bc},$$

$$dy = \frac{1}{b\sqrt{c^2-b^2}}\left(mn\,dr + \frac{n}{m}r\mu\,d\mu - \frac{m}{n}r\nu\,d\nu\right),$$

$$dz = \frac{1}{c\sqrt{c^2-b^2}}\left(pq\,dr - \frac{q}{p}r\mu\,d\mu - \frac{p}{q}r\nu\,d\nu\right),$$

und wenn man diese Werthe mit den vorhergehenden vergleicht:

---

die Grenzen $0, b$ für μ und b, c für ν wirklich dem Falle entsprechen, wo man den achten Theil des Ellipsoides haben will.

$$\alpha = \frac{\mu\nu}{bc},\quad \beta = \frac{r\nu}{bc},\quad \gamma = \frac{r\mu}{bc},$$

$$\alpha' = \frac{m n}{b\sqrt{c^2-b^2}},\quad \beta' = \frac{n}{m}\frac{r\mu}{b\sqrt{c^2-b^2}},\quad \gamma' = -\frac{m}{n}\frac{r\nu}{b\sqrt{c^2-b^2}},$$

$$\alpha'' = \frac{pq}{c\sqrt{c^2-b^2}},\quad \beta'' = -\frac{q}{p}\frac{r\mu}{c\sqrt{c^2-b^2}},\quad \gamma'' = -\frac{p}{q}\frac{r\nu}{c\sqrt{c^2-b^2}}.$$

Man hat folglich:

$$\alpha''(\gamma\beta' - \beta\gamma') = \frac{pq}{mn}\frac{r^2(\mu^2-\nu^2)}{c^2(c^2-b^2)},$$

$$\beta''(\gamma'\alpha - \alpha'\gamma) = \frac{mq}{np}\frac{r^2\mu^2}{c^2(c^2-b^2)},$$

$$\gamma''(\alpha'\beta - \alpha\beta) = \frac{np}{mq}\frac{r^2\nu^2}{c^2(c^2-b^2)},$$

Bildet man die Summe dieser drei Ausdrücke und reducirt, so findet man endlich:

$$V = \iiint \frac{(\mu^2-\nu^2)r^2\,dr\,d\mu\,d\nu}{mnpq}.$$

Eine erste Integration in Beziehung auf r zwischen den Grenzen 0 und r giebt:

$$V = \tfrac{1}{3}\iint \frac{(\mu^2-\nu^2)r^3\,d\mu\,d\nu}{mnpq}.$$

In dem Falle einer Kugel ist r constant, und um das ganze Volumen derselben zu erhalten, muß man in Beziehung auf μ zwischen den Grenzen b, c und in Beziehung auf ν zwischen den Grenzen 0, b integriren und mit 8 multipliciren. Auf diese Weise findet man:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{8}{3}r^3\int_0^b\int_b^c \frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu}{mnpq},$$

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Diese Transformationsart läßt sich auch leicht auf den Fall erstrecken, wo man die drei elliptischen Coordinaten λ, μ, ν, welche mit x, y, z durch die Gleichungen:

$$x = \frac{\lambda\mu\nu}{bc},\quad y = \frac{\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}},$$

$$z = \frac{\sqrt{\lambda^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}$$

verbunden sind, beibehielte. Setzt man in diesem Falle:

$$\sqrt{\lambda^2-b^2} = g,\quad \sqrt{\lambda^2-c^2} = k,$$
$$\sqrt{\mu^2-b^2} = i,\quad \sqrt{c^2-\mu^2} = k,$$
$$\sqrt{b^2-\nu^2} = l,\quad \sqrt{c^2-\nu^2} = m,$$

so erhält man:

$$dx = \frac{\mu\nu d\lambda + \lambda\nu d\mu + \lambda\mu d\nu}{bc},$$

$$dy = \frac{1}{b\sqrt{c^2-b^2}}\left(\frac{il\lambda d\lambda}{g} + \frac{gl\mu d\mu}{i} - \frac{gi\nu d\nu}{l}\right),$$

$$dz = \frac{1}{c\sqrt{c^2-b^2}}\left(\frac{km\lambda d\lambda}{k} - \frac{hm\mu d\mu}{k} - \frac{hk\nu d\nu}{m}\right)$$

und folglich:

$$\alpha = \frac{\mu\nu}{bc}, \qquad \beta = \frac{\lambda\nu}{bc}, \qquad \gamma = \frac{\lambda\mu}{bc},$$

$$\alpha' = \frac{il\lambda}{bg\sqrt{c^2-b^2}}, \quad \beta' = \frac{gl\mu}{bi\sqrt{c^2-b^2}}, \quad \gamma' = -\frac{gi\nu}{bl\sqrt{c^2-b^2}},$$

$$\alpha'' = \frac{km\lambda}{ch\sqrt{c^2-b^2}}, \quad \beta'' = -\frac{hm\mu}{ck\sqrt{c^2-b^2}}, \quad \gamma'' = -\frac{hk\nu}{cm\sqrt{c^2-b^2}};$$

$$\alpha''(\gamma\beta' - \beta\gamma') = \frac{\lambda^2(\mu^2-\nu^2)\,kmg}{c^2(c^2-b^2)\,hil},$$

$$\beta''(\gamma'\alpha - \alpha'\gamma) = \frac{\mu^2(\lambda^2-\nu^2)\,hmi}{c^2(c^2-b^2)\,gkl},$$

$$\gamma''(\alpha'\beta - \alpha\beta') = \frac{\nu^2(\lambda^2-\mu^2)\,hkl}{c^2(c^2-b^2)\,gim}.$$

Die nach λ^4, μ^4, ν^4 geordnete Summe dieser drei Ausdrücke ist:

$$\frac{\lambda^4(\mu^2-\nu^2) + \mu^4(\nu^2-\lambda^2) + \nu^4(\lambda^2-\mu^2)}{ghiklm},$$

und wenn man bemerkt, daß:

$$\lambda^4(\mu^2-\nu^2) + \mu^4(\nu^2-\lambda^2) + \nu^4(\lambda^2-\mu^2) = (\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)$$

ist; so erhält man endlich für den Werth von V:

$$V = \iiint \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{ghiklm}\,d\lambda d\mu d\nu.$$

Das Volumen des ganzen Ellipsoides:

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2-b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2-c^2} = 1$$

erhält man, wenn man in Beziehung auf ν zwischen den Grenzen $0, b$, in Beziehung auf μ zwischen den Grenzen b, c und in Beziehung auf γ zwischen den Grenzen c, λ integrirt und mit 8 multiplicirt, wodurch man bekommt:

$$V = 8\int_0^b \int_b^c \int_c^\lambda \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{ghiklm}\,d\lambda d\mu d\nu.$$

Da dieses Volumen aber auch gleich:

$$\tfrac{4}{3}\pi\lambda\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2}$$

ist, so hat man folglich:

$$\int_0^b\int_b^c\int_c^\lambda \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{ghiklm}\,d\lambda d\mu d\nu$$
$$=\frac{\pi}{6}\lambda\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2}.$$

Diesen Werth hat Lamé zuerst für das dreifache Integral im ersten Theile der letzten Gleichung angegeben und Poisson hat seitdem die Richtigkeit der vorhergehenden Gleichung nachgewiesen.

§. 118. Wir halten es nicht für unzweckmäßig, hier den geometrischen Beweis mitzutheilen, welchen Chasles und Terquem von der Gleichung:

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu d\nu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}=\tfrac{1}{2}\pi$$

gegeben haben. Wenn man λ um $d\lambda$ zunehmen läßt, so daß ein zweites unendlich wenig von dem ersten verschiedenes Ellipsoid entsteht, und man nimmt in jedem Puncte M der Oberfläche des ersten Ellipsoides die Dicke $d_\lambda s$ der zwischen der Oberfläche des ersten und zweiten Ellipsoides liegenden Schicht und multiplicirt dann das Verhältniß $\frac{d\lambda}{d_\lambda s}$ durch das Flächenelement $d\omega = d_\mu s d_\nu s$ des ersten Ellipsoides; so wird die Summe $\int\frac{d\lambda}{d_\lambda s}d\omega$ aller dieser Producte, auf den achten Theil der Oberfläche des Ellipsoides erstreckt, durch die Gleichung:

$$\int\frac{d\lambda}{d_\lambda s}\delta\omega =$$
$$b\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2}\int_0^b\int_b^c \frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu d\nu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)}}$$

ausgedrückt (§. 103). Drückt man nun $\frac{d\lambda}{d_\lambda s}$ in rechtwinkligen Coordinaten aus, so findet man, wenn man bemerkt, daß $d_\lambda s$ das unendlich kleine Element der Normale des Ellipsoides ist, und daß, wenn λ allein veränderlich ist, $\frac{dx}{x}=\frac{d\lambda}{\lambda}$ ist:

$$\frac{d\lambda}{d_\lambda s}=\frac{1}{\lambda\sqrt{\frac{x^2}{\lambda^4}+\frac{y^2}{(\lambda^2-b^2)^2}+\frac{z^2}{(\lambda^2-c^2)^2}}}=\frac{N}{\lambda},$$

wo N das aus dem Mittelpuncte des Ellipsoides auf die Berührungsebene desselben gefällte Perpendikel bezeichnet. Man hat folglich:

$$\int\frac{d\lambda}{d_\lambda s}d\omega=\frac{1}{\lambda}\int N d\omega.$$

Aber $\int N d\omega$ ist offenbar der Ausdruck des dreifachen Volumens des Ellipsoides und dieses Volumen selbst wird ausgedrückt durch:

$$\tfrac{4}{3}\pi\lambda\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2};$$

folglich ist:

$$\int\frac{d\lambda}{d_\lambda s}d\omega=\frac{\Gamma}{\lambda}\int N d\omega=4\pi\sqrt{(\lambda^2-b^2)}\sqrt{(\lambda^2-c^2)}$$

$$=8\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2}\int_0^b\int_b^c\frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu d\nu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}$$

und mithin:

$$\int_0^b\int_b^c\frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu d\nu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}=\tfrac{1}{2}\pi.$$

§. 119. Es giebt ein Coordinatensystem, welches das gewöhnliche System der Polarcoordinaten, so wie das der elliptischen Coordinaten von Lamé als besondern Fall unter sich begreift und dessen Anwendung auf einige merkwürdige Transformationen führt. Wir wollen mit r den vom Anfangspuncte nach dem Puncte (x, y, z) gezogenen Radiusvector, mit u, ϑ zwei veränderliche Winkel und mit m, n zwei positive Constanten bezeichnen, welche der Gleichung:

$$m^2+n^2=1$$

genügen müssen; so kann man setzen:

$$x=r\sin u\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta},\quad y=r\cos u\cos\vartheta,$$
$$z=r\sin\vartheta\sqrt{1-n^2\sin^2 u}.$$

Es ist:

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

und die drei Coordinaten x, y, z bestimmen die Lage des Punctes im Raume vollständig. Wenn man für x, y, z ihre Werthe in die Gleichung:

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

substituirt und die Relation $m^2+n^2=1$ berücksichtigt, so findet man:

$$\sin^2 u(1-m^2\sin^2\vartheta)+\cos^2 u\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta(1-n^2\sin^2 u)=1.$$

Um vermittelst dieser Coordinaten eine gegen die Coordinatenebenen symmetrische Ausdehnung, welche von einer Oberfläche begrenzt wird, die die Coordinatenebenen in acht gleiche Theile theilen, zu berechnen, muß man 0 und $\frac{\pi}{2}$ für die Grenzen der Winkel u und ϑ nehmen, und wenn man r constant setzt; so kommt man wieder auf den Fall der Kugelfläche. Wenn die betrachtete krumme Oberfläche ein Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

wäre und der Punct (x, y, z) auf dieſer Oberfläche liegen müßte, ſo müßte man ſetzen:

$$x=a\sin u\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta},$$
$$y=b\cos u\cos\vartheta,$$
$$z=c\sin\vartheta\sqrt{1-n^2\sin^2 u}.$$

Wenn eine der Größen m, n verſchwindet, ſo muß die andere $=1$ ſein. Wenn man z. B. $m=0$ ſetzt, ſo iſt $n=1$, und folglich:

$$x=r\sin u,\quad y=r\cos u\cos\vartheta,\quad z=r\cos u\sin\vartheta,$$

welches der Fall der gewöhnlich angewandten Polarcoordinaten iſt. Dieſelbe Vorausſetzung $m=0$, $n=1$ giebt in dem Falle des Ellipſoides:

$$x=a\sin u,\quad y=b\cos u\cos\vartheta,\quad z=c\sin\vartheta\cos u.$$

Wir haben vorhin geſagt, daß ſich dieſes Coordinatenſyſtem, worin x, y, z durch r, u, ϑ, m und n ausgedrückt werden, auf ein Syſtem elliptiſcher Coordinaten zurückführen läßt. Denn bezeichnet μ eine zwiſchen b, c liegende und ν eine kleinere Größe, als $b<c$, und man ſetzt:

$$\frac{\mu^2-b^2}{c^2-\mu^2}=\cot^2\vartheta,\quad \nu=b\sin u,\quad b=nc,\quad c^2-b^2=c^2m^2,$$

ſo hat man:

$$m^2+n^2=\frac{c^2-b^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1,$$

wo m und n der erforderlichen Bedingung genügen. Subſtituirt man die Werthe von μ^2 und ν^2 in die Gleichungen:

$$bcx=r\mu\nu$$
$$by\sqrt{c^2-b^2}=r\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2},$$
$$cz\sqrt{c^2-b^2}=r\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2},$$

ſo erhält man nach verrichteten Reductionen die Gleichungen:

$$x=r\sin u\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta},$$
$$y=r\cos u\cos\vartheta,$$
$$z=r\sin\vartheta\sqrt{1-n^2\sin^2 u}.$$

Wenn es ſich wieder um ein Ellipſoid handelt, deſſen drei Axen $\lambda, f(\lambda), \mathrm{f}(\lambda)$ ſo beſchaffen ſind, daß man hat:

$$\lambda>f(\lambda)>\mathrm{f}(\lambda);$$

ſo wird daſſelbe in dem Syſteme der Coordinaten r, u, ϑ, m und n ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$x=\lambda\sin u\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta},\quad y=f(\lambda)\cos u\cos\vartheta,$$
$$z=\mathrm{f}(\lambda)\sin\vartheta\sqrt{1-n^2\sin^2 u}.$$

Wenn man in dieſen Gleichungen ſetzt:

$$f(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-b^2},\quad f(\lambda)=\sqrt{\lambda^2-c^2}$$

und, wie wir eben gethan haben, μ und ν für u und ϑ ſubſtituirt; ſo erhält man die Gleichungen wieder:

$$bcx=\lambda\mu\nu,\quad by\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2},$$
$$cz\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{\lambda^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}.$$

§. 120. Wir wollen nun das durch die Formeln:

$$x=r\sin u\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta},$$
$$y=r\cos u\cos\vartheta,$$
$$z=r\sin\vartheta\sqrt{1-n^2\sin^2 u}$$

ausgedrückte Coordinatenſyſtem zur Transformation des Integrales:

$$S=\iint dx\,dy\sqrt{+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

anwenden. Wenn man die in Beziehung auf u und ϑ genommenen partiellen Ableitungen der Veränderlichen x, y, z mit $x'_u, y'_u, z'_u, x'_\vartheta, y'_\vartheta, z'_\vartheta$ bezeichnet, und ſetzt:

$$X=y'_\vartheta z'_u-z'_\vartheta y'_u,\quad Y=x'_\vartheta z'_u-x'_u z'_\vartheta,\quad Z=x'_\vartheta y'_u-x'_u y'_\vartheta$$

ſo wird, wenn man r conſtant annimmt, das transformirte Integral:

$$=\iint du\,d\vartheta\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Außerdem hat man:

$$x'_u=r\cos u\sqrt{1-m^2\sin^2 u},\quad x'_\vartheta=-\frac{rm^2\sin u\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}},$$
$$y'_u=-r\sin u\cos\vartheta,\qquad y'_\vartheta=-r\cos u\sin\vartheta,$$
$$z'_u=-\frac{rn^2\sin u\cos u\sin\vartheta}{\sqrt{1-n^2\sin^2 u}},\qquad z'_\vartheta=r\cos\vartheta\sqrt{1-n^2\sin^2 u}$$

und folglich, wenn man die identiſche Gleichung:

$$1-m^2\sin^2\vartheta-n^2\sin^2 u=m^2\cos^2\vartheta+n^2\cos^2 u$$

berückſichtigt und reducirt:

$$X=\frac{r^2\sin u\,(m^2\cos^2\vartheta+n^2\cos^2 u)\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}\sqrt{1-n^2\sin^2 u}},$$
$$Y=-\frac{r^2\,(m^2\cos^2\vartheta+n^2\cos^2 u)\cos u\cos\vartheta}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}\sqrt{1-n^2\sin^2 u}},$$
$$Z=\frac{r^2\sin\vartheta\,(m^2\cos^2\vartheta+n^2\cos^2 u)\sqrt{1-n^2\sin^2 u}}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}\sqrt{1-n^2\sin^2 u}},$$
$$S=r^2\iint\frac{m^2\cos^2\vartheta+n^2\cos^2 u}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}\sqrt{1-n^2\sin^2 u}}.$$

Da wir r constant angenommen haben, so drückt S nothwendig einen Theil der Kugeloberfläche aus, und man erhält den achten Theil derselben, nämlich $\frac{\pi r^2}{2}$, wenn man das Integral zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ nimmt. Man hat folglich die Gleichung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m^2\cos^2\vartheta + n^2\cos^2 u}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}\sqrt{1-n^2\sin^2 u}}\,du\,d\vartheta = \frac{\pi}{2},$$

welche sich auch auf folgende Form bringen läßt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-m^2\sin^2\vartheta - n^2\sin^2 u}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}\sqrt{1-n^2\sin^2 u}}\,du\,d\vartheta = \frac{\pi}{2}$$

und das berühmte Theorem von Legendre über die elliptischen Functionen enthält. Denn setzt man nach den Bezeichungen dieses berühmten Geometers:

$$F(m,\vartheta) = \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}},\quad E(m,\vartheta) = \int d\vartheta\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta},$$

$$F(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}},\quad E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta},$$

so hat man:

$$\int \frac{\sin^2 u\,du}{\sqrt{1-n^2\sin^2 u}} = \frac{1}{n^2}[F(n,u) - E(n,u)],$$

$$\int \frac{\sin^2\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}} = \frac{1}{m^2}[F(m,\vartheta) - E(m,\vartheta)].$$

Hiernach zerfällt das in Rede stehende Integral in die folgenden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du\,d\vartheta}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}\sqrt{1-n^2\sin^2 u}} = F(m)F(n),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m^2\sin^2\vartheta\,d\vartheta\,du}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}\sqrt{1-n^2\sin^2 u}} = F(n)[F(m) - E(m)],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n^2\sin^2 u\,du\,d\vartheta}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}\sqrt{1-n^2\sin^2 u}} = F(m)[F(n) - E(n)],$$

und wenn man substituirt; so erhält man endlich:

$$F(m)E(n) + F(n)E(m) - F(m)F(n) = \frac{\pi}{2}.$$

Dieses ist genau die von Legendre angegebene Formel. Man würde auch von dem bekannten Ausdrucke für die Kugeloberfläche keine Anwendung zu machen brauchen; denn da die Fläche S von m und n unabhängig sein muß, so kann man $m = 0$ setzen, welches $n = 1$ und:

$$S = r^2 \iint \frac{m^2\cos^2\vartheta + n^2\cos^2 u}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}\sqrt{1-n^2\sin^2 u}}\,du d\vartheta = r^2 \iint \cos u\,du\,d\vartheta$$

giebt, und wenn man zwiſchen den Grenzen 0 und $\frac{2}{\pi}$ integrirt:

$$S = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m^2\cos^2\vartheta + n^2\cos^2 u}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}\sqrt{1-n^2\sin^2 u}}\,du d\vartheta$$

$$= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\,du d\vartheta = r^2\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m^2\cos^2\vartheta + n^2\cos^2 u}{\sqrt{1-m^2\sin^2\vartheta}\sqrt{1-n^2\sin^2 u}}\,du d\vartheta = \frac{\pi}{2}.$$

Zwanzigste Vorlesung.

Verschiedene andere Methoden zur Reduction oder Transformation der vielfachen Integrale.

---

§. 121. Unter den Methoden, welche zur Bestimmung der vielfachen Integrale angewandt werden können, ist eine der fruchtbarsten von Cauchy angegeben, und besteht darin, daß man für einen Factor der Function unter dem Integralzeichen ein bestimmtes Integral von solcher Beschaffenheit substituirt, daß sich die successiven Integrationen nach dieser Substitution leicht verrichten lassen. Wir wollen, um in diesen Gegenstand näher einzugehen, ein vielfaches Integral S von der Form:

$$S = \int\int\int \cdots \frac{P}{Q_\mu}\, dx\, dy\, dz \ldots,$$

betrachten, wo P, Q reelle, oder imaginäre Functionen der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ sind und μ eine positive oder auch eine imaginäre Constante mit einem positiven reellen Bestandtheile bezeichnet. Außerdem wollen wir wie früher durch $\Gamma(\mu)$ das Euler'sche Integral der ersten Art bezeichnen, so haben wir (§. 56):

$$\frac{1}{Q_\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty t^{\mu-1} e^{-Qt} dt,$$

und folglich:

$$S = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \int\int\int \cdots t^{\mu-1} P e^{-Qt}\, dx dy dz \ldots dt.$$

Nun wollen wir annehmen, daß man, indem P_x, Q_x Functionen der einen Veränderlichen x; P_y, Q_y Functionen der einen Veränderlichen y; P_z, Q_z Functionen der einen Veränderlichen z etc. bezeichnen, habe:

$$P = P_x P_y P_z \ldots, \quad Q = Q_x + Q_y + Q_z + \ldots,$$

Setzt man alsdann der Kürze wegen:

$$U = \int P_x e^{-Q_x t}\, dx, \quad V = \int P_y e^{-Q_y t}\, dy, \quad W = \int P_z e^{-Q_z t}\, dz,$$

so hat man:

$$S = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty t^{\mu-1}\, UVW \ldots dt.$$

Wenn man folglich die Werthe von u, v, w ....., als Functionen von t unter endlicher Form erhalten kann, so ist die Bestimmung des vielfachen Integrales S auf die des einfachen Integrales:

$$\int_0^\infty t^{\mu-1}\, uvw \ldots dt$$

zurückgeführt. Wenn man statt der Gleichung:

$$Q = Q_x + Q_y + Q_z \ldots$$

die Gleichung:

$$Q = 1 + Q_x + Q_y + Q_z \ldots$$

hätte, so fände man:

$$S = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty t^{\mu-1}\, uvw \ldots\, e^{-t} dt.$$

Beispiel 1. Es sei:

$$P = x^l y^m z^n \ldots e^{ax} e^{by} e^{cz} \ldots,$$

$$Q = 1 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots.$$

und um die Begriffe zu fixiren, wollen wir auch annehmen, daß die Integrationen in Beziehung auf die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ von den resp. festen Grenzen aus $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta, \ldots$ verrichtet sind, und endlich, daß die Function:

$$1 + \alpha x + \beta y + \gamma z \ldots$$

immer einen reellen positiven Bestandtheil hat, was z. B. stattfindet, wenn die beiden Grenzen jeder Integration positive Größen sind und jede der Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ einen positiven reellen Werth, oder einen imaginären Werth mit einem positiven reellen Bestandtheile hat; so findet man:

$$u = \int_\xi^x x^l e^{(a-\alpha t)x} dx = D_a^l \int_\xi^x e^{(a-\alpha t)x} dx$$

$$= D_a^l \frac{e^{(a-\alpha t)x} - e^{(a-\alpha t)\xi}}{a - \alpha t}, \quad v = \ldots, \quad w = \ldots,$$

$$S = \frac{1}{\Gamma(\mu)} D_a^l D_b^m D_c^n \ldots \int_0^\infty \frac{e^{(a-\alpha t)x} - e^{(a-\alpha t)\xi}}{a - \alpha t} \cdot \frac{e^{(b-\beta t)y} - e^{(b-\beta t)\eta}}{b - \beta t} \ldots t^{\mu-1} e^{-t} dt.$$

Man gelangt also zu der merkwürdigen Folgerung, daß die durch das gegebene vielfache Integral ausgedrückte Function S von $x, y, z, \ldots$ auf ein einfaches bestimmtes Integral mit einer neuen Veränderlichen t zurückgeführt werden kann, was für Werthe man den ursprünglichen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ oder ihren Anfangsgrenzen auch beilegen mag.

Wenn man den Constanten $a, b, c, \ldots$ imaginäre Werthe beilegte, deren reeller Bestandtheil negativ wäre, so müßte man jede Integration zwischen den Grenzen 0 und ∞ verrichten, und man fände:

$$\mathfrak{v}=\mathrm{D}_a^l\int_0^\infty e^{(a-\alpha t)x}dx=\mathrm{D}_a^l\frac{1}{\alpha t-a}=\frac{1.2.3\ldots l}{(\alpha t-a)^{l+1}}=\frac{\Gamma(l+1)}{(\alpha t-a)^{l+1}},$$

$$\mathfrak{v}=\ldots \text{ etc.},$$

und folglich:

$$\mathrm{S}=\frac{\Gamma(l+1)\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)\ldots}{\Gamma(\mu)}\int_0^\alpha\frac{t^{\mu-1}e^{-t}dt}{(\alpha t-a)^{l+1}(\beta t-b)^{m+1}(\gamma t-c)^{n+1}\ldots}.$$

Wenn man in dieser letzten Gleichung $l-1$, $m-1$, $n-1$, ... für l, m, n, ... und $-a$, $-b$, $-c$, ... für a, b, c, ... setzt, so giebt sie:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x\cdots\frac{x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}e^{-ax}e^{-by}e^{-cz}}{(1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots)^\mu}dx\,dy\,dz\ldots$$
$$=\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(\mu)}\cdots\int_0^\infty\frac{t^{\mu-1}e^{-t}dt}{(a+\alpha t)^l(b+\beta t)^m(c+\gamma t)^n}.$$

Diese letzte Formel findet nach dem eben Gesagten immer statt, wenn l, m, n, ... ganze Zahlen sind und a, b, c, ... α, β, γ, ... positive reelle Constanten, oder imaginäre Constanten mit reellen positiven Bestandtheilen bezeichnen.

Beispiel 2. Es sei:

$$\mathrm{P}=x^{l-1}\,y^{m-1}\,z^{n-1}\ldots e^{-ax}\,e^{-by}\,e^{-cz},$$

und:

$$\mathrm{Q}=1+\alpha x+\beta y+\gamma z+\ldots,$$

wo l, m, n, ... reelle positive Constanten, oder imaginäre Constanten mit reellen positiven Bestandtheilen bezeichnen, und wir wollen außerdem 0 und ∞ für die Grenzen der Integrationen in Beziehung auf jede der Veränderlichen x, y, z, ... nehmen; so findet man:

$$\mathfrak{v}=\int_0^\infty x^{l-1}e^{-(a+\alpha t)x}dx=\frac{\Gamma(l)}{(a+\alpha t)^l},$$

$$\mathrm{S}=\frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty\frac{t^{\mu-1}e^{-t}dt}{(a+\alpha t)^l(b+\beta t)^m(c+\gamma t)^n\ldots}.$$

Dieses ist dieselbe Formel, wie die vorhergehende, aber auf reelle, oder imaginäre Werthe der Constanten:

$$l,\ m,\ n,\ldots,\ a,\ b,\ c,\ldots,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots,$$

erstreckt, wofern jedoch die reellen Bestandtheile derselben positiv sind.

Wenn man in der vorhergehenden Gleichung die Veränderlichen x, y, z, ... auf eine einzige reducirt, und außerdem $a=1$ setzt; so findet:

$$\int_0^\infty\frac{x^{l-1}e^{-x}}{(1+\alpha x)^\mu}dx=\frac{\Gamma(l)}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty\frac{t^{\mu-1}e^{-t}}{(1+\alpha t)^l}dt.$$

Setzt man also r statt l und x statt t, so erhält man:

$$\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty\frac{x^{r-1}e^{-x}}{(1+\alpha x)^\mu}dx=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty\frac{x^{\mu-1}e^{-x}}{(1+\alpha x)^r}dx.$$

Diese letzte Formel wird identisch, wenn man $\mu = r$ setzt, und man könnte daraus mehrere andere bemerkenswerthe Formeln ableiten, wenn man beide Theile derselben ein, oder mehrere Male hintereinander in Beziehung auf r differenzirte.

Wenn man die Constanten a, b, c,.... auf Null reducirte, so hätte man:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \frac{x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}}{(1+\alpha x+\beta y+\gamma z\ldots)^\mu} dx\,dy\,dz\ldots$$
$$= \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(\mu)} \int_0^t t\,\frac{t^{\mu-l-m-n\ldots-1}e^{-t}dt}{\alpha^l\beta^m\gamma^n}$$
$$= \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots\Gamma(\mu-l-m-n-\ldots)^\mu}{\Gamma(\mu)} \frac{1}{\alpha^l\beta^m\gamma^m\ldots}.$$

Diese letzte Gleichung findet zuverlässig statt, wenn μ, l, m, n,...., α, β, γ,.... reelle positive Constanten, oder imaginäre Constanten mit einem reellen positiven Bestandtheile sind, und wenn der reelle positive Bestandtheil der Constante μ größer ist, als der reelle positive Bestandtheil der Summe der Constanten l, m, n,..... Wenn man, um die Begriffe zu fixiren, $\alpha=\beta=\gamma=\ldots.=1$ setzt; so findet man:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\ldots}{(1+x+y+z\ldots)^\mu} dx\,dy\,dz\ldots$$
$$= \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots\Gamma(\mu-l-m-n\ldots)^\mu}{\Gamma(\mu)}.$$

Aus dieser Gleichung ließe sich leicht der Werth des Integrales:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \frac{dx\,dy\,dz\ldots.}{(1+x^a+y^b+z^c+\ldots)^k}.$$

ableiten. Wenn man in der vorhergehenden Gleichung die Veränderlichen x, y, z,.... auf eine einzige reducirte und a für l, b für μ setzte; so fände man die bekannte Formel wieder:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b} = \frac{\Gamma(a)\;\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}.$$

Wenn man $b=1$ setzt und bemerkt, daß nach §. 56:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

ist; so erhält man:

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

oder:

$$\Gamma(1+a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi a}{\sin a\pi},$$

und diese letzte Gleichung erstreckt sich nach dem Vorhergehenden selbst auf den Fall, wo die Constante a imaginär ist, wofern sie nur einen positiven reellen Bestandtheil hat.

Wenn man darin z. B. $a\sqrt{-1}$ ſtatt a ſetzt, wo a eine reelle Größe bezeichnet, ſo giebt ſie:

$$\left[\int_0^\infty e^{-x}\cos(alx)\,dx\right]^2+\left[\int_0^\infty e^{-x}\sin(alx)\,dx\right]^2=\frac{2a\pi}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}$$

§. 122. Durch ein ähnliches Verfahren wie das eben angewandte gelangt man leicht zu der Beſtimmung des Integrales:

$$S=\int\int\int\ldots x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots,$$

worin die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ alle poſitive Werthe annehmen müſſen, welche der Ungleichheit:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^q+\left(\frac{z}{c}\right)^r+\ldots<1;$$

genügen, indem $a, b, c, \ldots$; $l, m, n, \ldots$; $p, q, r, \ldots$ poſitive Conſtanten ſind.

Denn wir wollen zunächſt für $\left(\frac{x}{a}\right)^p, \left(\frac{y}{b}\right)^q, \left(\frac{z}{c}\right)^r, \ldots$ reſp. $x, y, z, \ldots$ und folglich für $dx, dy, dz, \ldots$ reſp. ſetzen:

$$\frac{a}{p}x^{\frac{1}{p}-1}dx,\quad \frac{b}{q}y^{\frac{1}{q}-1}dy,\quad \frac{c}{r}z^{\frac{1}{r}-1}dz,\ldots,$$

ſo ergiebt ſich:

$$S=\frac{a^l b^m c^n\ldots}{pqr\ldots}\int\int\int\ldots x^{\frac{l}{p}-1}y^{\frac{m}{q}-1}z^{\frac{n}{r}-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots=\frac{a^l b^m c^n\ldots}{pqr\ldots}S_1.$$

Es bleibt nun noch die Größe S_1 zu beſtimmen übrig, welche ein Integral von derſelben Form als das gegebene iſt; aber worin $x, y, z, \ldots$ alle die poſitiven Werthe annehmen müſſen, welche der Ungleichheit:

$$x+y+z+\ldots<1;$$

genügen, und wenn man ſetzt:

$$\frac{l}{p}-1=a,\quad \frac{m}{q}-1=b,\quad \frac{n}{r}-1=c,\ldots,$$

ſo erhält man:

$$S_1=\int\int\int\ldots x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots.$$

Wenn ſich die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ auf eine einzige reduciren, ſo hat man:

$$S_1=\int_0^1 x^{a-1}dx=a=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1+a)}\ (*).$$

*) Dieſe letzte Transformation beruht auf dem bekannten Lehrſatze:

$$\Gamma(\mu+1)=\mu\Gamma\mu,$$

oder allgemeiner auf:

$$\Gamma(\mu+n)=\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)\,\Gamma(\mu)$$

Für zwei Veränderliche reducirt sich die obige Formel auf:

$$S_1 = \int_0^1 x^{a-1}\,dx \int_0^{1-x} y^{b-1}\,dy = \frac{1}{b}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^b\,dx;$$

aber nach §. 57 ist:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^b\,dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1+b)}{\Gamma(1+a+b)},$$

folglich:

$$S_1 = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(1+b)}{b\,\Gamma(1+a+b)} = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(1+a+b)}.$$

Wir wollen nun annehmen, daß S_1 ein dreifaches Integral sei, so kann man dasselbe auf folgende Form bringen:

$$S_1 = \int_0^1 x^{a-1}\,dx \int_0^{y_1} y^{b-1}\,dy \int_0^{z_1} z^{c-1}\,dz,$$

wo y_1 und z_1 resp. die Differenzen $1-x$, $1-x-y$ bezeichnen, so daß man hat:

$$1-x = y_1, \quad y_1 - y = z_1.$$

Mit η, ζ wollen wir neue Veränderliche bezeichnen und setzen:

$$y = \eta y_1, \quad z = \zeta z_1,$$

so sind 0 und 1 die gemeinschaftlichen Grenzen von η, ζ und das Integral S_1 nimmt folgende Form an:

$$S_1 = \int_0^1 x^{a-1}\,dx \int_0^1 \eta^{b-1} y_1^b\,d\eta \int_0^1 \zeta^{c-1} z_1^c\,d\zeta,$$

oder wegen:

$$y_1 = 1-x, \quad z_1 = y_1 - \eta y_1 = (1-x)(1-\eta):$$

$$S_1 = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+c}\,dx \int_0^1 \eta^{b-1}(1-\eta)^c\,d\eta \int_0^1 \zeta^{c-1}\,d\zeta.$$

Nun ist aber:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+c}\,dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(1+b+c)}{\Gamma(1+a+b+c)},$$

$$\int_0^1 \eta^{b-1}(1-\eta)^c\,d\eta = \frac{\Gamma(b)\,\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+b+c)},$$

$$\int_0^1 \zeta^{c-1}\,d\zeta = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(1+c)},$$

---

welchen man unmittelbar aus der Gleichung:

$$\int_0^\infty x^{\mu-1} e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu},$$

in §. 36 ableitet, wenn man sie n mal hintereinander in Beziehung auf a differenzirt. Denn auf diese Weise findet man:

$$\int_0^\infty x^{\mu+n-1} e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(\mu+n)}{a^{\mu+n}} = \frac{\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)}{a^{\mu+n}}\,\Gamma(\mu) \text{ etc.}$$

folglich:

$$S_1 = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(1+a+b+c)}.$$

Wenn in dem Integrale S_1 vier unabhängige Veränderliche x, y, z, t vorkommen, so ergiebt sich der Werth desselben noch durch dasselbe Verfahren. Man nimmt die Integrationen succesfive in Beziehung auf t, z, y, x verrichtet an und setzt:

$$1-x=y_1, \quad y_1-y=z_1, \quad z_1-z=t_1,$$

wo die Grenzen in Beziehung auf t, z, y, x resp. 0 und t_1, 0 und z_1, 0 und y_1, 0 und 1 sind. Wenn man für y, z und t neue Veränderliche setzt, welche mit den ersten durch die Gleichungen:

$$y=\eta y_1, \quad z=\zeta z_1, \quad t=\vartheta t_1$$

verbunden sind; so sind 0 und 1 die gemeinschaftlichen Grenzen dieser neuen Veränderlichen. Ferner hat man:

$$y_1=(1-x), \; z_1=(1-x)(1-\eta), \; t_1=(1-x)(1-\eta)(1-\zeta),$$

und folglich können die Veränderlichen $x, \eta, \zeta, \vartheta$ getrennt werden, d. h. das vielfache Integral S_1 läßt sich in ein Product von vier Integralen zerlegen, welche alle vermittelst der Gleichung:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

durch die Function Γ ausgedrückt werden können, oder wenn man b in $b+1$ verwandelt, vermittelst der Gleichung:

$$\int_0^1 x^{a-1}\,(1-x)^b dx = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}.$$

§. 123. Man kann diesen Beweis auch noch unter einer andern Form darstellen; denn wir wollen größerer Allgemeinheit wegen das Integral:

$$S=\int\int\int\ldots f(x+y+z\ldots)x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots$$

betrachten, worin $f(x+y+z+\ldots)$ eine beliebige Function von $x+y+z+\ldots$ bezeichnet, während die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ alle positive Werthe annehmen, welche der Ungleichheit:

$$x+y+z+\ldots<k$$

genügen, wo k eine positive Constante ist.

Wir wollen zunächst annehmen, daß das Integral nur zwei Veränderliche x, y enthalte, so kann man setzen:

$$S=\int_0^k x^{l-1}\,dx \int_0^{k-x} f(x+y)\,y^{m-1}\,dy$$

und wenn man $x=\zeta\eta$, $y=\xi\,(1-\eta)$ setzt; so sind 0, k und 0, 1 die Grenzen für die neuen Veränderlichen ξ, η, so daß man hat:

$$S = \int_0^k f(\xi)\,\xi^{l+m-1}\,d\xi \int_0^1 \eta^{l-1}(1-\eta)^{m-1}\,d\eta$$
$$= \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)} \int_0^k f(\xi)\,\xi^{l+m-1}\,d\xi.$$

Der Werth von S ist also zugleich von den Functionen Γ und von einem gewissen einfachen Integrale abhängig.

Wir wollen nun annehmen, daß S drei Veränderliche x, y, z enthalte, und $k-x=y_1$ setzen; so kann man schreiben:

$$S = \int_0^k x^{l-1}\,dx \int_0^{y_1} y^{m-1}\,dy \int_0^{y_1-y} f(x+y+z)\,z^{n-1}\,dz.$$

Aber das Integral:

$$\int_0^{y_1} y^{m-1}\,dy \int_0^{y_1-y} f(x+y+z)\,z^{n-1}\,dz$$

gehört zu dem vorhin betrachteten und ist gleich:

$$\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^{y_1} f(x+\xi)\,\xi^{m+n-1}\,d\xi.$$

Wegen $y_1 = k-x$ hat man folglich:

$$S = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^k x^{l-1}\,dx \int_0^{k-x} f(x+\xi)\,\xi^{m+n-1}\,d\xi$$
$$= \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \cdot \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m+n)}{\Gamma(l+m+n)} \int_0^k f(u)\,u^{l+m+n-1}\,du.$$

Da diese successive Reductionsmethode offenbar allgemein ist, so wird das gegebene Integral S in allen Fällen durch folgende Formel ausgedrückt:

$$S = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(l+m+n+\ldots)} \int_0^k f(u)\,u^{l+m+n+\ldots-1}\,du.$$

Wenn man $f(\mu)=1$, $k=1$ setzt, so geht das Integral S in das zuerst betrachtete über, und man hat:

$$S = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(1+l+m+n+\ldots)},$$

und folglich wird das Integral:

$$\int\int\int \ldots x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} \ldots dx\,dy\,dz \ldots$$

auf alle positive Werthe von x, y, z, ... welche der Ungleichheit:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \ldots < 1$$

genügen, erstreckt, durch folgende Gleichung gegeben:

$$S = \frac{a^l\,b^m\,c^n\ldots}{pqr\ldots} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{l}{p}\right)\Gamma\left(\frac{m}{q}\right)\Gamma\left(\frac{n}{r}\right)\ldots}{\Gamma\left(1+\frac{l}{p}+\frac{m}{p}+\frac{n}{r}+\ldots\right)}.$$

Wenn die Summe $l+m+n+\ldots = 1$ ist und die Function

$f(u)$ die Ableitung $F'(u)$ einer gewiſſen Function $F(u)$, ſo hat man:

$$\int_0^k f(u)\, u^{l+m+n+\ldots-1}\, du = F(k) - F(0),$$

$$\Gamma(1+l+m+n+\ldots) = \Gamma(2) = 1,$$

$$S = \Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots[F(k) - F(0)].$$

In dem Falle eines doppelten Integrales findet man folglich:

$$\int_0^k x^{l-1}\, dx \int_0^{k-x} F'(x+y)\, y^{m-1} dy = \Gamma(l)\,\Gamma(m)\,[F(k) - F(0)]$$

und wenn man die Gleichung:

$$\Gamma(l)\,\Gamma(1-l) = \frac{\pi}{\sin l\pi}$$

berückſichtigt und für m ſeinen Werth $1-l$ ſetzt; ſo erhält man:

$$\int_0^k x^{l-1}\, dx \int_0^{k-x} F'(x+y)\, y^{-l}\, dy = \frac{\pi\,[F(k) - F(0)]}{\sin l\pi}.$$

Es ſei $p < \rho$ ein Parameter, und wir wollen $k = \rho - p$ ſetzen und außerdem annehmen, daß man habe:

$$F(x) = \varphi(x+p);$$

ſo verwandelt ſich die vorhergehende Gleichung in folgende:

$$\int_0^{\rho-p} x^{l-1}\, dx \int_0^{\rho-x-p} \varphi'(x+p+y)\, y^{-l} dy = \frac{\pi\,[\varphi(\rho) - \varphi(p)]}{\sin k\pi}.$$

Setzt man in dieſer letzten Gleichung $\rho = \infty$ und nimmt an, daß die Function $\varphi(\rho)$ für $\rho = \infty$ verſchwindet; ſo findet man:

$$\int_0^\infty x^{l-1}\, dx \int_0^\infty \varphi'(x+p+y)\, y^{-l} dy = -\frac{\pi\,\varphi(p)}{\sin k p}.$$

§. 124. Das Integral:

$$S = \iiint \ldots x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} \ldots dx\, dy\, dz \ldots$$

$$= \frac{a^l b^m c^n \ldots}{pqr\ldots} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{l}{p}\right)\Gamma\left(\frac{m}{q}\right)\Gamma\left(\frac{n}{r}\right)\ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{l}{p} + \frac{m}{q} + \frac{n}{r} \ldots\right)}$$

hat Lejeune-Dirichlet zuerſt angegeben und iſt dazu vermittelſt einer ſehr merkwürdigen Methode gelangt, welche ganz einfach darin beſteht, daß man den zu integrirenden Ausdruck durch einen Factor multiplicirt, deſſen Werth innerhalb der Integrationsgrenzen ſich auf die Einheit reducirt und außerhalb dieſer Grenzen verſchwindet. Um von dieſer Methode einen hinreichenden Begriff zu geben, wollen wir das dreifache Integral:

$$S = -\frac{1}{n-1} \iiint \frac{dx\, dy\, dz}{r^{n-1}}$$

auf alle positiven Werthe von x, y, z, welche der Ungleichheit:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2<1$$

genügen und wo r durch die Gleichung:

$$r^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$$

gegeben wird, erstreckt, zu bestimmen suchen. Dieses Integral dient zur Berechnung der Anziehung, welche das Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

auf einen außerhalb, oder innerhalb desselben liegenden Punct ausübt.

Da das Integral:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\cos k u\,du \quad (*)$$

---

*) Nach §. 55 hat man:

$$\int_0^\infty \sin b x\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}$$

und wenn a, b positive Constanten bezeichnen, so ist:

$$\int_0^\infty \sin bx\cos ax\,\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\int_0^\infty [\sin(b+a)x+\sin(b-a)x]\,\frac{dx}{x}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty \sin(b+a)x\,\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int_0^\infty \sin(b-a)x\,\frac{dx}{x}.$$

Wenn aber $b>a$ ist und $a+b$, $b-a$ sind folglich zwei positive Constanten, so ist jedes der Integrale im zweiten Theile der letzten Gleichung $=\frac{\pi}{2}$ und man hat folglich:

$$\int_0^\infty \sin bx\cos ax\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

Wenn $b<a$, $b-a$ negativ, folglich $a-b$ positiv ist, so ist das erste der beiden genannten Integrale $=\frac{\pi}{2}$, während das zweite, welches man auf folgende Form bringen kann:

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty \sin(a-b)\,\frac{dx}{x}$$

gleich $-\frac{\pi}{2}$ ist. Man hat also:

$$\int_0^\infty \sin bx\cos ax\,\frac{dx}{x}=0.$$

Das Integral:

$$\int_0^\infty \sin bx\cos ax\,\frac{dx}{x}$$

gleich 1 oder gleich Null ist, jenachdem die positive Constante k kleiner, oder größer als die Einheit ist; so folgt, daß das Integral S als der reelle Theil eines neuen Integrales:

$$U=\frac{2}{\pi(n-1)}\int_0^\infty du\frac{\sin u}{u}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)u\sqrt{-1}}}{r^{n-1}}\,dxdydz$$

betrachtet werden kann, worin die Integrationen in Beziehung auf die Veränderlichen x, y, z nun von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt werden können. Um das dreifache Integral in Beziehung auf diese Veränderlichen zu erhalten, drückt man den Bruch:

$$\frac{1}{r^{n-1}}=\frac{1}{(r^2)^{\frac{n-1}{2}}}$$

vermittelst der bekannten Euler'schen Formel:

$$\int_0^\infty e^{rt\sqrt{-1}}t^{s-1}dt=\frac{\Gamma(s)e^{\frac{s\pi}{2}\sqrt{-1}}}{r^s}$$

durch ein bestimmtes Integral aus. Setzt man alsdann:

$$V=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)u\sqrt{-1}+(x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z)t\sqrt{-1}}\,dxdydz,$$

so erhält man:

$$U=-\frac{2}{\pi}\,\frac{e^{-(n-1)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\times$$

$$\int_0^\infty du\,\frac{\sin u}{u}\int_0^\infty dt\,t^{\frac{n-1}{2}-1}e^{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\,t\sqrt{-1}}\,V.$$

V ist das Product dreier einfacher Integrale, wovon das sich auf x beziehende vermöge einer bekannten Formel, welche sich aus der Euler'schen ergiebt, durch folgende Gleichung gegeben wird:

---

ist folglich $=\frac{\pi}{2}$ oder $=0$, jenachdem b größer, oder kleiner ist als a.

Wenn man $b=1$, $a=k$ setzt, so geht die Bedingung $b-a>0$ über in $k<1$, woraus unmittelbar folgt, daß das Integral:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin x\,\cos kx\,\frac{dx}{x}$$

wirklich $=1$ oder $=0$ ist, jenachdem $k\lessgtr 1$ ist.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\left(t+\frac{u}{a^2}\right)x^2-2\alpha t x\right]\sqrt{-1}}\,dx$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{t+\frac{u}{a^2}}}\,e^{-\frac{\alpha^2 t^2}{t+\frac{u}{a^2}}\cdot\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}}.$$

Substituirt man diesen Werth, so wie die Werthe der beiden andern Integrale von ähnlicher Form, setzt dann für die Veränderliche t eine andere ϑ von solcher Beschaffenheit, daß $t=\frac{u}{\vartheta}$ ist, bemerkt, daß:

$$\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^3=\sqrt{-1}\,e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$$

ist, und setzt:

$$\delta=\frac{\alpha^2}{a^2+\vartheta}+\frac{\beta^2}{b^2+\vartheta}+\frac{\gamma^2}{c^2+\vartheta};$$

so findet man, nachdem man in Beziehung auf a differenzirt hat, um die zu der Axe der x parallele Componente A der Anziehung des Ellipsoides zu erhalten:

$$A=\frac{4\alpha}{a^2}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\,\frac{e^{-(n-2)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}}{n-1}\times$$

$$\int_0^{\infty}\frac{d\vartheta\vartheta^{1-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{\vartheta}{a^2}\right)\left(1+\frac{\vartheta}{b^2}\right)\left(1+\frac{\vartheta}{c^2}\right)}}\int_0^{\infty}e^{\delta u\sqrt{-1}}\frac{\sin u}{u^{2-\frac{n}{2}}}\,du.$$

Da dieser Ausdruck auf seinen reellen Bestandtheil reducirt werden muß, so kommt alles darauf an, den Ausdruck von:

$$e^{-(n-2)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\int_0^{\infty}e^{\delta u\sqrt{-1}}\frac{\sin u}{u^{2-\frac{n}{2}}}\,du$$

zu haben. Nun wird aber dieses Integral, wenn man darin für $\sin u$ imaginäre Exponentialgrößen setzt, unmittelbar durch die Eulersche Formel gegeben, wenn man bemerkt, daß für den zweiten Theil dieser Formel die Größe:

$$\frac{\Gamma(s)\,e^{-\frac{\pi s}{2}\sqrt{-1}}}{(-q)^s}$$

gesetzt werden muß, wenn q einen negativen Werth hat. Auf diese Weise findet man, daß der gesuchte reelle Bestandtheil Null oder:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\sin\frac{n\pi}{2}}{2(-\delta)^{\frac{n}{2}-1}} = \frac{\pi}{2\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)(1-\delta)^{\frac{n}{2}-1}}$$

ist, jenachdem $\delta > 1$, oder $\delta < 1$ ist.

Wenn der Punct (α, β, γ) innerhalb des Ellipsoides:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

liegt, so hat man:

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}<1$$

und folglich auch $\delta < 1$. Man hat folglich blos:

$$A=\frac{2\alpha}{a^2}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}\times$$

$$\int_0^\infty \frac{d\vartheta\,\vartheta^{1-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{\vartheta}{a^2}\right)\left(1+\frac{\vartheta}{b^2}\right)\left(1+\frac{\vartheta}{c^2}\right)}}\left(1-\frac{\alpha^2}{a^2+\vartheta}-\frac{\beta^2}{b^2+\vartheta}-\frac{\gamma^2}{c^2+\vartheta}\right)^{1-\frac{n}{2}}.$$

Wenn der Punct (α, β, γ) außerhalb des Ellipsoides liegt, so sucht man die einzige positive Wurzel x der Gleichung:

$$\delta=\frac{\alpha^2}{a^2+\vartheta}+\frac{\beta^2}{b^2+\vartheta}+\frac{\gamma^2}{c^2+\vartheta}=1$$

und es ist offenbar $\delta > 1$, oder $\delta < 1$, jenachdem $\vartheta \lessgtr \lambda$ ist. Der Ausdruck von A ist folglich:

$$A=\frac{2\alpha}{a^2}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}\times$$

$$\int_\lambda^\infty \frac{d\vartheta\,\vartheta^{1-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{\vartheta}{a^2}\right)\left(1+\frac{\vartheta}{b^2}\right)\left(1+\frac{\vartheta}{c^2}\right)}}\left(1-\frac{\alpha^2}{a^2+\vartheta}-\frac{\beta^2}{b^2+\vartheta}-\frac{\gamma^2}{c^2+\vartheta}\right)^{1-\frac{n}{2}}$$

Wenn man in dieser letzten Gleichung $\lambda + \Theta$ für ϑ und:

$$a^2+\lambda=a'^2,\quad \alpha'=\frac{a\alpha}{a'},$$

$$b^2+\lambda=b'^2,\quad \beta'=\frac{b\beta}{b'},$$

$$c^2+\lambda=c'^2,\quad \gamma'=\frac{c\gamma}{c'}$$

setzt, so nimmt sie dieselbe Form an, als wenn der erwähnte Punct innerhalb des Ellipsoides läge.

Es braucht kaum bemerkt zu werden, daß das vorhergehende Verfahren auf jedes Integral von derselben Form, wie das gegebene S anwendbar ist, wie groß übrigens die Anzahl der darin vorkommenden Veränderlichen auch sein mag.

§. 125. Catalan ist durch sehr einfache geometrische Betrachtungen auf eine neue Reductionsmethode gekommen, welche auf eine große Anzahl von Integralen, und namentlich auf das Integral anwendbar ist, welches die Oberfläche des Ellipsoides ausdrückt. Wir wollen daher die Formel:

$$S=\int\int dx\,dy\,\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

wieder betrachten, und annehmen, daß:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

das gegebene Ellipsoid ist; so hat man:

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z},\quad \frac{dz}{dy}=-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z},$$

$$S=\int\int dxdy\sqrt{\frac{1-\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)-\frac{y^2}{b^2}\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}.$$

Wenn man nun den achten Theil der Oberfläche dieses Ellipsoides berechnen will, so muß man die Integrationen auf alle positiven Werthe von x und y erstrecken, welche der Bedingung:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqq 1$$

genügen. Nehmen wir nun an, daß die drei Axen a, b, c der Größe nach auf einander folgen, so daß $a>b>c$ ist, und setzen:

$$1-\frac{c^2}{a^2}=m^2,\quad 1-\frac{c^2}{b^2}=n^2,\quad \frac{x}{a}=\xi,\quad \frac{y}{b}=\eta,$$

$$\zeta=\sqrt{\frac{1-m^2\xi^2-n^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}},$$

so kommt:

$$S=ab\int\int\zeta\,d\xi\,d\eta,$$

wo die Grenzen dieses neuen Integrales durch die Bedingung:

$$\xi^2+\eta^2 \leqq 1$$

gegeben werden. Dieſes Integral $\iint \zeta\, d\xi\, d\eta$ drückt ein Volumen aus, deſſen unendlich kleines Element das Rechteck $d\xi d\eta$ zur Baſis und ζ zur Höhe hat, und kann folglich als das Volumen des Theiles des Cylinders $\xi^2+\eta^2=1$, welcher zwiſchen den poſitiven Theilen der Coordinatenebenen und der Fläche:

$$\zeta^2=\frac{1-m^2\xi^2-n^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}$$

liegt, ausdrückend betrachtet werden.

Wenn man aber die vorhergehende Gleichung auf die Form:

$$(\zeta^2-m^2)\ \xi^2+(\zeta^2-n^2)\ \eta^2=\zeta^2-1$$

bringt und ζ als einen veränderlichen Parameter darin betrachtet, ſo folgt, daß jede auf der Axe des Cylinders ſenkrechte und um eine größere Länge als die Einheit vom Anfangspuncte entfernte Ebene die krumme Fläche nach einer Ellipſe durchſchneidet, deren Gleichung folgende iſt:

$$(\zeta^2-m^2)\ (\xi^2-n^2)\ \eta^2=\zeta^2-1.$$

Für $\zeta=1$ iſt dieſer Durchſchnitt der Anfangspunct der Coordinaten und wenn man ζ von dieſer untern Grenze aus unbeſtimmt zunehmen läßt; ſo erhält man eine Reihe concentriſcher Ellipſen, deren $\zeta=\infty$ entſprechende Grenze der Kreis $\xi^2+\eta^2=1$ iſt. Wir wollen daher für das in Rede ſtehende Volumenelement den Cylinder nehmen, welcher ζ zur Höhe und den vierten Theil des zwiſchen den beiden Ellipſen, welche man erhält, wenn man den Parameter ζ zwei aufeinander folgende Werthe ζ und $\zeta+d\zeta$ beilegt, liegenden Ringes zur Grundfläche hat. Dieſer Ringtheil iſt auch der Zuwachs, oder beſſer, das Differenzial des vierten Theiles der Fläche der Ellipſe:

$$(\zeta^2-m^2)\ \xi^2+(\zeta^2-n^2)\ \eta^2=\zeta^2-1.$$

Da die Hauptaxen dieſer Ellipſe folgende ſind:

$$A=\sqrt{\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-m^2}},\quad B=\sqrt{\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-n^2}},$$

ſo iſt der vierte Theil ihrer Fläche:

$$\frac{\pi}{4}AB=\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-m^2}}\sqrt{\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-n^2}}$$

das Differenzial dieſer Fläche $=\frac{\pi}{4}\,d.AB$, und man hat:

$$S=\frac{\pi ab}{4}\int_1^\infty \zeta d\,AB=\frac{\pi}{4}ab\left[[AB\zeta-\int_1^\infty ABd\zeta\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}ab\left[\frac{\zeta(\zeta^2-1)}{\sqrt{(\zeta^2-m^2)(\zeta^2-n^2)}}-\int_1^\infty\frac{(\zeta^2-1)d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-m^2)(\zeta^2-n^2)}}\right].$$

Die Grenzen von ζ ſind $\zeta=1$, $\zeta=\infty$; denn für $\zeta=1$ hat man

$\xi=0$, $\eta=0$, $\xi^2+\eta^2=0$, und für $\zeta=\infty$ ist $\xi^2+\eta^2=1$, wie es sein muß, wo sich das Integral auf alle Werthe von ξ und η erstrecken muß, welche der Bedingung $\xi^2+\eta^2\leqq 1$ genügen. Das doppelte Integral S ist folglich auf ein einfaches zurückgeführt, dessen Werth wir noch zu bestimmen haben. Zu diesem Zwecke wollen wir setzen:

$$\zeta=\frac{m}{\sin u},$$

so ist:

$$d\zeta=-\frac{m\cos u}{\sin^2 u}\,du,$$

$$\frac{-(\zeta^2-1)d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-m^2)(\zeta^2-n^2)}}=\left(\frac{m^2}{\sin^2 u}-1\right)\frac{du}{\sqrt{m^2-n^2\sin^2 u}}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{m^2-n^2\sin^2 u}}{\sin^2 u}-\frac{1-n^2}{\sqrt{m^2-n^2\sin^2 u}}\right)du.$$

Durch diese Vertauschung der Veränderlichen wird das Integral, welches eine Function von ζ ist, in die beiden folgenden zerlegt:

$$\int\frac{du\sqrt{m^2-n^2\sin^2 u}}{\sin^2 u},\quad -(1-n^2)\int\frac{du}{\sqrt{m^2-n^2\sin^2 u}},$$

wovon jedes von $\sin u=m$ bis $\sin u=0$ genommen werden muß, oder wenn man $m=\sin\mu$ setzt, von $u=\mu$ bis $u=0$. Wenn man die Grenzen umstellt und der Einfachheit wegen $\frac{n}{m}=k$ setzt, so wird die Differenz der beiden Integrale:

$$\frac{1-n^2}{m}\int_0^{\mu}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}-m\int_0^{\mu}\frac{du\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}{\sin^2 u},$$

und wenn man theilweise integrirt:

$$\frac{1-n^2}{m}\int_0^{\mu}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}+m\cot u\sqrt{1-k^2\sin^2 u}$$

$$+mk^2\int_0^{\mu}\frac{\cos^2 u\,du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}},$$

oder:

$$m\cot u\sqrt{1-k^2\sin^2 u}+\frac{1}{m}\int_0^{\mu}\frac{(1-m^2k^2\sin^2 u)du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}},$$

oder:

$$m\cot u\sqrt{1-k^2\sin^2 u}+m\int_0^{\mu}\sqrt{1-k^2\sin^2 u}\,du$$

$$+\frac{1-m^2}{m}\int_0^{\mu}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}},$$

oder endlich, wenn man die gewöhnlichen Bezeichnungen anwendet:

$$m\cot u\sqrt{1-k^2\sin^2 u}+m\,\mathrm{E}(k,\mu)+\frac{1-m^2}{m}\,\mathrm{F}(k,\mu).$$

Es bleibt nun noch die Summe der Größen:

$$\frac{(\zeta^2-1)\,\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-m^2)(\zeta^2-n^2)}},\quad m\cot u\sqrt{1-k^2\sin^2 u}$$

zwischen den den Veränderlichen ζ und u entsprechenden Grenzen zu berechnen. Wenn man die erste als Function von u ausdrückt, so kommt es darauf an, die Gleichung:

$$m\cot u\sqrt{1-k^2\sin^2 u}-\frac{m^2-\sin^2 u}{\sin u\,\cos u\sqrt{m^2-n^2\sin^2 u}}$$
$$=\frac{(1-m^2-n^2\cos^2 u)\sin u}{\cos u\sqrt{m^2-n^2\sin^2 u}}$$

zwischen den Grenzen $u=0$, $\sin u=m$ zu bestimmen. Da dieser Werth an der ersten Grenze verschwindet, so braucht man nur darin $\sin u=m$ zu setzen, wodurch sich derselbe in folgenden verwandelt:

$$\frac{(1-m^2)\,(1-n^2)m}{m\sqrt{1-m^2}\sqrt{1-n^2}}=\sqrt{(1-m^2)\,(1-n^2)}.$$

Aus allem Vorhergehenden folgt endlich, daß die ganze Oberfläche des Ellipsoides durch die Gleichung:

$$S=2\pi ab\left[\sqrt{1-m^2}\sqrt{1-n^2}+m\mathrm{E}(k,\mu)+\frac{1-m^2}{m}\mathrm{F}(k,\mu)\right]$$

oder:

$$S=2\pi c^2+\frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}[(a^2-c^2)\mathrm{E}(k,\mu)+c^2\mathrm{F}(k,\mu)]$$

gegeben wird. Dieser Werth unterscheidet sich blos durch die Bezeichnungen von dem zuerst von Legendre (Exercices de Calcul intégral t. 1. p. 109) angegebenen, und um denselben anzuwenden, muß man sich erinnern, daß:

$$k^2=\frac{n^2}{m^2}=\frac{a^2\,(b^2-c^2)}{b^2\,(a^2-c^2)},$$

$$\sin\mu=m=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a},\quad\cos\mu=\frac{c}{a}.$$

§. 126. Wenn man das Integral S blos auf ein einfaches Integral hätte zurückführen wollen, ohne bis zu den elliptischen Functionen hinabzugehen, wie wir es vorhin mit Lobatto gethan haben; so hätte man etwas anders verfahren können. Denn betrachten wir die Gleichung:

$$S=ab\int\int\zeta\,d\xi\,d\eta$$

wieder, so zeigt sie uns, daß S ein Volumen ist, dessen Element ein Parallelepipedum ist, welches das Rechteck $d\xi d\eta$ zur Grundfläche und ζ zur Höhe hat. Es bezeichne A eine Fläche, deren Element oder Differenzial $d\xi d\eta$ ist, oder welche durch die Gleichung:

$$A = \int\int d\xi\, d\eta$$

bestimmt wird; so kann man setzen:

$$S = \int \zeta dA.$$

Da ξ, η stets der Gleichung:

$$(\zeta^2 - m^2)\,\xi^2 + (\zeta^2 - n^2)\,\eta^2 = \zeta^2 - 1$$

und der Bedingung:

$$\xi^2 + \eta^2 \leqq 1$$

genügen müssen, so sind 1, ∞ die entsprechenden Grenzen von ζ, und da A nur der vierte Theil der durch die vorhergehende Gleichung ausgedrückten Ellipse sein kann; so hat man folglich:

$$A = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-m^2}}\, \sqrt{\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-n^2}},$$

$$S = \frac{\pi}{4} ab \int_1^\infty \zeta d. \sqrt{\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-m^2}}\, \sqrt{\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-n^2}}.$$

Wenn man die Differenzirung verrichtet, reducirt und setzt:

$$U = \int_1^\infty \frac{\zeta^2 d\zeta}{\sqrt{\zeta^2-m^2}\,\sqrt{\zeta^2-n^2}},$$

so findet man:

$$S = \frac{\pi}{4} ab \left[\frac{1-m^2}{m}\frac{dU}{dm} + \frac{1-n^2}{n}\frac{dU}{dn}\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[n(1-m^2)\frac{dU}{dm} + m(1-n^2)\frac{dU}{dn}\right].$$

Das doppelte Integral ist also auf ein einfaches zurückgeführt.

§. 127. Als zweites Anwendungsbeispiel dieser Methode wollen wir das dreifache Integral:

$$S = \int\int\int dx\, dy\, dz \sqrt{\frac{1-m^2x^2-n^2y^2-p^2z^2}{1-x^2-y^2-z^2}}$$

betrachten, worin m, n, p positive Constanten, kleiner als die Einheit, sind, und annehmen, daß sich die Integration auf alle positive Werthe von x, y, z erstrecken muß, welche der Bedingung:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$$

genügen.

Es sei:

$$t^2 = \frac{1-m^2x^2-n^2y^2-p^2z^2}{1-x^2-y^2-z^2},$$

folglich:

$$\frac{t^2-m^2}{t^2-1}x^2 + \frac{t^2-n^2}{t^2-1}y^2 + \frac{t^2-p^2}{t^2-1}z^2 = 1,$$

und es bezeichne V ein Volumen, deſſen Element $dx\,dy\,dz$ iſt, und welches folglich durch die Gleichung:

$$V = \iiint dx\,dy\,dz$$

beſtimmt wird; ſo kann S auf die Form $\int t\,dV$ gebracht werden, und da die Grenzen 1, ∞ von t reſp.:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0$$

und:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

entſprechen; ſo hat man:

$$S = \int_1^{\infty} t\,dV.$$

Das Differenzial dV iſt eine leicht zu beſtimmende Function von t; denn da die poſitiven Veränderlichen x, y, z beſtändig der Gleichung eines Ellipſoides genügen müſſen, deſſen Axen folgende Werthe haben:

$$A = \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-m^2}},\quad B = \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-n^2}},\quad C = \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-p^2}},$$

ſo kann V nur der vierte Theil $\frac{\pi}{3}$ABC des Volumens dieſes Ellipſoides ſein, und man findet folglich:

$$d.ABC = \frac{t\,dt\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{(t^2-m^2)(t^2-n^2)(t^2-p^2)}} \times \left(\frac{1-m^2}{t^2-m^2} + \frac{1-n^2}{t^2-n^2} + \frac{1-p^2}{t^2-p^2}\right),$$

und wenn man:

$$U = \int_1^{\infty} \frac{t^2\,dt\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{(t^2-m^2)(t^2-n^2)(t^2-p^2)}}$$

ſetzt:

$$S = \frac{1}{8}\,\pi\left(\frac{1-m^2}{m}\,\frac{dU}{dm} + \frac{1-n^2}{n}\,\frac{dU}{dn} + \frac{1-p^2}{p}\,\frac{dU}{dp}\right).$$

§. 128. Die eben erhaltenen Reſultate ſind aus geometriſchen Betrachtungen abgeleitet, welche ſich nicht auf mehr als drei Veränderliche erſtrecken laſſen. Allein es muß als *a priori* einleuchtend angeſehen werden, daß alle dieſe gewiſſermaßen fremdartigen Betrachtungen der Ausdruck eines einzigen analytiſchen Factums ſind, wovon man ſich auch leicht überzeugen kann. Dann betrachten wir das vielfache Integral den n^{ten} Ordnung:

$$S = \iint\ldots dx\,dy\,dz\ldots\sqrt{\frac{1-m^2x^2-n^2y^2-p^2z^2\ldots}{1-x^2-y^2-z^2\ldots\ldots}},$$

worin m, n, p,.... poſitive Conſtanten, kleiner als die Einheit, und x, y, z,.... poſitive Veränderliche ſind, welche der Bedingung:

$$x^2+y^2+z^2\ldots\leqq 1$$

genügen müssen.

Wir wollen setzen:

$$t^2=\frac{1-m^2x^2-n^2y^2-n^2z^2-\ldots}{1-x^2-y^2-z^2\ldots\ldots}$$

und das vielfache Integral $\int\int\int\ldots dxdydz\ldots$ berechnen, worin $x, y, z, \ldots$ alle Werthe annehmen, welche der Bedingung:

$$\frac{t^2-m^2}{t^2-1}x^2+\frac{t^2-n^2}{t^2-1}y^2+\frac{t^2-p^2}{t^2-1}z^2\ldots\leqq 1,$$

die nicht mit der ersten:

$$x^2+y^2+z^2+\ldots\leqq 1$$

im Widerspruche steht, weil die Verhältnisse:

$$\frac{t^2-m^2}{t^2-1},\quad \frac{t^2-n^2}{t^2-1},\ldots$$

alle größer als die Einheit sind, genügen; so erhalten wir ein durch $t, m, n, p, \ldots$ ausgedrücktes bestimmtes Integral, welches wir mit $F(t)$ bezeichnen können. Wir wollen nun der Veränderlichen t einen neuen Werth $\vartheta=t+dt$ beilegen und das Integral $\int\int\int\ldots dx\,dy\,dz\ldots$ zwischen den neuen Grenzen berechnen, welche sich aus der Bedingung:

$$\frac{t^2-m^2}{t^2-1}x^2+\frac{t^2-n^2}{t^2-1}y^2+\ldots\leqq 1$$

ergeben, wenn man darin ϑ für t setzt, und dann das erste Resultat von dem zweiten abziehen; so drückt die Differenz $=d.F(t)$ die Summe der Werthe aus, welche die Function $dx\,dy\,dz\ldots$ annimmt, wenn die Veränderlichen der Bedingung:

$$\frac{t^2-m^2}{t^2-1}x^2+\frac{t^2-n^2}{t^2-1}+\ldots=1$$

genügen und wenn in dieser Gleichung der Parameter t von dem Werthe t zu dem Werthe $t+dt$ übergeht. Man kann folglich nach den ersten Principien der Integralrechnung das Product $td.F(t)$ als den Theil des Integrales:

$$S=\int\int\int\ldots dx\,dy\,dz\ldots\sqrt{\frac{1-m^2x^2-n^2y^2\ldots.}{1-x^2-y^2-z^2\ldots.}},$$

welchen man erhielte, wenn man die Wurzelgröße von t bis $t+dt$ wachsen ließe, ausdrückend betrachten, und außerdem entsprechen den Grenzen:

$$x^2+y^2+z^2\ldots.=0,\quad x^2+y^2+z^2\ldots=1$$

die Werthe $t=1$, $t=\infty$. Um also den vollständigen Werth des gesuchten Integrales zu erhalten, braucht man nur die Summe

der Werthe zu nehmen, welche die Function $td.F(t)$ annimmt, wenn sich t von 1 bis ∞ stetig ändert. Kurz, wenn man setzt:

$$F(t) = \int\int\int \ldots dx\,dy\,dz \ldots,$$

indem die Grenzen durch die Bedingung:

$$\frac{t^2-m^2}{t^2-1}x^2 + \frac{t^2-n^2}{t^2-1}y^2 + \frac{t^2-p^2}{t^2-1}z^2 + \ldots \leqq 1$$

bestimmt werden; so hat man:

$$\int\int\int \ldots dx\,dy\,dz \ldots \sqrt{\frac{1-m^2x^2-n^2y^2-p^2z^2\ldots}{1-x^2-y^2-z^2\ldots}} = \int_1^\infty td\,F(t),$$

wo die Grenzen des vielfachen Integrales durch die Bedingung:

$$x^2 + y^2 + z^2 \ldots \leqq 1$$

gegeben werden.

Da man hat:

$$\int td.F(t) = tF(t) - \int F(t)\,dt,$$

so kann man das gegebene bestimmte Integral auf eine einfachere Form bringen, wobei auch keine Differenzirung mehr zu verrichten ist.

Zur Bestimmung der bis jetzt unbekannt gebliebenen Function $F(t)$ braucht man nur die merkwürdige Formel von Dirichlet:

$$\int\int\int \ldots x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}\ldots dx\,dy\,dz \ldots$$

$$= \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots}{pqr\ldots} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\ldots}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\ldots\right)},$$

anzuwenden, worin, wie wir gesehen haben, indem alle Constanten positiv sind, die ebenfalls positiven Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ der Bedingung:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r + \ldots \leqq 1$$

genügen müssen. Um diese Formel zur Berechnung der Function $F(t)$ anzuwenden, braucht man nur zu setzen:

$$\alpha = \beta = \gamma = \ldots = 1,$$

$$a = \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-m^2}},\quad b = \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-n^2}} \ldots p = q = r = \ldots = 2;$$

so erhält man unmittelbar wegen:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

und wenn ν die Anzahl der Veränderlichen bezeichnet:

$$\mathbf{F}(t) = \int\int\int \ldots dx\,dy\,dz \ldots = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)} \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-m^2}\cdot\frac{t^2-1}{t^2-n^2}} \cdots$$

und folglich:

$$\mathbf{S} = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)} \int_1^{\infty} td. \sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-m^2}\cdot\frac{t^2-1}{t^2-n^2}} \cdots.$$

Wenn man die angezeigte Differenzirung verrichtet, so erhält man:

$$\mathbf{S} = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)} \times$$

$$\int_1^{\infty} \frac{t^2(t^2-1)^{\frac{\nu}{2}-1}\,dt}{\sqrt{(t^2-m^2)(t^2-n^2)\ldots}} \left(\frac{1-m^2}{t^2-m^2} + \frac{1-n^2}{t^2-n^2} + \ldots\right).$$

Der Fall, wo $m=n=p=\ldots$ ist, verdient noch bemerkt zu werden, und man hat alsdann:

$$\mathbf{S} = \int\int\int \ldots dx\,dy\,dz \ldots \sqrt{\frac{1-m^2(x^2+y^2+z^2+\ldots)}{1-(x^2+y^2+z^2+\ldots)}}$$

$$= \nu(1-m^2)\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)} \int_1^{\infty} \frac{t^2(t^2-1)^{\frac{\nu}{2}-1}\,dt}{(t^2-m^2)^{\frac{\nu}{2}+1}}.$$

Setzt man:

$$t^2-1 = (t^2-m^2)\sin^2 u,$$

so erhält man successive:

$$t^2 = \frac{1-m^2\sin^2 u}{\cos^2 u},\quad t^2-m^2 = \frac{1-m^2}{\cos^2 u},$$

$$t^2-1 = (1-m^2)\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u},\quad tdt = (1-m^2)\frac{\sin u\,du}{\cos^3 u},$$

$$t^2dt = (1-m^2)\frac{\sin u\,du\sqrt{1-m^2\sin^2 u}}{\cos^4 u},$$

$$\frac{t^2dt}{(t^2-m^2)^2}\cdot\left(\frac{t^2-1}{t^2-m^2}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} = \frac{1}{1-m^2}\sin^{\nu-1}u\,du\sqrt{1-m^2\sin^2 u},$$

$$\mathbf{S} = 2\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-1}u\,du\sqrt{1-m^2\sin^2 u}.$$

Wenn ν eine ungerade Zahl ist, so läßt sich das Integral auf elliptische Transcendenten der ersten und zweiten Art zurückführen, und wenn ν eine gerade Zahl ist, so kann das Integral durch Logarithmen ausgedrückt werden. Es wird nicht unnütz sein, zu zeigen, wie diese Reduction bewerkstelligt wird.

Wenn man $t\sqrt{1-m^2\sin^2 u} = \Delta$ setzt, so hat man identisch:

$$\sin^{\nu-1}u\,du\,\Delta = \sin^{\nu-3}u\,du\,\Delta + \frac{1}{2m^2}\sin^{\nu-4}u\cos u \times -2m^2\sin u\cos u\,du\,\Delta,$$

folglich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\nu-1}u\,du\,\Delta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\nu-3}u\,du\,\Delta - \frac{1}{3m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta^3[(\nu-4)\sin^{\nu-5}u\cos^2 u\,du - \sin^{\nu-3}u\,du]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\nu-3}u\,du\,\Delta - \frac{\nu-4}{3m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\nu-5}u\,du\,\Delta + \frac{\nu-4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\nu-3}u\,du\,\Delta$$

$$+ \frac{\nu-3}{3m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\nu-3}u\,du\,\Delta - \frac{\nu-3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\nu-1}u\,du\,\Delta.$$

Wenn man der Kürze wegen setzt:

$$A_{\nu-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\nu-1}u\,du\sqrt{1-m^2\sin^2 u},$$

so giebt diese Gleichung:

$$A_{\nu-1} = \frac{(\nu-1)m^2+(\nu-3)}{\nu m^2}A_{\nu-3} - \frac{\nu-4}{\nu m^2}A_{\nu-5}.$$

Wenn ν eine ungerade Zahl ist, so hat man:

$$A_0 = E_1,\quad A_2 = \frac{2m^2-1}{3m^2}E_1 + \frac{1-m^2}{3m^2}F_1$$

und wenn man von diesen Werthen ausgeht, so kann man leicht A_4, A_6, ... berechnen.

Wenn ν eine gerade Zahl ist, so sind die anfänglichen Glieder der Reihe:

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\,du\sqrt{1-m^2\sin^2 u},$$

$$A_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 u\,du\sqrt{1-m^2\sin^2 u}.$$

Zur Bestimmung dieser beiden Integrale wollen wir $\cos u = x$ setzen, so verwandelt sich das erste unmittelbar in:

$$\int_0^1 dx \sqrt{1-m^2+m^2x^2} = m\int_0^1 dx \sqrt{n^2+x^2},$$

wenn man $\frac{1-m^2}{m^2} = n^2$ setzt. Nun hat man aber:

$$\int dx \sqrt{n^2+x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{n^2+x^2} + \frac{n^2}{2} l(x+\sqrt{n^2+x^2}),$$

folglich:

$$\int_0^1 dx \sqrt{n^2+x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{n^2+1} + \frac{n^2}{2} l\left(\frac{1+\sqrt{1+n^2}}{n}\right),$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1-m^2}{m} l\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}\right).$$

Das zweite Integral läßt sich successive in:

$$A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\,(1-\cos^2 u)du \sqrt{1-m^2\sin^2 u}$$

$$= A_1 - m\int_0^1 x^2 dx \sqrt{n^2+x^2}$$

verwandeln; aber die theilweise Integration giebt:

$$\int x^2 dx \sqrt{n^2+x^2} = \frac{x(n^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - n^2 \int dx \sqrt{n^2+x^2}}{4},$$

folglich:

$$m\int_0^1 x^2 dx \sqrt{n^2+x^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{m^2} - n^2 A_1\right),$$

$$A_2 = \left(1+\frac{n^2}{4}\right)A_1 - \frac{1}{4m^2} = \frac{3m^2+1}{4m^2}A_1 - \frac{1}{4m^2},$$

und endlich:

$$A_2 = \frac{3m^2-1}{8m^2} + \frac{(1-m^2)(3m^2+1)}{8m^2} l\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}.$$

Da die beiden ersten Glieder der Reihe bekannt sind, so kann man die folgenden leicht berechnen.

In dem besondern Falle, wo $m=0$ ist, hat man:

$$S = 2\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-1} u du$$

$$= 2\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \times \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}$$

und folglich:

$$\int\int\int\ldots\frac{dxdydz\ldots}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2\ldots}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}\frac{\pi^{\frac{\nu+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)},$$

in welchem Integrale die Veränderlichen positiv sind und der Bedingung:

$$x^2+y^2+z^2+\ldots\leqq 1$$

genügen.

§. 129. Die vorhergehende Reductionsmethode läßt sich unter der folgenden allgemeinen Form darstellen.

Wir wollen annehmen: 1) daß das gegebene Integral:

$$S=\int\int\int\ldots dx\,dy\,dz\ldots F(x,y,z,\ldots)F[f(x,y,z,\ldots)]$$

sei; 2) daß die der Einfachheit wegen als positiv vorausgesetzten ν Veränderlichen x, y, z, ... immer der Bedingung:

$$\varphi(x,y,z,\ldots)\leqq 0$$

genügen müssen; 3) daß die Function $f(x, y, z,....)$ so beschaffen sei, daß sie bestimmte bekannte Werthe t_0, T annimmt, wenn man setzt:

$$x=y=z\ldots=0,\ \varphi=0;$$

4) daß das Integral:

$$\int\int\int\ldots dx\,dy\,dz\ldots F(x,y,z,\ldots)$$

zwischen den Grenzen:

$$x=y=z\ldots=0,\ f(x,y,z,\ldots)\leqq t$$

genommen, bekannt und $=f(t)$ sei, und endlich 5) daß man, wenn die zweite Bedingung:

$$f(x,y,z,\ldots,)\leqq t$$

mit der ersten:

$$\varphi(x,y,z,\ldots)\leqq 0$$

nicht im Widerspruche steht und t sich von t_0 bis T stetig ändert, alle Systeme von Werthen von x, y, z,.... wiedererhält, welche der ersten Bedingung genügen; so hat man:

$$S=\int_{t_0}^{T}F(t)\frac{d.f(t)}{dt}\,dt.$$

Die Richtigkeit dieses Lehrsatzes wird einleuchtend, wenn man in dem allgemeinen Falle die bereits an dem besondern Beispiele gemachten Schlüsse wiederholt.

Als erſtes Beiſpiel wollen wir das Integral:

$$S = \int\int\int \ldots dx dy dz \ldots x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \ldots \left(\frac{1-ax^\alpha-by^\beta-cz^\gamma-\ldots}{1-x^\alpha-y^\beta-z^\gamma-\ldots}\right)^{\frac{1}{m}}$$

betrachten, worin die Größen $p, q, r, \ldots$ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ beliebige poſitive Conſtanten, $a, b, c, \ldots$ kleinere Conſtanten als die Einheit, m eine poſitive Größe >1 und $x, y, z, \ldots$ Veränderliche bezeichnen, welche alle poſitive Werthe annehmen können, die der Bedingung:

$$x^\alpha + y^\beta + z^\gamma + \ldots \leqq 1$$

genügen.
Wenn man ſetzt:

$$t^m = \frac{1-ax^\alpha-by^\beta-cz^\gamma-\ldots}{1-x^\alpha-y^\beta-z^\gamma\ldots},$$

$$f(t) = \int\int\int \ldots dx\, dy\, dz \ldots x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \ldots,$$

indem die Grenzen durch die Bedingung:

$$(t^m-a)x^\alpha + (t^m-b)y^\beta + \ldots \leqq t^m - 1$$

oder:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{t^m-1}{t^m-a}}}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{\sqrt{\frac{t^m-1}{t^m-b}}}\right)^\beta + \ldots \leqq 1$$

beſtimmt werden; ſo hat man:

$$S = \int_1^\infty t d f(t).$$

Ferner hat man nach dem Lehrſatze von Dirichlet:

$$f(t) = \frac{\left(\frac{t^m-1}{t^m-a}\right)^{\frac{p}{\alpha}} \left(\frac{t^m-1}{t^m-b}\right)^{\frac{q}{\beta}} \left(\frac{t^m-1}{t^m-c}\right)^{\frac{r}{\gamma}} \ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)\ldots}{\Gamma\left(1+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\ldots\right)},$$

und folglich:

$$S = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\ldots} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\Gamma\left(1+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\ldots\right)} \int_1^\infty t d\left[\left(\frac{t^m-1}{t^m-a}\right)^{\frac{p}{\alpha}} \left(\frac{t^m-1}{t^m-b}\right)^{\frac{q}{\beta}} \ldots\right].$$

Wenn die Conſtanten $a, b, c, \ldots$ einander gleich ſind, ſo findet man, wenn man der Kürze wegen:

$$t^m = \vartheta, \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \frac{r}{\gamma} \ldots = k$$

ſetzt:

und folglich:

$$\int\int\int\ldots\frac{dxdydz\ldots}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2\ldots}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}\frac{\pi^{\frac{\nu+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)},$$

in welchem Integrale die Veränderlichen positiv sind und der Bedingung:

$$x^2+y^2+z^2+\ldots\leqq 1$$

genügen.

§. 129. Die vorhergehende Reductionsmethode läßt sich unter der folgenden allgemeinen Form darstellen.

Wir wollen annehmen: 1) daß das gegebene Integral:

$$S=\int\int\int\ldots dx\,dy\,dz\ldots F(x,y,z,\ldots)F[f(x,y,z,\ldots)]$$

sei; 2) daß die der Einfachheit wegen als positiv vorausgesetzten ν Veränderlichen x, y, z, ... immer der Bedingung:

$$\varphi(x,y,z,\ldots)\leqq 0$$

genügen müssen; 3) daß die Function $f(x, y, z,....)$ so beschaffen sei, daß sie bestimmte bekannte Werthe t_0, T annimmt, wenn man setzt:

$$x=y=z\ldots=0,\ \varphi=0;$$

4) daß das Integral:

$$\int\int\int\ldots dx\,dy\,dz\ldots F(x,y,z,\ldots)$$

zwischen den Grenzen:

$$x=y=z\ldots=0,\ f(x,y,z,\ldots)\leqq t$$

genommen, bekannt und $=f(t)$ sei, und endlich 5) daß man, wenn die zweite Bedingung:

$$f(x,y,z,\ldots,)\leqq t$$

mit der ersten:

$$\varphi(x,y,z,\ldots)\leqq 0$$

nicht im Widerspruche steht und t sich von t_0 bis T stetig ändert, alle Systeme von Werthen von x, y, z,.... wiedererhält, welche der ersten Bedingung genügen; so hat man:

$$S=\int_{t_0}^{T}F(t)\frac{d.f(t)}{dt}dt.$$

Die Richtigkeit dieses Lehrsatzes wird einleuchtend, wenn man in dem allgemeinen Falle die bereits an dem besondern Beispiele gemachten Schlüsse wiederholt.

Wenn man die allgemeine Formel anwendet, so erhält man:

$$S=\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^{\nu}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^1 t^{\frac{\nu}{2}-1}\,dt\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}.$$

Setzt man aber $t=\vartheta^{\frac{1}{2}}$ und berücksichtigt die Relation:

$$\int_0^1 \vartheta^{a-1}(1-\vartheta)^{b-1}d\vartheta=\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

so findet man:

$$\int_0^1 t^{\frac{\nu}{2}-1}dt\,\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=-\int_0^1\frac{t^{\frac{\nu}{2}}dt}{\sqrt{1-t^2}}+\int_0^1\frac{t^{\frac{\nu}{2}-1}dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\vartheta^{\frac{\nu}{4}-\frac{1}{2}}(1-\vartheta)^{-\frac{1}{2}}d\vartheta+\frac{1}{2}\int_0^1\vartheta^{\frac{\nu}{4}-1}(1-\vartheta)^{-\frac{1}{2}}d\vartheta$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{4}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{4}+1\right)}+\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{4}+\frac{1}{2}\right)};$$

folglich:

$$S=\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^{\nu+1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left[-\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{4}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{4}+1\right)}+\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{4}+\frac{1}{2}\right)}\right].$$

Aus dieser Gleichung, in Verbindung mit der bekannten Relation:

$$\Gamma(\tfrac{1}{4})\,\Gamma(\tfrac{3}{4})=\frac{\pi}{\sin\frac{1}{4}\pi},$$

ergiebt sich successive:

$$\int_0^1 dx\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}=\tfrac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{\sqrt{2\pi}}-\frac{\pi\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{1}{4})^2},$$

$$\iint dx\,dy\,\sqrt{\frac{1-(x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)}}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right),$$

$$\iiint dx\,dy\,dz\,\sqrt{\frac{1-(x^2+y^2+z^2)}{1+(x^2+y^2+z^2)}}=\tfrac{1}{8}\sqrt{2\pi}\left[\frac{4\pi^2}{\Gamma(\frac{1}{4})^2}-\Gamma(\tfrac{1}{4})^2\right],$$

$$\iiint dx\,dy\,dz\,du\,\sqrt{\frac{1-(x^2+y^2+z^2+u^2)}{1+(x^2+y^2+z^2+u^2)}}=\frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

§. 130. Um die neuen Hülfsmittel besser kennen zu lernen, welche die Analysis durch diese sinnreichen Verfahrungsarten gewonnen hat, wollen wir mit Catalan noch das Integral der n^{ten} Ordnung:

$$S=\int\int\int\ldots dx\,dy\,dz\ldots$$

betrachten, und annehmen, daß die Integrationsgrenzen durch die Bedingung:

$$\frac{x^2}{k^2-a^2}+\frac{y^2}{k^2-b^2}+\frac{z^2}{k^2-c^2}+\ldots \leqq 1$$

bestimmt seien, indem vorausgesetzt wird: 1) daß die Veränderlichen nur positive Werthe bekommen, und 2) daß außerdem die Constanten $k, a, b, c, \ldots$ ungleich und so beschaffen sind, daß man hat:

$$k^2 > a^2 > b^2 > c^2 \ldots$$

Um die Integration zu verrichten, wollen wir n neue Veränderliche $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ für die ursprünglichen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ substituiren, indem beide durch die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\lambda^2-a^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}+\ldots=1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2-a^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}+\ldots=1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2-a^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}+\ldots=1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

miteinander verbunden sind. Wenn $n=3$ ist, so sind diese Gleichungen diejenigen, welche zum Uebergange von einem Systeme rechtwinkliger zu einem Systeme elliptischer Coordinaten dienen.

Um die Grenzen dieser neuen Veränderlichen zu bestimmen, muß man den ursprünglichen beliebige Werthe beilegen, welche der Bedingung:

$$\frac{x^2}{k^2-a^2}+\frac{y^2}{k^2-b^2}+\frac{z^2}{k^2-c^2}+\ldots \leqq 1$$

genügen, und dann, indem k^2 den positiven und kleinern Werth als die Einheit, welchen der erste Theil dieser Ungleichheit annimmt, bezeichnet, die Gleichung:

$$\frac{x^2}{t-a^2}+\frac{y^2}{t-b^2}+\frac{z^2}{t-c^2}+\ldots=k^2$$

auflösen. Die n Wurzeln dieser Gleichung sind alsdann die den angenommenen Werthen von $x^2, y^2, z^2, \ldots$ entsprechenden Werthe von $\lambda^2, \mu^2, \nu^2, \ldots$. Wenn z. B. $n=3$ ist und x, y, z sind die rechtwinkligen Coordinaten eines auf dem durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{k^2-a^2}+\frac{y^2}{k^2-b^2}+\frac{z^2}{k^2-c^2}=1$$

ausgedrückten Ellipsoide liegenden Punctes; so sind die drei Wurzeln der Gleichung mit t die Quadrate der elliptischen Coordinaten dieses Punctes oder die Quadrate der Parameter der sich in diesem Puncte durchschneidenden Orthogonalflächen. Es läßt sich leicht zeigen, daß die Wurzeln der Gleichung mit t reell und

ungleich sind *), wodurch also die Möglichkeit der angewandten Coordinatenverwandlungen nachgewiesen ist. Ferner leisten die Wurzeln λ^2, μ^2, ν^2 dieser Gleichung bekanntlich der Bedingung:

$$\lambda^2 > a^2 > \mu^2 > b^2 > \nu^2 > c^2 \ldots$$

Genüge, woraus erhellet, daß jede der neuen Veränderlichen, mit Ausnahme von λ, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern

---

*) Denn wenn, wie vorausgesetzt wird, die Constanten a, b, c,.... der Bedingung $a > b > c$.... genügen, so braucht man in der Gleichung:

$$\frac{x^2}{t-a^2} + \frac{y^2}{t-b^2} + \frac{z^2}{t-c^2} + \ldots - h^2 = 0$$

nur successive zu setzen:

$$t = -\infty,\ t = a^2+\varepsilon,\ t = b^2+\varepsilon,\ t = c^2+\varepsilon, \ldots,\ t = \infty,$$

wo ε eine positive unendlich kleine Größe bezeichnet, und dann die Zeichen zu bemerken, welche der Werth des ersten Theiles dieser Gleichung annimmt, um behaupten zu können, daß a^2 und b^2, b^2 und c^2,..... ∞ die Grenzen der Wurzeln λ^2, μ^2, ν^2,.... derselben Gleichung sind. Wenn man für h^2 die Größe $-h^2$ gesetzt hätte, so wären die Grenzen der Wurzeln $-\infty$ und a^2, a^2 und b^2, b^2 und c^2,.... gewesen. Plana hat sich zur Nachweisung der Realität der Wurzeln dieser Gleichung eines andern Verfahrens bedient, welches darin besteht, daß man setzt:

$$t = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

durch welche Substitution die gegebene Gleichung in die beiden folgenden zerfällt:

$$\frac{x^2(\alpha-a^2)}{(\alpha-a^2)^2+\beta^2} + \frac{y^2(\alpha-b^2)}{(\alpha-b^2)^2+\beta^2} + \frac{z^2(\alpha-c^2)}{(\alpha-c^2)^2+\beta^2} + \ldots = 1,$$

$$\frac{x^2\beta}{(\alpha-a^2)^2+\beta^2} + \frac{y^2\beta}{(\alpha-b^2)^2+\beta^2} + \frac{z^2\beta}{(\alpha-c^2)^2+\beta^2} + \ldots = 0,$$

wovon die zweite offenbar erfordert, daß $\beta = 0$, d. h. die Wurzel t reell ist. Die erste dieser Methoden scheint, wie Liouville bemerkt hat, auf transcendente Gleichungen nicht wohl anwendbar zu sein, namentlich in dem Falle, wo der erste Theil der Gleichung eine convergente Reihe mit unendlich vielen Gliedern ist; denn alsdann muß man a priori wissen, daß die betrachtete Gleichung nicht mehr als n Wurzeln hat. Man muß folglich zu dem sinnreichen Kunstgriffe von Plana seine Zuflucht nehmen, wenn die Zahl n unendlich ist, und die Gleichung kann alsdann auf folgende Form gebracht werden:

$$\Sigma \frac{x^2}{t-a} = h^2.$$

Setzt man:

$$t = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

so findet man:

$$\Sigma \frac{x^2(\alpha-a-\beta\sqrt{-1})}{(\alpha-a)^2+\beta^2} = h^2,$$

woraus sich ergiebt:

$$\Sigma \frac{x^2(\alpha-a)}{(\alpha-a^2)^2+\beta^2} = h^2,\quad \beta\Sigma \frac{x^2}{(\alpha-a)^2+\beta^2} = 0.$$

betrachten, und annehmen, daß die Integrationsgrenzen durch die Bedingung:

$$\frac{x^2}{k^2-a^2}+\frac{y^2}{k^2-b^2}+\frac{z^2}{k^2-c^2}+\ldots\leqq 1$$

bestimmt seien, indem vorausgesetzt wird: 1) daß die Veränderlichen nur positive Werthe bekommen, und 2) daß außerdem die Constanten $k, a, b, c, \ldots$ ungleich und so beschaffen sind, daß man hat:

$$k^2>a^2>b^2>c^2\ldots$$

Um die Integration zu verrichten, wollen wir n neue Veränderliche $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ für die ursprünglichen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ substituiren, indem beide durch die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{\lambda^2-a^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}+\ldots=1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2-a^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}+\ldots=1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2-a^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}+\ldots=1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

miteinander verbunden sind. Wenn $n=3$ ist, so sind diese Gleichungen diejenigen, welche zum Uebergange von einem Systeme rechtwinkliger zu einem Systeme elliptischer Coordinaten dienen.

Um die Grenzen dieser neuen Veränderlichen zu bestimmen, muß man den ursprünglichen beliebige Werthe beilegen, welche der Bedingung:

$$\frac{x^2}{k^2-a^2}+\frac{y^2}{k^2-b^2}+\frac{z^2}{k^2-c^2}+\ldots\leqq 1$$

genügen, und dann, indem k^2 den positiven und kleinern Werth als die Einheit, welchen der erste Theil dieser Ungleichheit annimmt, bezeichnet, die Gleichung:

$$\frac{x^2}{t-a^2}+\frac{y^2}{t-b^2}+\frac{z^2}{t-c^2}+\ldots=k^2$$

auflösen. Die n Wurzeln dieser Gleichung sind alsdann die den angenommenen Werthen von $x^2, y^2, z^2, \ldots$ entsprechenden Werthe von $\lambda^2, \mu^2, \nu^2, \ldots$. Wenn z. B. $n=3$ ist und x, y, z sind die rechtwinkligen Coordinaten eines auf dem durch die Gleichung:

$$\frac{x^2}{k^2-a^2}+\frac{y^2}{k^2-b^2}+\frac{z^2}{k^2-c^2}=1$$

ausgedrückten Ellipsoide liegenden Punctes; so sind die drei Wurzeln der Gleichung mit t die Quadrate der elliptischen Coordinaten dieses Punctes oder die Quadrate der Parameter der sich in diesem Puncte durchschneidenden Orthogonalflächen. Es läßt sich leicht zeigen, daß die Wurzeln der Gleichung mit t reell und

ungleich sind *), wodurch also die Möglichkeit der angewandten Coordinatenverwandlungen nachgewiesen ist. Ferner leisten die Wurzeln λ^2, μ^2, ν^2 dieser Gleichung bekanntlich der Bedingung:

$$\lambda^2 > a^2 > \mu^2 > b^2 > \nu^2 > c^2 \ldots$$

Genüge, woraus erhellet, daß jede der neuen Veränderlichen, mit Ausnahme von λ, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern

---

*) Denn wenn, wie vorausgesetzt wird, die Constanten a, b, c,.... der Bedingung $a > b > c$.... genügen, so braucht man in der Gleichung:

$$\frac{x^2}{t-a^2} + \frac{y^2}{t-b^2} + \frac{z^2}{t-c^2} + \ldots - h^2 = 0$$

nur successive zu setzen:

$$t = -\infty,\ t = a^2+\varepsilon,\ t = b^2+\varepsilon,\ t = c^2+\varepsilon, \ldots,\ t = \infty,$$

wo ε eine positive unendlich kleine Größe bezeichnet, und dann die Zeichen zu bemerken, welche der Werth des ersten Theiles dieser Gleichung annimmt, um behaupten zu können, daß a^2 und b^2, b^2 und c^2,..... ∞ die Grenzen der Wurzeln λ^2, μ^2, ν^2,.... derselben Gleichung sind. Wenn man für h^2 die Größe $-h^2$ gesetzt hätte, so wären die Grenzen der Wurzeln $-\infty$ und a^2, a^2 und b^2, b^2 und c^2,.... gewesen. Plana hat sich zur Nachweisung der Realität der Wurzeln dieser Gleichung eines andern Verfahrens bedient, welches darin besteht, daß man setzt:

$$t = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

durch welche Substitution die gegebene Gleichung in die beiden folgenden zerfällt:

$$\frac{x^2(\alpha-a^2)}{(\alpha-a^2)^2+\beta^2} + \frac{y^2(\alpha-b^2)}{(\alpha-b^2)^2+\beta^2} + \frac{z^2(\alpha-c^2)}{(\alpha-c^2)^2+\beta^2} + \ldots = 1,$$

$$\frac{x^2\beta}{(\alpha-a^2)^2+\beta^2} + \frac{y^2\beta}{(\alpha-b^2)^2+\beta^2} + \frac{z^2\beta}{(\alpha-c^2)^2+\beta^2} + \ldots = 0,$$

wovon die zweite offenbar erfordert, daß $\beta = 0$, d. h. die Wurzel t reell ist. Die erste dieser Methoden scheint, wie Liouville bemerkt hat, auf transcendente Gleichungen nicht wohl anwendbar zu sein, namentlich in dem Falle, wo der erste Theil der Gleichung eine convergente Reihe mit unendlich vielen Gliedern ist; denn alsdann muß man a priori wissen, daß die betrachtete Gleichung nicht mehr als n Wurzeln hat. Man muß folglich zu dem sinnreichen Kunstgriffe von Plana seine Zuflucht nehmen, wenn die Zahl n unendlich ist, und die Gleichung kann alsdann auf folgende Form gebracht werden:

$$\Sigma \frac{x^2}{t-a} = h^2.$$

Setzt man:

$$t = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

so findet man:

$$\Sigma \frac{x^2(\alpha-a-\beta\sqrt{-1})}{(\alpha-a)^2+\beta^2} = h^2,$$

woraus sich ergiebt:

$$\Sigma \frac{x^2(\alpha-a)}{(\alpha-a^2)^2+\beta^2} = h^2,\quad \beta\Sigma \frac{x^2}{(\alpha-a)^2+\beta^2} = 0.$$

der Reihe $a, b, c, \ldots$ liegt. Um ferner zu wissen, daß diese beiden Glieder die Grenzen des der neuen Veränderlichen entsprechenden Integrales sind, gehen wir zu den Werthen von $x^2, y^2, z^2, \ldots$, welche Functionen von $\lambda^2, \mu^2, \nu^2, \ldots$ sind, zurück, und welche nach der Eliminationsmethode von Binet durch folgende Gleichungen gegeben werden:

$$x^2 + \frac{(a^2-\lambda^2)(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)\ldots}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)\ldots} = 0,$$

$$y^2 + \frac{(b^2-\lambda^2)(b^2-\mu^2)(b^2-\nu^2)\ldots}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)\ldots} = 0,$$

$$z^2 + \frac{(c^2-\lambda^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)\ldots}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)\ldots} = 0.$$

Nun ist aber die zweite dieser Gleichungen absurd, wofern nicht $\beta = 0$, d. h. die Wurzel t reell ist. Die gegebene Gleichung hat also keine imaginären Wurzeln, und um zu beweisen, daß sie auch keine gleichen Wurzeln hat, braucht man nur zu bemerken, daß die Existenz einer reellen vielfachen Wurzel die Existenz der absurden Gleichung:

$$\Sigma \frac{x^2}{(t-a)^2} = 0$$

zur Folge haben würde. Der vorhergehende Beweis gilt selbst in dem Falle, wo die gegebene Gleichung folgende Form hat:

$$\Sigma \frac{x^2}{t-a} = f(t),$$

indem $f(t)$ nicht mehr eine bloße Constante, sondern eine Function von solcher Beschaffenheit ist, daß sich die Größe:

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1})$$

auf die Form:

$$A - B^2\sqrt{-1}$$

bringen läßt, wo A und B reelle Größen bezeichnen, und diese Gleichung hätte alsdann weder imaginäre, noch gleiche Wurzeln.

Aus dem eben Gesagten folgt, daß, wenn $F(t)$ eine algebraische oder transcendente Function ist, welche sich in einfache Factoren zerlegen läßt, so daß man hat:

$$F(t) = k\left(1-\frac{t}{a}\right)^m\left(1-\frac{t}{b}\right)^n\left(1-\frac{t}{c}\right)^p\ldots,$$

wo $k, a, b, c, \ldots$ beliebige reelle Constanten und $m, n, p, \ldots$ positive Exponenten bezeichnen, die Gleichung:

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = f(t)$$

weder imaginäre, noch gleiche Wurzeln hat, so lange die Function $f(t)$ die oben angeführte Bedingung erfüllt, was daraus folgt, daß der Bruch:

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{m}{t-a} + \frac{n}{t-b} + \frac{p}{t-c}\ldots$$

ist. Wir wollen z. B.:

$$F(t) = \cos t$$

Setzt man in diesen Gleichungen:

$$1) \quad x=y=z\ldots=0,$$

in welchem Falle $h=0$ ist; so findet man:

$$\lambda=a,\ \mu=b,\ \nu=c,..$$

und:

$$2) \quad x^2=k^2-a^2,\ y^2=z^2=0,\ldots$$

so ist $h=1$ und:

$$\lambda=k,\ \mu=b,\ \nu=c,\ldots,$$

Die Grenzwerthe von λ sind folglich k und a. Ebenso würde bewiesen, daß a und b die Grenzwerthe von μ sind, ꝛc. Man muß folglich, um alle Elemente des Integrales S zu umfassen, jeder der Veränderlichen λ, μ, ν,.... alle Werthe beilegen, welche zwischen den beiden Constanten liegen, die diese Veränderliche zwischen sich schließen.

Bezeichnet nun Δ_σ den Bruch:

$$\Delta_\sigma=\frac{(\lambda^2-\sigma^2)(\mu^2-\sigma^2)(\nu^2-\sigma^2)\ldots}{(a^2-\sigma^2)(b^2-\sigma^2)(c^2-\sigma^2)\ldots},$$

so hat man, vermöge der Formeln, welche zur Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen dienen:

$$dx\,dy\,dz\ldots=\lambda\mu\nu\ldots d\lambda\,d\mu\,d\nu\ldots\sqrt{\Delta_\lambda\Delta_\mu\Delta_\nu},$$

---

und:

$$f(t)=a$$

oder:

$$f(t)=a+b^2t$$

setzen, wo a, b, zwei reelle Constanten sind; so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$\text{tang}\,t=-a,\quad \text{tang}=-a-b^2t,$$

welche man bereits untersucht hat, und deren Wurzeln reell und ungleich sind.

Setzt man $f(t)=0$, so reducirt sich die Gleichung:

$$\frac{F'(t)}{F(t)}=f(t)$$

auf:

$$\frac{F'(t)}{F(t)}=0,$$

und wenn folglich $F(t)$ die weiter oben angegebene Form hat; so hat die Gleichung:

$$\frac{F'(t)}{F(t)}=0$$

lauter reelle und ungleiche Wurzeln, woraus leicht erhellet, daß die Gleichung $(t)F'=0$ auch lauter reelle Wurzeln hat, worunter auch gleiche oder vielfache Wurzeln sein können.

und folglich:

$$S = \int_a^k \int_a^b \int_b^c \ldots d\lambda\, d\mu\, d\nu \ldots \lambda\mu\nu \ldots \sqrt{\Delta_\lambda \Delta_\mu \Delta_\nu}.$$

Andererseits findet man, wenn man auf das Integral S unter seiner ersten Form die Formel von Dirichlet anwendet:

$$S = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} \sqrt{(k^2-a^2)(k^2-b^2)(k^2-c^2)\ldots},$$

folglich:

$$\int_a^k \int_a^b \int_b^c \ldots \lambda d\lambda . \mu d\mu . \nu d\nu \ldots \sqrt{\Delta_\lambda \Delta_\mu \Delta_\nu}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} \sqrt{(k^2-a^2)(k^2-b^2)(k^2-c^2)\ldots}$$

Diese Formel läßt sich vereinfachen; denn alle Differenzen wie $\lambda^2 - \mu^2$ sind offenbar unter dem Wurzelzeichen des ersten Theiles zum Quadrate erhoben, und man hat folglich ohne Unbestimmtheit der Zeichen und ohne imaginäre Größen:

$$\int_a^k \int_a^b \int_b^c \ldots \lambda d\lambda . \mu d\mu . \nu d\nu \ldots \frac{P(\lambda^2 - \mu^2)}{\sqrt{D\lambda D\mu D\nu}},$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma(1+\frac{n}{2})} \sqrt{(k^2-a^2)(k^2-b^2)(k^2-c^2)\ldots}$$

wo P ein Product aus Factoren von derselben Form, wie der darauf folgende bezeichnet, während, wenn m die Constante bezeichnet, welche in der Reihe $a, b, c, \ldots$ denselben Rang einnimmt, als σ in der Reihe $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, das Zeichen D_σ das Product:

$$(a^2-\sigma^2)(b^2-\sigma^2)(c^2-\sigma^2)\ldots$$
$$(l^2-\sigma^2)(\sigma^2-m^2)(\sigma^2-n^2)(\sigma^2-p^2)\ldots(\sigma^2-t^2)$$

ausdrückt.

Wenn die letzte Constante $t^2 = 0$ wäre, so reducirte sich der Factor $\sigma^2 - t^2$ von D_σ auf σ^2 und der Factor σ außerhalb des Wurzelzeichens unter dem Integralzeichen würde aufgehoben, und man hätte:

$$\int_a^k \int_a^b \int_b^c \ldots d\lambda\, d\mu\, d\nu \ldots \frac{P(\lambda^2 - \mu^2)}{\sqrt{D'\lambda D'\mu D'\nu}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} k \sqrt{(k^2-a^2)(k^2-b^2)\ldots(k^2-s^2)},$$

wo D_σ gleich:

$(a^2-\sigma^2)(b^2-\sigma^2)(c^2-\sigma^2)\ldots(l^2-\sigma^2)(\sigma^2-m^2)(\sigma^2-p^2)(\sigma^2-s^2)$

ist. Setzt man in dieser letzten Formel $n=3$ und berechnet $\Gamma(\frac{1}{2})$ vermittelst der bekannten Gleichung:

$$\Gamma(\mu+1)=\mu\Gamma(\mu),$$

welche successive giebt:

$$\Gamma(1+\tfrac{1}{2})=\Gamma(\tfrac{3}{2})=\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(1+\tfrac{3}{2})=\Gamma(\tfrac{5}{2})=\tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2})=\tfrac{3}{4}\sqrt{\pi},$$

so kommt man wieder auf das zuerst von Lamé angegebene dreifache Integral.

Ein und zwanzigste Vorlesung.

Ueber den Uebergang vom Reellen zum Imaginären bei der Berechnung bestimmter Integrale. — Bestimmung einiger besonderer Integrale.

---

§. 131. Bei der Auseinandersetzung des so sinnreichen Verfahrens, welches Dirichlet zur Reduction gewisser vielfacher Integrale angewandt hat, mußten wir uns auf eine sehr merkwürdige Formel stützen, welche zuerst von Euler angegeben und dann von Poisson streng erwiesen ist. Der sehr weitläufige und schwierige Beweis Poisson's stützt sich auf die Integration eines Systemes gleichzeitiger Differenzialgleichungen, was in der That ein Umweg ist. Um diese Schwierigkeit zu beseitigen und die Bestimmung eines bestimmten Integrales nicht in den zweiten Theil der Integralrechnung zu verweisen, wollen wir in dieser Vorlesung den Gegenstand zweier Abhandlungen von Cauchy, welche vielleicht die merkwürdigsten und am wenigsten bekannten Arbeiten dieses großen Analysten sind, näher erörtern. Die erste Abhandlung kommt unter dem Titel: **Mémoire sur les intégrales définies** in den Memoiren der Pariser Academie und die andere unter dem Titel: **Recherche d'une formule générale qui fournit la valeur de la plupart des intégrales definies connues et celle d'un grand nombre d'autres** in den **Annales des Mathématiques par *Gergonne***, t. XVI und XVII vor. Uebrigens haben wir in dieser Vorlesung auch die wahren Grundlagen des Ueberganges vom Reellen zum Imaginären und ein sehr sinnreiches und allgemeines Verfahren zur Bestimmung einer Menge bestimmter Integrale angegeben.

Es sei $\mathbf{F}(z)$ eine beliebige Function der Veränderlichen z und z selbst eine Function von zwei andern Veränderlichen x, y; so werden die Ableitungen des Integrales $\int \mathbf{F}(z)\,dz$ in Beziehung auf x und auf y resp. ausgedrückt durch:

$$\mathbf{F}(z)\frac{dz}{dx} = \mathbf{F}(z)\,\mathbf{D}_x z, \quad \mathbf{F}(z)\frac{dz}{dy} = \mathbf{F}(z)\,\mathbf{D}_y z,$$

und die Ableitung der zweiten Ordnung desselben Integrales in Beziehung auf x, y ist entweder:

$$\mathbf{D}_y . \mathbf{F}(z)\,\mathbf{D}_x z,$$

oder:

$$D_x . F(z) D_y z,$$

und folglich hat man:

$$D_y . F(z) D_x z = D_x . F(z) D_y z.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung kann man direct nachweisen, wenn man die angezeigten Differenzirungen verrichtet. Sie ist identisch, oder findet statt, was für eine Function von x, y man auch für z nehmen mag, und sogar dann, wenn diese Function zum Theil reell und zum Theil imaginär ist. Wenn z. B. u und v zwei beliebige reelle Functionen von x und y bezeichnen, so kann man setzen:

$$z = u + v\sqrt{-1}.$$

Setzt man alsdann:

$$F(u + v\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1}$$

und:

$$U\frac{du}{dx} - V\frac{dv}{dx} = P, \quad U\frac{du}{dy} - V\frac{dv}{dy} = Q,$$

$$U\frac{dv}{dx} + V\frac{du}{dx} = R, \quad U\frac{dv}{dy} + V\frac{du}{dy} = S,$$

so verwandelt sich die Gleichung:

$$D_y . F(z) D_x z = D_x . F(z) D_y z$$

in:

$$\frac{dP}{dy} + \frac{dR}{dy}\sqrt{-1} = \frac{dQ}{dx} + \frac{dS}{dx}\sqrt{-1}$$

und zerfällt nothwendig in die beiden andern:

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dR}{dy} = \frac{dS}{dx}.$$

Man kann auch die Richtigkeit dieser beiden Gleichungen durch Differenzirung nachweisen; sie enthalten die ganze Theorie des Ueberganges vom Reellen zum Imaginären, und es ist nur noch die Art ihrer Anwendung anzugeben. Wir wollen beide Theile dieser Gleichungen mit $dx\,dy$ multipliciren, so verwandeln sie sich in:

$$dx d_y P = dy d_x Q, \quad dx d_y R = dy d_x S.$$

Integrirt man nun in Beziehung auf x und y zwischen den Grenzen x_0, X; y_0, Y, so läßt sich die eine dieser Integrationen immer verrichten, und wenn man die x_0, X oder y_0, Y entsprechenden Werthe der Functionen P, Q, R, S mit $P_{y_0}, P_Y, R_{y_0}, R_Y, Q_{x_0}, Q_X, S_{x_0}, S_X$ bezeichnet; so hat man:

$$\int_{x_0}^{X} P_Y dx - \int_{x_0}^{X} P_{y_0}\, dx = \int_{y_0}^{Y} Q_X dy - \int_{y_0}^{Y} Q_{x_0}\, dy,$$
$$\int_{x_0}^{X} R_Y dx - \int_{x_0}^{X} R_{y_0}\, dx = \int_{y_0}^{Y} S_X dy - \int_{y_0}^{Y} S_{x_0}\, dy;$$

wobei jedoch vorausgesetzt wird, daß die Functionen P, Q, R, S zwischen den Integrationsgrenzen immer einen bestimmten Werth behalten.

Wenn man setzt:

$$x_0 = 0,\ X = x;\quad y_0 = 0,\ Y = y$$

und mit p, r und q, s die Werthe bezeichnet, welche die Functionen P, R für $y = 0$ und Q, S für $x = 0$ annehmen; so kommt:

$$\int_0^x P dx - \int_0^x p dx = \int_0^y Q dy - \int_0^y q dy,$$
$$\int_0^x R dx - \int_0^x r dx = \int_0^y S dy - \int_0^y s dy.$$

§. 132. Anwendung 1. Es sei $u = x$, $v = y$, so hat man:

$$U + V\sqrt{-1} = F(x + y\sqrt{-1}),$$
$$\frac{du}{dx} = 1,\ \frac{du}{dy} = 0,\ \frac{dv}{dx} = 0,\ \frac{dv}{dy} = 1,$$
$$P = U,\quad Q = -V,\quad R = V,\quad S = U.$$

Setzt man ferner:

$$F(x) = w,\quad F(y\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1},$$

so hat man:

$$p = w,\quad q = -V,\quad r = 0,\quad s = U$$

und folglich:

$$\int_0^x U dx - \int_0^x w dx = \int_0^y V dy - \int_0^y V dy,$$
$$\int_0^x V dx = \int_0^y U dy - \int_0^y U dy.$$

Diese beiden Gleichungen können durch die eine:

$$\int_0^x F(x + y\sqrt{-1})\, dx - \int_0^x F(x)\, dx$$
$$= \sqrt{-1}\left[\int_0^y F(x + y\sqrt{-1})\, dy - \int_0^y F(y\sqrt{-1})\, dy\right]$$

vertreten werden.

Beispiel. Es sei:

$$F(z) = e^{-z^2},$$

so hat man:

$$\mathrm{U} = e^{y^2} e^{-x^2} \cos 2xy,$$
$$\mathrm{V} = -e^{y^2} e^{-x^2} \sin 2xy,$$
$$w = e^{-x^2},\ U = e^{y^2},\ V = 0,$$

und folglich:

$$e^{y^2} \int_0^x e^{-x^2} \cos 2xy\,dx - e^{-x^2} \int_0^y e^{y^2} \sin 2xy\,dy = \int_0^x e^{-x^2} dx,$$
$$e^{y^2} \int_0^x e^{-x^2} \sin 2xy\,dx + e^{-x^2} \int_0^y e^{y^2} \cos 2xy\,dy = \int_0^y e^{y^2} dy.$$

Wenn man die zweite der Grenzen in Beziehung auf $x = \infty$ setzt, so verschwinden die beiden Größen:

$$e^{-x^2} \int_0^y e^{y^2} \sin 2xy\,dy,\quad e^{-x^2} \int_0^y e^{y^2} \cos 2xy\,dy$$

und für $y = a$ hat man blos:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax\,dx = e^{-a^2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} e^{-a^2},$$
$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2ax\,dx = e^{-a^2} \int_0^a e^{x^2} dx.$$

Anwendung 2. Es sei $u = ax$, $v = xy$, wo a eine constante Größe ist; so hat man:

$$\mathrm{U} + \mathrm{V}\sqrt{-1} = \mathrm{F}(ax + xy\sqrt{-1}),$$
$$\frac{du}{dx} = a,\ \frac{dv}{dx} = y,\ \frac{du}{dy} = 0,\ \frac{dv}{dy} = x,$$
$$\mathrm{P} = a\mathrm{U} - \mathrm{V}y,\quad \mathrm{Q} = -\mathrm{V}x,\quad \mathrm{R} = \mathrm{U}y + a\mathrm{V},\quad \mathrm{S} = \mathrm{U}x.$$

Setzt man ferner:

$$\mathrm{F}(ax) = w,\quad \mathrm{F}(0) = k,$$

so hat man:

$$p = aw,\ q = 0,\ r = 0,\ s = 0,\ k = 0,$$

wofern k nicht unendlich ist. Hiernach hat man:

$$a \int_0^x \mathrm{U}x\,dx - y \int_0^x \mathrm{V}x\,dx - a \int_0^x w\,dx = -x \int_0^y \mathrm{V}\,dy,$$
$$y \int_0^x \mathrm{U}\,dx + a \int_0^x \mathrm{V}\,dx = x \int_0^y \mathrm{U}\,dy.$$

Diese beiden Gleichungen können auch durch die eine:

$$(a + y\sqrt{-1}) \int_0^x \mathrm{F}(ax + xy\sqrt{-1})\,dx - a \int_0^x \mathrm{F}(ax)\,dx$$
$$= x\sqrt{-1} \int_0^y \mathrm{F}(ax + xy\sqrt{-1})\,dy$$

ersetzt werden, und man kann diesen beiden Gleichungen auch folgende Form geben:

$$\int_0^x U dx = \frac{x}{a^2+y^2}\left[y\int_0^y U dy - a\int_0^y V dy\right] + \frac{a^2}{a^2+y^2}\int_0^x w dx,$$

$$\int_0^x V dx = \frac{x}{a^2+y^2}\left[a\int_0^y U dy + y\int_0^y V dy\right] - \frac{ay}{a^2+y^2}\int_0^x w dx.$$

Wenn der Grenzwerth von x so beschaffen ist, daß die beiden Größen xU, xV für jeden Werth von y verschwinden; so hat man:

$$x\int_0^y U dy = x\int_0^y V dy = 0$$

und folglich:

$$\int_0^x U dx = \frac{a}{a^2+y^2}\int_0^x w dx,$$

$$\int_0^x V dx = -\frac{y}{a^2+y^2}\int_0^x w dx.$$

Wenn man $y = b$ setzt, so kann man für diese beiden Gleichungen die eine:

$$(a+b\sqrt{-1})\int_0^x F[(a+b\sqrt{-1})x]\,dx = \int_0^x aF(ax)dx$$

setzen. In sehr vielen Fällen verschwinden U und V für $x = \infty$, und man hat alsdann:

$$(a+b\sqrt{-1})\int_0^\infty F[(a+b\sqrt{-1})x]\,dx = \int_0^\infty F(x)\,dx.$$

Wenn man in diesen Gleichungen setzt:

$$F(x) = x^{n-1}f(x),$$

wo n eine beliebige reelle Zahl ist, so hat man:

$$F[(a+b\sqrt{-1})x] = (a+b\sqrt{-1})^{n-1}x^{n-1}f(ax+bx\sqrt{-1})$$

und wenn man setzt:

$$a = r\cos\alpha, \quad b = r\sin\beta,$$

so ist: $$a+b\sqrt{-1} = r(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\beta),$$

$$(a+b\sqrt{-1})^{n-1} = r^{n-1}[\cos(n-1)\alpha+\sqrt{-1}\sin(n-1)\alpha],$$

folglich:

$$\int_0^\infty x^{n-1}f[r(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\beta)x]\,dx$$
$$= \frac{\cos n\alpha - \sqrt{-1}\sin n\alpha}{r^n}\int_0^\infty x^{n-1}f(x)\,dx.$$

Außerdem hat man:

$$a^2+b^2 = r^2, \quad \alpha = \text{arc tang}\frac{b}{a},$$

wodurch immer der kleinste Bogen bezeichnet wird, dessen Tangente $\frac{b}{a}$ ist, und wenn man setzt:

$$f[r(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\beta)x]=U+V\sqrt{-1};$$

so ist diese letzte Gleichung gleichbedeutend mit den folgenden:

$$\int_0^\infty Ux^{n-1}dx=\frac{\cos n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty x^{n-1}f(x)dx,$$

$$\int_0^\infty Vx^{n-1}dx=-\frac{\sin n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty x^{n-1}f(x)dx.$$

Beispiel 1. Wir wollen $f(x)=e^{-x}$ setzen, so kommt:

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}(\cos bx+\sqrt{-1}\sin bx)dx$$
$$=\frac{\cos n\alpha-\sqrt{-1}\sin n\alpha}{r^n}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx,$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}\cos bxdx=\frac{\cos n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx,$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}\sin bxdx=\frac{\sin n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}dx.$$

Wenn man bemerkt, daß das Integral:

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

genau das durch $\Gamma(n)$ bezeichnete ist, so verwandelt sich die erste dieser Gleichungen in:

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-(a+b\sqrt{-1})x}dx=\frac{e^{n\alpha\sqrt{-1}}\Gamma(n)}{r^n}.$$

Wenn man $a=0$ setzt; so hat man:

$$\alpha=\text{arc tang}\,\infty=\frac{\pi}{2},\quad r=b,$$

wenn b positiv ist, und wenn man alsdann a für n setzt, so erhält man:

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{bx\sqrt{-1}}=\frac{e^{\frac{a\pi}{2}\sqrt{-1}}}{b^a}\Gamma(a),$$

d. h. genau die Euler'sche Formel, welche mit den beiden Gleichungen:

$$\int_0^\infty x^{a-1}\cos bxdx=\frac{\cos\frac{a\pi}{2}}{b^a}\Gamma(a),$$

$$\int_0^\infty x^{a-1} \sin bx dx = \frac{\sin \frac{a\pi}{2}}{b^a} \Gamma(a)$$

gleichbedeutend ist.

Wenn man in der Euler'schen Formel $x=(y+\beta)^2$, $a=\frac{1}{2}$ setzt, und die Gleichungen:

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

berücksichtigt; so findet man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(by^2+2b\beta y)\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-b\beta^2} \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

welches die zweite von Dirichlet angewandte Formel ist (§ 124).

Beispiel 2. Setzt man:

$$f(x) = e^{-(x+c)^2},$$

so erhält man:

$$f(ax+bx\sqrt{-1})$$
$$= e^{b^2x^2-(ax+c)^2}[\cos 2bx(ax+c) - \sqrt{-1}\sin 2bx(ax+c)],$$
$$U = e^{b^2x^2-(ax+c)^2} \cos 2bx(ax+c),$$
$$V = -e^{b^2x^2-(ax+c)^2} \sin 2bx(ax+c),$$
$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{b^2x^2-(ax+c)^2} \cos 2bx(ax+c)\,dx$$
$$= \frac{\cos n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-(x+c)^2} x^{n-1}\,dx,$$
$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{b^2x^2-(ax+c)^2} \sin 2bx(ax+c)\,dx$$
$$= \frac{\sin n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-x(+c)^2} x^{n-1}\,dx.$$

§. 133. Wir wollen uns bei der Anwendung dieser Principien nicht länger mehr aufhalten und zu der Ableitung der allgemeinen Formel übergehen, welche den Werth einer großen Anzahl bestimmter Integrale giebt.

Wir wollen annehmen, daß die Function:

$$F(x+y\sqrt{-1})$$

bei jedem Werthe von y für $x=\pm\infty$ und bei jedem Werthe von x für $y=\infty$ verschwindet, und für alle zwischen den Grenzen:

$$x=-\infty, \quad x=+\infty, \quad y=0, \quad y=\infty$$

liegenden Werthe von x und y einen einzigen und bestimmten Werth behält. Wenn man die reellen, oder imaginären Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{F(x)} = 0$ sucht und mit $x_1, x_2, x_3, \ldots$ diejenigen

dieſer Wurzeln bezeichnet, worin der Coefficient von $\sqrt{-1}$ poſitiv iſt, und mit $F_1, F_2, F_3, \ldots$ die Werthe, welche die Producte:

$$\varepsilon F(x_1+\varepsilon),\ \varepsilon F(x_2+\varepsilon),\ \varepsilon F(x_3+\varepsilon), \ldots$$

bekommen, wenn ε ſich auf Null reducirt; ſo findet man, wie wir geſehen haben, wenn man:

$$\Delta = 2\pi(F_1+F_2+F_3+\ldots)\sqrt{-1}$$

ſetzt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = \Delta.$$

Da dieſe Formel die Werthe einer großen Anzahl beſtimmter Integrale giebt, ſo wird es nicht überflüſſig ſein, einen directen Beweis derſelben hier mitzutheilen. Dieſer Beweis ergiebt ſich ſehr leicht aus einem Lehrſatze, welchen wir in aller Kürze anführen wollen. Wenn nämlich $F(x)$ eine Function von ſolcher Beſchaffenheit bezeichnet, daß der Ausdruck $F(x+y\sqrt{-1})$ bei jedem Werthe von y für $x = \pm\infty$ und bei jedem Werthe von x für $y = \infty$ verſchwindet und zwiſchen den Grenzen:

$$x = -\infty,\ x = \infty;\quad y = 0,\ y = \infty$$

immer endlich und ſtetig bleibt, und wenn ferner F die Grenze bezeichnet, gegen welche das Product $xF(x)$ convergirt, wenn der Zahlenwerth von x unendlich klein wird; ſo hat man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = -\pi F\sqrt{-1}.$$

Beweis. Um dieſen Lehrſatz zu beweiſen, wollen wir zunächſt den Werth des Integrales:

$$\int_{-X}^{X} F(x)\,dx$$

ſuchen. Man hat allgemein:

$$D_y F(x+y\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\, D_x F(x+y\sqrt{-1})$$

und wenn man die beiden Theile der vorhergehenden Gleichung in Beziehung auf x und y zwiſchen den Grenzen:

$$x = -X,\ x = +X;\quad y = 0,\ y = \infty$$

integrirt; ſo erhält man:

$$\int_{-X}^{+X}\int_{0}^{\infty} D_y F(x+y\sqrt{-1})\,dy\,dx$$

$$= \sqrt{-1}\int_{0}^{\infty}\int_{-X}^{+X} D_x F(x+y\sqrt{-1})\,dx\,dy,$$

und wenn man die Bedingung:

$$F(x+\infty\sqrt{-1}) = 0,$$

berückſichtigt:

$$\int_{-X}^{+X} F(x)\,dx =$$

$$-\sqrt{-1}\int_0^{\infty}[F(X+y\sqrt{-1})-F(-X+y\sqrt{-1})]\,dy.$$

Wenn man nun der Größe X einen sehr großen Werth beilegt, so erhält man succeſſive:

$$(X+y\sqrt{-1})F(X+y\sqrt{-1})$$
$$=(-X+y\sqrt{-1})F(-X+y\sqrt{-1}=F,$$

und folglich:

$$F(X+y\sqrt{-1}=\frac{F}{X+y\sqrt{-1}},$$

$$F(-X+y\sqrt{-1}=\frac{F}{-X+y\sqrt{-1}},$$

woraus folgt:

$$\int_{-X}^{+X}F(x)dx=-F\sqrt{-1}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{X+y\sqrt{-1}}+\frac{1}{X-y\sqrt{-1}}\right]dy$$
$$=-F\sqrt{-1}\int_0^{\infty}\frac{2Xdy}{X^2+y^2}=-\pi F\sqrt{-1}.$$

Dieſe letzte Gleichung wird völlig ſtreng, wenn man $X=\infty$ ſetzt, und man erhält alsdann:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,dx=-\pi F\sqrt{-1}.$$

Wir wollen jedoch bemerken, daß die vorhergehende Formel blos den der beſondern Werthe des Integrales giebt, welchen wir den Hauptwerth genannt haben, wenn das beſtimmte Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\,dx$$

zu denen gehört, deren allgemeiner Werth unbeſtimmt iſt.

Zuſatz 1. Wenn die mit F bezeichnete Größe verſchwindet, ſo geſtattet das gegebene Integral nur einen einzigen Werth, welcher ſich auf Null reducirt, ſo daß man hat:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,dx=0.$$

Setzt man z. B.:

$$F(x)=\frac{e^{ax\sqrt{-1}}-e^{-a}}{1+x^2}=\frac{\cos ax+\sqrt{-1}\sin ax}{1+x^2}-\frac{e^{-a}}{1+x^2},$$

ſo findet man:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax+\sqrt{-1}\sin ax}{1+x^2}dx-e^{-a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=0,$$

und folglich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = e^{-a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi e^{-a},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{1+x^2}\,dx = 0.$$

Zusatz 2. Wenn $\mathrm{F}(x)$, $F(x)$ zwei Functionen bezeichnen, welche, einzeln betrachtet, den in dem vorhergehenden Lehrsatze ausgesprochenen Bedingungen nicht genügen; aber deren Differenz $\mathrm{F}(x) - F(x)$ diesen Bedingungen genügt, und F, F bezeichnen die Grenzen, gegen welche die Producte $x\,\mathrm{F}(x)$, $xF(x)$ convergiren, während der Zahlenwerth der Veränderlichen x immer größer und größer wird; so hat man offenbar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\mathrm{F}(x) - F(x)]\,dx = \pi(F - \mathrm{F})\sqrt{-1}$$

und folglich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx + (F - \mathrm{F})\sqrt{-1},$$

wo die in dieser letzten Gleichung vorkommenden Integrale wieder auf ihre Hauptwerthe reducirt werden müssen.

Wenn die Größe F verschindet, so hat man blos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx + \pi F\sqrt{-1}.$$

Zusatz 3. Wir wollen annehmen, daß der Ausdruck:

$$\mathrm{F}(x + y\sqrt{-1})$$

bei jedem Werthe y für $x = \pm\infty$ und bei jedem von x für $y = \infty$ verschwindet; aber für ein oder mehrere Systeme positiver oder negativer Werthe von x und für Nullwerthe, oder für positive Werthe von y unendlich wird; so braucht man alsdann, um das Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(x)\,dx$$

vermittelst der gegebenen Formel zu bestimmen, nur einen rationalen Bruch als Function von x von solcher Beschaffenheit zu finden, daß die Differenz $\mathrm{F}(x) - F(x)$ die in dem Lehrsatze ausgesprochenen Bedingungen erfüllt. Wir wollen zunächst den Fall betrachten, wo der Ausdruck $\mathrm{F}(x + y\sqrt{-1})$ für $x = a$, $y = b$ unendlich wird, indem b eine positive Größe, oder Null bezeichnet. Wir wollen der Kürze wegen setzen:

$$a + b\sqrt{-1} = x$$

und mit F_1 die Grenze bezeichnen, gegen welche das Product $(x - x_1)\mathrm{F}(x)$ convergirt, während der Factor $x - x_1$ gegen Null convergirt; so bekommt die Differenz:

$$\mathrm{F}(x) - \frac{\mathrm{F}_1}{x - x_1} = \frac{(x - x_1)\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}_1}{x - x_1}$$

im Allgemeinen für $x=x_1$ einen endlichen Werth, und wenn x_1 unter den Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{F(x)}=0$ die einzige ist, worin der Coefficient von $\sqrt{-1}$ positiv ist; so erfüllt diese Differenz die in dem Lehrsatze ausgesprochenen Bedingungen. Man kann folglich setzen:

$$F(x)=\frac{F_1}{x-x_1}=\frac{F_1}{x-a-b\sqrt{-1}}$$

und alsdann findet man: 1) $F=F_1$, und 2) wenn $b=0$ ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,dx=F_1\lim\int_{-X}^{+X}\frac{F_1\,dx}{x-a}=F_1\lim\tfrac{1}{2}1\left(\frac{X-a}{X+a}\right)^2=0,$$

und wenn b positiv ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,dx=\lim\int_{-X}^{X}\frac{F_1\,dx}{x-a-b\sqrt{-1}}$$
$$=F_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b\sqrt{-1}\,dx}{(x-a)^2+b^2}=\pi F_1\sqrt{-1}.$$

Man hat folglich, wenn $b=0$ ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,dx=\pi F_1\sqrt{-1}$$

und wenn b positiv ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,dx=2\pi F_1\sqrt{-1}.$$

Wenn b negativ würde, so müßte man $F(x)=0$ setzen, und man hätte folglich:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,dx=0.$$

§. 134. Bei der Ableitung der vorhergehenden Formeln haben wir vorausgesetzt, daß das Product $(x-x_1)F(x)$ gegen eine endliche Grenze F_1 convergirt, während der Factor $x-x_1$ ohne Ende gegen Null convergirt. Wir wollen nun annehmen, daß dieses Product eine unendliche Grenze habe und daß das Glied $(x-x_1)^mF(x)$ in der Reihe:

$$(x-x_1)F(x),\ (x-x_1)^2F(x),\ldots,\ (x-x_1)^mF(x)$$

das erste sei, welches eine endliche Grenze hat. Setzt man alsdann:

$$(x-x_1)^mF(x)=f(x)=f(x_1)+\frac{x-x_1}{1}f'(x_1)+\ldots$$
$$+\frac{(x-x_1)^{m-1}}{1.2.3..(m-1)}f^{(m-1)}(x_1)+(x-x_1)^m\varphi(x),$$

so behält die Function $\varphi(x)$ für $x=x_1$ im Allgemeinen einen endlichen Werth und erfüllt die in dem Lehrsatze ausgesprochene Bedingung. Da man außerdem hat:

$$\varphi(x)=\mathrm{F}(x)-\frac{f'(x_1)}{1}\frac{1}{(x-x_1)^{m-1}}-\frac{f''(x_1)}{1.2}\frac{1}{(x-x_1)^{m-2}}-\ldots$$
$$-\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{1}{x-x_1},$$

so ist klar, daß man setzen kann:

$$F(x)=\frac{f'(x_1)}{1}\frac{1}{(x-x_1)^{m-1}}+\frac{f''(x_1)}{1.2}\frac{1}{(x-x_1)^{m-2}}+\ldots$$
$$+\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{1}{x-x_1}.$$

Vermittelst dieses Werthes von $F(x)$ findet man:

$$F_1=\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

und folglich findet die Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,dx+\pi(F_1-\mathrm{F}_1)\sqrt{-1}$$

statt, wofern:

$$F_1=\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)}=\lim\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\mathrm{D}_x^{m-1}(x-x)^m\mathrm{F}(x)$$

ist.

In dieser Voraussetzung, und wenn $\mathrm{F}_1=0$ ist, findet man auch: 1) wenn sich b und die Ausdrucke:

$$f^{(m-2)}(x),\ f^{(m-4)}(x),\ f^{(m-6)}(x),\ldots$$

alle auf Null reduciren:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,dx=0;$$

2) wenn $b=0$ ist und einige derselben Ausdrücke von Null verschiedene Werthe bekommen:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,dx=\pm\infty,$$

und 3) wenn b positiv ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\,dx=2\pi F_1\sqrt{-1}.$$

Folglich finden die Formeln:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(x)\,dx=\pi\mathrm{F}_1\sqrt{-1},\quad\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(x)\,dx=2\pi\mathrm{F}_1\sqrt{-1}$$

statt, wenn die Wurzel der Gleichung $\frac{1}{\mathrm{F}(x)}=0$ eine imaginäre ist, worin der Coefficient von $\sqrt{-1}$ positiv ist, oder eine reelle Wurzel, für welche die Ausdrücke:

$$f^{(m-2)}(x),\ f^{(m-4)}(x),\ f^{(m-6)}(x),\ldots$$

verschwinden.

Wenn der Coefficient von $\sqrt{-1}$ in der Wurzel x_1 negativ wäre, so fände man die Formel wieder:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = 0,$$

und wenn die Gleichung $\frac{1}{F(x)} = 0$ mehrere Wurzeln x_1, x_2, x_3, ... hätte, so müßte man, um den Werth von $F(x)$ zu erhalten, welcher die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt, die diesen verschiedenen Wurzeln entsprechenden Werthe von $F(x)$ zusammenaddiren.

§. 135. Durch die vorhergehenden Formeln wird also die Bestimmung der darin vorkommenden Integrale auf die Bestimmung der Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{F(x)} = 0$ zurückgeführt.

Die Formel:

$$\int_{0}^{\infty} F(x)\,dx = \Delta$$

kann übrigens, wenn man will, durch die folgende:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)+F(-x)}{2}\,dx = \tfrac{1}{2}\Delta.$$

ersetzt werden.

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir setzen:

$$F(x) = \varphi(u).\chi(v).\psi(w)\ldots f(x),$$

wo $\varphi(u)$, $\chi(v)$, $\psi(w)$, ... rationale Functionen von x bezeichnen, welche selbst in dem Falle vollkommen bestimmt bleiben, wo man, nachdem $x+y\sqrt{-1}$ für x gesetzt ist, x einen beliebigen reellen und y einen positiven reellen Werth beilegt. Außerdem nehmen wir an, daß die Function $f(x)$ für keinen endlichen reellen, oder imaginären Werth der Veränderlichen x unendlich wird. Um die Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{F(x)} = 0$ zu erhalten, muß man zuvor die der Gleichungen:

$$\frac{1}{\varphi(u)} = 0,\quad \frac{1}{\chi(v)} = 0,\quad \frac{1}{\psi(w)} = 0, \ldots$$

suchen, worin die Functionen $\varphi(u)$, $\chi(v)$, $\psi(w)$, ... nach der Voraussetzung rational sind. Wir wollen ferner annehmen, daß diese Gleichungen aufgelöst seien, und es sei $h+k\sqrt{-1}$ eine ihrer Wurzeln; so hat man blos noch Gleichungen von der Form:

$$u = h+k\sqrt{-1},\quad v = h+k\sqrt{-1}, \ldots$$

aufzulösen, wovon jede eine einzige Wurzel liefert, deren Werth sich leicht bestimmen läßt, wenn man für u, v, w.... irgend welche der Functionen:

$$\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}},\quad 1(r-x\sqrt{-1},\quad 1\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right),$$
$$1[r\sin S+(r\cos S-x)\sqrt{-1}]$$

genommen hat, wo r, s zwei positive Größen sind und S einen zwischen den Grenzen 0 und π liegenden Bogen bezeichnet. Denn setzt man der Kürze wegen:

$$\rho=(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}},\quad \omega=\text{arc tang}\frac{h}{k},$$

so findet man für:

$$\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}=h+k\sqrt{-1},\quad x=\frac{2\rho\cos\omega+(1-\rho^2)\sqrt{-1}}{1+2\rho\sin\omega+\rho^2},$$

für:

$$1(r-x\sqrt{-1})=h+k\sqrt{-1},$$
$$x=-e^h\sin k+(e^h\cos k-r)\sqrt{-1},$$

für:

$$1\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)=h+k\sqrt{-1},$$
$$x=\frac{s}{e^h\sin k-(e^h\cos k-1)\sqrt{-1}}\cdots,$$

u. s. f.

Wenn man für $u,v,w\ldots$ irgend welche der Functionen:

$$\sin bx,\ \cos bx,\ e^{bx},\ e^{bx\sqrt{-1}},\ e^{(a+b\sqrt{-1})x},$$
$$1(1+re^{bx\sqrt{-1}}),\quad 1(1-re^{bx\sqrt{-1}}),\ldots$$

nimmt, worin a, b beliebige Größen und r eine kleinere Zahl als die Einheit bezeichnen; so hat jede der Gleichungen:

$$\frac{1}{\varphi(u)}=0,\quad \frac{1}{\varphi(v)}=0$$

unendlich viele Wurzeln. Wenn z. B. n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, so fände man für $\sin bx=0$:

$$x=0,\quad x=\pm\frac{\pi}{b},\ldots,\quad x=\pm\frac{n\pi}{b},$$

für $\cos bx=0$:

$$x=\pm\frac{\pi}{2b},\ x=\pm\frac{3\pi}{2b},\ldots,\ x=\pm\frac{(2n+1)\pi}{2b},$$

für:

$$e^{bx}=h+k\sqrt{-1}:$$
$$x=\frac{1}{b}\left[1\rho+\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)\sqrt{-1}\pm 2n\pi\sqrt{-1}\right]$$

und für:

$$e^{(a+b\sqrt{-1})x} = h + k\sqrt{-1},$$

$$x = \frac{l\rho + \left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)\sqrt{-1} \pm 2n\pi\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}} \cdots$$

Die mit Δ bezeichnete Summe bestände alsdann im Allgemeinen aus unendlich vielen Gliedern und das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{F(x)+F(-x)}{r}\,dx$$

würde durch die Summe einer unendlichen Reihe ausgedrückt.

§. 136. Nach den verschiedenen vorhin gemachten Bemerkungen kann man aus den Fundamentalgleichungen eine Menge allgemeiner Formeln ableiten, welche zur Bestimmung bestimmter Integrale dienen können, wovon wir aber nur einige anführen wollen. Wenn r eine positive Größe und m eine ganze Zahl bezeichnet, so lassen sich leicht die folgenden allgemeinen Formeln ableiten:

$$\int_0^\infty \frac{F(x)-F(-x)}{2\sqrt{-1}}\,\frac{dx}{x} = F(0)\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{F(x)+F(-x)}{2}\,\frac{r\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}\,F(r\sqrt{-1}),$$

$$\int_0^\infty \frac{F(x)-F(-x)}{2\sqrt{-1}}\,\frac{x\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}F(r\sqrt{-1}),$$

$$\int_0^\infty \frac{F(x)+F(-x)}{2}\,\frac{r\,dx}{x^2-r^2} = \frac{\pi}{4}\,[F(r)-F(-r)]\sqrt{-1},$$

$$\int_0^\infty \frac{F(x)-F(-x)}{2\sqrt{-1}}\,\frac{r^2\,dx}{x(x^2+r^2)} = \frac{\pi}{2}\,[F(0)-F(r\sqrt{-1})],$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{F(x)}{r-x\sqrt{-1}}\,dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{F(x)}{r+x\sqrt{-1}}\,dx = 2\pi F(r\sqrt{-1}),$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{F(x)}{(r-x\sqrt{-1})^m}\,dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{F(x)}{(r+x\sqrt{-1})^m}\,dx = (-1)^{m-1}\,\frac{2\pi}{\Gamma(m)}\,\frac{d^{m-1}F(r\sqrt{-1})}{dr^{m-1}}.$$

Es sei nun $\varphi(x)$ eine rationale Function der Veränderlichen x und:

$$h + k\sqrt{-1}$$

bezeichne irgend eine der Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{\varphi(x)} = 0$, worin der Coefficient von $\sqrt{-1}$ positiv ist. Ferner sei n die Anzahl der Wurzeln, welche gleich $h+k\sqrt{-1}$ sind, ε eine unendlich kleine Größe und H_m, K_m seien zwei reelle Größen, welche durch die Gleichung:

$$H_n + K_n\sqrt{-1} = \frac{1}{1.2.3\ldots n} D_\varepsilon^n [e^{\varepsilon} \varphi(h + k\sqrt{-1} + \varepsilon)]$$

bestimmt werden, welche Gleichung sich in folgende:

$$H + K\sqrt{-1} = e\varphi(h + k\sqrt{-1} + \varepsilon)$$

verwandelt, wenn nur eine der erwähnten Wurzeln $= h + k\sqrt{-1}$ ist.

Endlich sei $f(x)$ eine Function von solcher Beschaffenheit, daß die Gleichung:

$$\frac{1}{f(x)} = 0$$

keine Wurzel hat, worin der Coefficient von $\sqrt{-1}$ positiv ist, oder welche wenigstens in dem Werthe von Δ nur Glieder hervorbringt, deren Summe sich auf Null reducirt; so ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = \Delta$$

folgende:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\,dx$$

$$= (K_{m-1} - H_{m-1}) f(h + k\sqrt{-1}) + (K_{m-2} - H_{m-2}) \frac{f'(h+k\sqrt{-1})}{1} \ldots$$

$$+ (K_1 - H_1\sqrt{-1}) \frac{f^{(m-1)}(h+k\sqrt{-1})}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

wo die Ausdrücke:

$$K - H\sqrt{-1},\quad K_1 - H_1\sqrt{-1}, \ldots$$

auf die Hälfte reducirt werden müssen, wenn die Größe $k = 0$ wird. Wenn z. B. a, b, r wieder positive Größen, $h + k\sqrt{-1}$ eine der ungleichen Wurzel der Gleichung:

$$\frac{1}{\varphi(x)} = 0$$

und ω, ρ dasselbe, wie früher, bezeichnen; so hat man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-x\sqrt{-1})^{a-1} \varphi(x)\,dx$$

$$= -2\pi [(K - H\sqrt{-1})(k - h\sqrt{-1})^{a-1} + \ldots],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{bx\sqrt{-1}} \varphi(x)\,dx$$

$$= -2\pi [(K - H\sqrt{-1})\, e^{-b}(\cos bh + \sqrt{-1}\sin bh) + \ldots],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} l(1 - rx)\sqrt{-1}\,\varphi(x)\,dx$$

$$= -2\pi [(K - H\sqrt{-1}) l(1 + kr - hr\sqrt{-1}) + \ldots].$$

. . . . . .

Jede dieser Gleichungen zerfällt in zwei reelle Gleichungen, wenn man die reellen Glieder und die mit $\sqrt{-1}$ multiplicirten

Glieder der beiden Theile der Gleichungen einzeln gleich Null setzt. Verfährt man auf diese Weise und nimmt für $\varphi(x)$ eine reelle Function, so erhält man eine Menge von Formeln, von welchen wir blos hier die folgenden anführen wollen:

$$\int_0^\infty x^{a-1}\varphi(x)\,dx$$

$$=\frac{2\pi}{\sin a\pi}\left\{\rho^{a-1}\left[1+k\cos(1-a)\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)-k\sin(1-a)\frac{\pi}{2}+\omega\right]+\ldots\right\},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos bx\,\varphi(x)\,dx=-2\pi[(\mathrm{K}\cos bh+\mathrm{H}\sin bh)e^{-bh}+\ldots],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin bx\,\varphi(x)\,dx=-2\pi[(\mathrm{K}\sin bh-\mathrm{H}\cos bh)e^{-bh}+\ldots\ldots],$$

. . . . . .

Legt man nun den Functionen $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{f}(x)$, $\varphi(x)$, oder den Constanten $a, b, r, \ldots$ besondere Werthe bei; so ergeben sich aus den allgemeinen Formeln die meisten bekannten und eine große Menge neuer bestimmter Integrale, wovon wir nur die folgenden hier anführen wollen:

$$\int_0^\infty\frac{x^{a-1}\,dx}{1+x}=\frac{\pi}{\sin a\pi},\quad\int_0^\infty\frac{x^{a-1}\,dx}{1-x}=\pi\cot a\pi,$$

$$\int_0^\infty\frac{x^a dx}{x^2-1}=\int_0^1\frac{x^a-\frac{1}{x^a}}{x-\frac{1}{x}}\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{a\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty\frac{x^a dx}{x^2+2rx\cos\vartheta+r^2}=\frac{\pi r^{a-1}}{\sin a\pi}\frac{\sin a\vartheta}{\sin\vartheta},$$

$$\int_0^\infty\frac{x^a}{1+x^2}(1x)^n\,dx=\frac{\pi}{2}\frac{d^n\sec\frac{a\pi}{2}}{da^n},$$

$$\int_0^\infty\cos bx\frac{r\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}e^{-br},\quad\int_0^\infty\sin bx\frac{x\,dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}e^{-br},$$

$$\int_0^\infty\cos bx\frac{r\,dx}{x^2-r^2}=-\frac{\pi}{2}\sin br,\quad\int_0^\infty\sin bx\frac{x\,dx}{x^2-r^2}=\frac{\pi}{2}\cos bx,$$

$$\int_0^\infty\frac{\sin bx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2},\quad\int_0^\infty\frac{\sin bx}{x}\frac{r^2dx}{x^2+r^2}=\frac{\pi}{2}(1-e^{-br}).$$

§. 137. Wenn die Function $\mathrm{F}(x+y\sqrt{-1})$ bei jedem Werthe von y für $x=\pm\infty$ und bei jedem Werthe von x für $y=\pm\infty$ verschwindet, so ist nach dem Vorhergehenden $\Delta=0$. Wenn alsdann die Gleichung $\frac{1}{\mathrm{F}(x)}=0$ unendlich viele Wurzeln hat, so enthält die Gleichung $\Delta=0$ unendlich viele Glieder und kann zur Summation der Reihen angewandt werden. Setzt man z. B. successive:

$$F(x)=\varphi(x)\frac{\cos rx}{\sin \pi x},\quad F(x)=\varphi(x)\frac{\sin rx}{\sin \pi x},$$

wo r eine kleinere ganze Zahl als π und $\varphi(x)$ einen rationalen Bruch bezeichnet, deſſen Zähler von einem um eine Einheit niedrigeren Grade als der Nenner iſt; ſo kann man vermittelſt der Gleichung $\Delta=0$ unmittelbar die Summen der Reihen:

$$\tfrac{1}{2}\varphi(0)-\frac{\varphi(1)+\varphi(-1)}{2}\cos r+\frac{\varphi(2)+\varphi(-2)}{2}\cos 2r-\text{etc.},$$

$$-\frac{\varphi(1)-\varphi(-1)}{2}\sin r+\frac{\varphi(2)-\varphi(-2)}{2}\sin 2r-\text{etc.}$$

beſtimmen. Setzt man außerdem:

$$s=\pm(2m+1)\pi\pm r,$$

wo m eine beliebige ganze Zahl iſt und der Bogen s ganz willkührlich bleibt; ſo verwandeln ſich dieſe Reihen in:

$$\tfrac{1}{2}\varphi(0)+\frac{\varphi(1)+\varphi(-1)}{2}\cos s+\frac{\varphi(2)+\varphi(-2)}{2}\cos 2s+\text{etc.},$$

$$\frac{\varphi(1)-\varphi(-1)}{2}\sin s+\frac{\varphi(2)-\varphi(-2)}{2}\sin 2s+\text{etc.}$$

Wenn man endlich $s=0$ ſetzt, ſo reducirt ſich die erſte dieſer Reihen auf:

$$\tfrac{1}{2}\varphi(0)+\frac{\varphi(1)+\varphi(-1)}{2}+\frac{\varphi(2)+\varphi(-2)}{2}+\text{etc.}$$

und wenn man für $\varphi(x)$ den beſondern Werth:

$$\varphi(x)=\frac{1}{u^2-x^2}$$

nimmt; ſo erhält man die bekannte Formel:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^2-1}+\frac{1}{u^2-4}+\frac{1}{u^2-9}+\ldots=\frac{\pi}{2u}\cot\pi u.$$

Wenn man die beiden Theile dieſer letzten Gleichung mit $2udu$ multiplicirt und dann in Beziehung auf u von $u=0$ an integrirt, ſo erhält man:

$$l\frac{\sin\pi u}{\pi u}=l(1-u^2)+l\left(1-\frac{u^2}{4}\right)+l\left(1-\frac{u^2}{9}\right)+\text{etc.},$$

oder, was daſſelbe iſt:

$$l\sin\pi u=l\pi+lu+l(1-u^2)+l\left(1-\frac{u^2}{4}\right)+l\left(1-\frac{u^2}{9}\right)+\ldots.$$

und folglich:

$$\sin\pi u=\pi u(1-u^2)\left(1-\frac{u^2}{4}\right)\left(1-\frac{u^2}{9}\right)\ldots\ldots$$

Setzt man nun $u=\frac{1}{2}$, ſo erhält man die bekannte Wallis'ſche Formel:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{7}\frac{8}{9}\cdots,$$

welche sich auch auf folgende Weise direct erhalten läßt. In §. 42 haben wir nämlich gefunden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\,dx = \frac{1.3.5\ldots 2(m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\,dx = \frac{2.4.6\ldots 2m}{1.2.5\ldots 2(m+1)},$$

und wenn man setzt:

$$2m = n,\ u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx;$$

so erhält man:

$$u_n = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{n-1}{n},\quad u_{n+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{n}{n+1}.$$

Außerdem hat man für alle zwischen Null und $\frac{\pi}{2}$ liegende Werthe von x:

$$\sin^n x > \sin^{n+1} x,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin_{n+1} x\,dx \text{ oder } u_n > u_{n+1},$$

und folglich:

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}.$$

Aus demselben Grunde hat man:

$$u_{n+2} < u_{n+1},$$

und folglich:

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}.$$

Wenn man also der Kürze wegen setzt:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n}{n+1} = A,$$

so liegt $\frac{\pi}{2}$ zwischen A und $A\,\frac{n+2}{n+1} = A\left(1+\frac{n}{n+1}\right)$, d. h. zwischen zwei Größen, welche einander so nahe kommen können, als man nur will, wenn n hinreichend groß genommen wird. Wenn man folglich zu der Grenze übergeht, so hat man:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

§. 138. Cauchy hat endlich noch eine andere sehr allgemeine Formel aufgestellt, welche hier schließlich noch angeführt

zu werden verdient. Es bezeichne x eine imaginäre Veränderliche, deren Modulus r und deren Argument t ist, und $F(z)$ sei eine Function, welche, sowohl als ihre Ableitung $F'(z)$, für alle Werthe des Modulus r, die unter einer gewissen gegebenen Grenze R liegen, endlich und stetig bleibt. Ferner wollen wir annehmen, daß die Function $F(z)$ eine periodische Function sei, welche für $t=\alpha+2\pi$ denselben Werth wieder annimmt, welchen sie für $t=\alpha$ hatte, wenn r constant bleibt; so hat man:

$$z=r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t),$$
$$D_r F(z)=F'(z)D_r z=F'(z)\,e^{t\sqrt{-1}},$$
$$D_t F(z)=F'(z)D_t z=F'(z)re^{t\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$

und folglich:

$$D_r F(z)=\frac{1}{r\sqrt{-1}}D_t F(z).$$

Da jeder der beiden Theile dieser letzten Gleichung für jeden kleinern Werth von r als R einen endlichen und bestimmten Werth hat, so findet man, wenn man beide Theile dieser Gleichung mit $drdt$ multiplicirt und zwischen den Grenzen 0, r und α, $\alpha+2\pi$ integrirt:

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi}dt\int_0^r d_r F(z)=\int_0^r\frac{dr}{r\sqrt{-1}}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}d_t F(z).$$

Nun ist aber:

$$\int_0^r d_r F(z)=F(z)-F(0)$$

und nach der Voraussetzung:

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi}d_t F(z)=F(re^{(\alpha+2\pi)\sqrt{-1}})-F(re^{\alpha\sqrt{-1}})=0,$$

folglich:

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi}dt\,[F(z)-F(0)]=0,$$
$$F(0)\int_\alpha^{\alpha+2\pi}dt=2\pi F(0)=\int_\alpha^{\alpha+2\pi}F(z)\,dt$$

und endlich:

$$F(0)=\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}F(z)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi}F(re^{t\sqrt{-1}})dt.$$

Wenn man $\alpha=0$ setzt, so findet man:

$$(a)\qquad F(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(re^{t\sqrt{-1}})\,dt$$

und wenn man $\alpha=-2\pi$ setzt, so kommt:

$$F(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0}F(re^{t\sqrt{-1}})\,dt=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(re^{-t\sqrt{-1}})dt$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(re^{-t\sqrt{-1}})\,dt.$$

Die Formel (a) findet also statt, wenn man darin t in $-t$ verwandelt Wenn man in derselben Formel $F(z)=f(x+z)$ setzt, wo x eine neue, von z unabhängige Veränderliche ist; so hat man $F(0)=f(x)$, und folglich:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+re^{t\sqrt{-1}})\,dt.$$

Aus dieser letzten Formel folgt, daß jede Function, welche, so wie ihre Ableitung, zwischen gewissen Grenzen stetig bleibt, innerhalb dieser Grenzen durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt werden kann, welches dieselbe Function unter dem Zeichen $\int$ enthält.

Beispiel 1. Es sei:

$$F(z)=\frac{1}{1-z},$$

so hat man für jeden kleinern Werth des Modulus r, als die Einheit:

$$F(0)=1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-re^{t\sqrt{-1}}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-r\cos t-r\sin t\sqrt{-1}}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt\,(1-r\cos t+r\sin t\sqrt{-1})}{1-2r\cos t+r^2},$$

folglich:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1-r\cos t+r\sin t\sqrt{-1}}{1-2r\cos t+r^2}=2\pi.$$

Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit den beiden folgenden:

$$\int_0^{2\pi}\frac{1-r\cos t}{1-2r\cos t+r^2}=2\pi,\quad\int_0^{2\pi}\frac{r\sin t\,dt}{1-2r\cos t+r^2}=0.$$

Beispiel 2. Es sei $F(z)=l(1-z)$, so hat man $F'(z)=\frac{1}{1-z}$ und die Function, so wie ihre Ableitung, bleiben für jeden kleinern Werth des Modulus r, als die Einheit stetig. Es ist folglich:

$$z=r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t)$$

und wenn man setzt:

$$1-z=\rho(\cos\vartheta+\sqrt{-1}\sin\vartheta),$$

so kommt:

$$\rho\cos\vartheta=1-r\cos t,\quad\rho\sin\vartheta=-r\sin t,$$
$$\rho=\sqrt{1-2r\cos t+r^2},\ l(1-z)=l\rho+\vartheta\sqrt{-1}.$$

Aus diesen verschiedenen Gleichungen geht zur Genüge hervor, daß die Function $F(z)$ und ihre Ableitung wieder denselben Werth annehmen, wenn t von dem Werthe α zu dem Werthe $\alpha+2\pi$ übergeht. Diese Function genügt also den erforderlichen Bedingungen und man hat:

$$F(0)=11=\int_0^{2\pi} l(1-re^{t\sqrt{-1}})\,dt=0$$

und wenn man t in $-t$ verwandelt:

$$\int_0^{2\pi} l(1-re^{-t\sqrt{-1}})\,dt=0.$$

Wenn man diese beiden Gleichungen zusammenaddirt, und bemerkt, daß:

$$e^{t\sqrt{-1}}+e^{-t\sqrt{-1}}=2\cos t$$

ist; so verschwinden die imaginären Größen und man erhält:

$$\int_0^{2\pi} l(1-2r\cos t+r^2)\,dt=0.$$

Diese Formel setzt, wie wir bemerkt haben, voraus, daß $r<1$ ist, und wenn $r>1$ ist; so wird das Integral im ersten Theile $=4\pi lr$. In der That ist:

$$\int_0^{2\pi} l(1-2r\cos t+r^2)dt=\int_0^{2\pi} lr^2dt+\int_0^{2\pi} l\left(1-\frac{2}{r}\cos t+\frac{1}{r^2}\right)dt.$$

Nun ist aber auch:

$$\int_0^{2\pi} lr^2dt=4\pi lr,\quad \int_0^{2\pi} l\left(1-\frac{2}{r}\cos t+\frac{1}{r^2}\right)=0,$$

weil $\frac{1}{r}<1$ ist; folglich:

$$\int_0^{2\pi} l(1-2r\cos t+r^2)\,dt=4\pi lr.$$

Beispiel 3. Es sei:

$$F(z)=e^{ar}=e^{ar\cos t+\sqrt{-1}\,ar\sin t}$$
$$=e^{b\cos t}[\cos(b\sin t)+\sqrt{-1}\sin(b\sin t)],$$

wo $ar=b$ gesetzt ist; so hat man für alle endlichen Werthe von r oder b:

$$\int_0^{2\pi} e^{b\cos t}\cos(b\sin t)\,dt=2\pi$$

oder:

$$\int_0^{2\pi} e^{b\cos t}\sin(b\sin t)\,dt=0.$$

Integralrechnung.

Zweiter Theil.

Integration der Differenzialgleichungen.

Zwei und zwanzigste Vorlesung.

Allgemeine Principien. — Differenzialgleichungen der ersten Ordnung. — Unmittelbare Integration.

§. 139. Gleichungen, welche Relationen zwischen einer unabhängigen Veränderlichen x, den Functionen y, z,..... derselben und den Differenzialen oder Ableitungen der verschiedenen Ordnungen dieser Functionen ausdrücken, nennt man Differenzialgleichungen. Die Ordnung der höchsten Ableitung, welche in einer Differenzialgleichung vorkommt, bestimmt auch die Ordnung dieser Gleichung. Eine Differenzialgleichung von der ersten Ordnung zwischen der Veränderlichen x und den Functionen y, z,.... derselben enthält außer x, y, z,.... blos die Ableitungen der ersten Ordnung:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad z' = \frac{dz}{dx}, \ldots$$

Differenzialgleichungen integriren heißt: die Functionen finden, welche sie bestimmen, oder wenigstens neue Gleichungen, welche nur die Veränderliche x und diese Functionen enthalten, wo diese neuen Gleichungen alsdann Integrale genannt werden.

Jede Gleichung von der Form:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

wird eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung mit zwei Veränderlichen genannt, und wenn man sie in Beziehung auf die Ableitung y' oder $\frac{dy}{dx}$ auflöst; so erhält man für diese Ableitung einen oder mehrere Werthe von der Form $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Wenn man ferner setzt:

$$f(x,y) = -\frac{M}{N},$$

wo M, N zwei neue Functionen von x, y bezeichnen, so verwandelt sich die mit N multiplicirte Gleichung $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ in:

$$N\frac{dy}{dx} = -M, \text{ oder } Mdx + Ndy = 0.$$

§. 140. Zunächst ist es von Wichtigkeit, sich einen genauen Begriff von der Bedeutung einer gegebenen Differenzialgleichung und von der Relation, welche eine solche Gleichung zwischen den Veränderlichen feststellt, zu bilden.

Analytisch betrachtet, soll eine solche Gleichung den Differenzialcoefficienten oder die Ableitungen als Function der beiden Veränderlichen ausdrücken und den gegebenen Werthen von x und y entsprechenden Werth von $\frac{dy}{dx}$ bestimmen, so daß das Problem der Integration einer solchen Differenzialgleichung darin besteht: eine Function von x und y zu finden, welche differenzirt und in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$ aufgelöst, den gegebenen Ausdruck $f(x,y)$ wiedergiebt. Aus geometrischem Gesichtspuncte betrachtet, giebt die Differenzialgleichung die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die in einem beliebigen Puncte einer unbekannten Curve gezogene Tangente mit der Axe der x bildet, und die Integration der gegebenen Differenzialgleichung besteht alsdann in der Construction der Curve, oder wenigstens in ihrer Bestimmung durch ihre Gleichung. Später werden wir rein analytisch und streng beweisen, daß das Integral einer beliebigen Differenzialgleichung mit zwei Veränderlichen und von der ersten Ordnung existirt, und daß man beliebig genäherte Werthe desselben erhalten kann; aber die Existenz dieses Integrales kann auch durch einfache geometrische Betrachtungen außer Zweifel gesetzt werden. Wir wollen die gegebene Differenzialgleichung auf folgende Form bringen:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

und x, y als zwei rechtwinklige Coordinaten betrachten. Legt man x und y zwei willkührliche Werthe a und b bei, d. h. nimmt man irgend einen ersten Punct M an, dessen Coordinaten folgende sind:

$$OP = x = a, \quad MP = y = b;$$

so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = f(a, b)$$

und wenn man alsdann die Linie MT zieht, welche mit der Axe der x einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente

$= f(a, b)$ ist; so ist diese gerade Linie MT eine erste Tangente der gesuchten Curve. Da nun eine Curve und ihre Tangente in der Nähe des Berührungspunctes nahezu zusammenfallen, so kann man den auf der geraden Linie MT in einer sehr kleinen Entfernung von M liegenden Punct M′ als der Curve angehörig betrachten, so daß:

$$x = OP' = a', \quad y = M'P' = b'$$

die Coordinaten eines zweiten Punctes der Curve sind, und vermittelst dieser beiden Coordinaten und der Gleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ bestimmt man eine zweite Tangente, dann einen dritten Punct, u. s. f. Auf diese Weise erhält man ein Vieleck, welches um so weniger von der durch das Integral der gegebenen Differenzialgleichung bestimmten Curve verschieden ist, je größer die Anzahl seiner Seiten wird. Aber diese Construction zeigt auch, daß eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung unendlich vielen Curven angehört, weil man den ersten Punct beliebig annehmen kann. Denn die construirten Curven ändern sich nicht blos der Lage nach, sondern im Allgemeinen auch der Form nach mit der Lage des ersten Punctes; aber dennoch haben alle diese Curven ein gemeinschaftliches Merkmal, welches durch die gegebene Differenzialgleichung ausgedrückt wird. Diese Differenzialgleichung drückt also eine gemeinschaftliche Eigenschaft unendlich vieler Curven aus, welche man sich auf einer Ebene beschrieben denken kann. Diese Eigenschaft bestimmt die Neigung der Tangente in einem beliebigen Puncte als Function der Coordinaten dieses Punctes und giebt das Mittel zur Construction dieser Curve an die Hand, wenn man einen ihrer Puncte kennt. Uebrigens kann man bemerken, daß die Wahl irgend einer dieser Linien von einer einzigen willkührlichen Größe abhängt, und man braucht z. B. nur den $x = a$ entsprechenden Werth von y festzusetzen.

§. 141. Nach dem Gesagten begreift man leicht, von welcher Beschaffenheit die ursprüngliche Gleichung oder das Integral der gegebenen Differenzialgleichung sein muß. Wenn dieses Integral dieselbe Allgemeinheit haben soll, wie die gegebene Differenzialgleichung, so muß es jeder der Curven entsprechen, welche man vermittelst dieser Gleichung construiren kann. Es muß also eine von den etwa in der gegebenen Differenzialgleichung vorkommenden Constanten verschiedene willkührliche Constante enthalten. Die Unbestimmtheit dieser Constante giebt dem Integrale die erforderliche Allgemeinheit, indem man dasselbe einer beliebigen der in Rede stehenden Curven entsprechen lassen kann, so daß es folglich das ganze System dieser Curven ausdrückt. Ferner muß dieses Integral oder diese ursprüngliche Gleichung der gegebenen Differenzialgleichung genügen, d. h. die aus der ursprünglichen Gleichung und ihrer Ableitung gezogenen und in die gegebene Differenzialgleichung substituirten Werthe von y und $\frac{dy}{dx}$ müssen diese identisch machen, oder was dasselbe ist: man muß die gegebene Differenzial-

gleichung wieder erhalten, wenn man die willkührliche Constante zwischen der ursprünglichen Gleichung und ihrer Ableitung eliminirt.

Aus dieser für sich klaren Möglichkeit der Elimination einer beliebigen Constante C zwischen einer Gleichung $F(x, y, C) = 0$ und ihrem Differenziale:

$$\frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy = 0,$$

wodurch man auf eine von dieser Constante ganz unabhängige Gleichung:

$$f\left(x.\ y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

kommt, hätte man a priori und ohne Hülfe geometrischer Betrachtungen schließen können, daß eine gegebene Differenzialgleichung unendlich vielen ursprünglichen Gleichungen entspricht, welche sich nur durch die einer gewissen Constante beigelegten Werthe von einander unterscheiden, und daß folglich das Integral einer gegebenen Differenzialgleichung eine willkührliche Constante enthalten muß, deren Werth man beliebig annehmen kann, wenn dieses Integral seine völlige Allgemeinheit haben soll. Die ursprüngliche Gleichung, welche eine willkührliche Constante enthält, der man keine besondern Werthe beigelegt hat, wird das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung genannt, und jedem besondern Werthe der willkührlichen Constante entspricht ein neues Integral, welches wir ein particuläres Integral nennen wollen. Aber zuweilen geschieht es auch, daß eine ursprüngliche Gleichung der gegebenen Differenzialgleichung genügt, ohne daß man sie aus dem allgemeinen Integrale ableiten kann, wenn man der Constante einen besondern Zahlenwerth beilegt, und daß sich diese ursprüngliche Gleichung nur dann mit dem allgemeinen Integrale in Verbindung bringen läßt, wenn man die willkührliche Constante als veränderlich, oder als eine Function von x, y betrachtet; alsdann werden diese ursprünglichen Gleichungen singuläre Integrale oder singuläre Auflösungen genannt. Wir wollen uns zunächst blos mit der Bestimmung des allgemeinen Integrales gegebener Differenzialgleichungen beschäftigen, indem wir die Hauptmethoden kennen lehren wollen, vermittelst welcher man in gewissen Fällen diesen Zweck erreichen kann.

§. 142. Wir wollen die Differenzialgleichung:

$$M dx + N dy = 0$$

wieder betrachten, so kann es geschehen, daß der erste Theil derselben als das genaue Differenzial einer gewissen Function $u = F(x, y)$ erkannt wird, so daß sich die gegebene Differenzialgleichung auf die Form:

$$du = df(x, y) = 0$$

bringen läßt, und in diesem Fall ist einleuchtend, daß das allgemeine Integral derselben folgendes ist:

$$u = f(x, y) = C.$$

Beiſpiel 1. Es ſei:

$$Mdx+Ndy=xdy+ydx=d(xy)=0,$$

ſo iſt das allgemeine Integral:

$$xy=C.$$

Beiſpiel 2. Es ſei:

$$Mdx+Ndy=dy-f(x)dx=d\left[y-\int_{x_0}^{x}f(x)dx\right]=0,$$

ſo iſt das allgemeine Integral:

$$y-\int_{x_0}^{x}f(x)dx=C, \text{ oder } y=\int f(x)dx.$$

Beiſpiel 3. Es ſei:

$$Mdx+Ndy=\varphi(x)\,dx+\chi(y)\,dy$$
$$=d\left[\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx+\int_{y_0}^{y}\chi(y)\,dy\right]=0,$$

ſo iſt das allgemeine Integral:

$$\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx+\int_{y_0}^{y}\chi(y)\,dy=C.$$

In der Gleichung:

$$\varphi(x)dx+\chi(y)\,dy=0$$

ſind die Veränderlichen von einander getrennt, und man ſieht, daß ſich in dieſem Falle die Integration unmittelbar bewerkſtelligen läßt.

§. 143. Aber der Ausdruck $Mdx+Ndy$ kann das genaue Differenzial einer Function $u=F(x,y)$ ſein, ohne daß man unmittelbar erkennt, welches dieſe Function iſt, und dennoch läßt ſich die Integration in dieſem Falle leicht und ſicher bewerkſtelligen, weil man die Function u immer beſtimmen kann. Denn wenn identiſch:

$$Mdx+Ndy=\varphi(x,y)dx+\chi(x,y)\,dy=du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy$$

iſt, ſo muß auch:

$$M=\varphi(x,y)=\frac{du}{dx},\quad N=\chi(x,y)=\frac{du}{dy},$$

und folglich:

$$\frac{dM}{dy}=\frac{d\varphi(x,y)}{dy}=\frac{dN}{dx}=\frac{d\chi(x,y)}{dx}$$

ſein. Sobald aber die Bedingung:

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}, \text{ oder } \frac{d\varphi(x,y)}{dy} = \frac{d\chi(x,y)}{dx}$$

erfüllt wird, kann man die Function u leicht auf folgende Weise berechnen. Da M oder $\varphi(x, y)$ die Ableitung von u in Beziehung auf x ist, so muß man haben:

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y)\,dx + Y,$$

wo Y eine willkührliche Function der Veränderlichen y bezeichnet. Aus dieser letzten Gleichung folgt:

$$\frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}\int_{x_0}^{x} \varphi(x,y)dx + \frac{dY}{dy} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\varphi(x,y)}{dy}\,dx + \frac{dY}{dy}.$$

Wenn man für $\frac{d\varphi(x,y)}{dy}$ seinen Werth $\frac{d\chi(x,y)}{dx}$ und für $\frac{du}{dy}$ seinen Werth $\chi(x, y)$ substituirt, so erhält man:

$$\chi(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\chi(x,y)}{dx}\,dx + \frac{dY}{dy},$$

oder wenn man die angezeigte Integration verrichtet:

$$\chi(x,y) = \chi(x,y) - \chi(x_0,y) + \frac{dY}{dy},$$

$$\frac{dY}{dy} = \chi(x_0,y),\ Y = \int_{y_0}^{y} \chi(x_0,y) + C,$$

und folglich, da der allgemeine Werth von u folgender ist:

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} \chi(x_0,y) + C;$$

so ist das allgemeine Integral der Gleichung:

$$M dx + N dy = \varphi(x,y)\,dx + \chi(x,y)\,dy = 0$$

folgendes:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} \chi(x_0,y) = C,$$

oder:

$$\int_{x_0}^{x} M dx + \int_{y_0}^{y} N_{x_0}\,dx = C,$$

wo N_{x_0} den Werth von N bezeichnet, wenn man darin $x = x_0$ setzt. Wenn man zuerst gesetzt hätte:

$$u = \int_{y_0}^{y} \chi(x,y)\,dx + X,$$

so hätte man für das allgemeine Integral gefunden:

$$\int_{y_0}^{y} \chi(x,y)\,dy + \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y_0)dx = C,$$

und es läßt sich leicht zeigen, daß diese beiden verschiedenen Werthe die gegebene Differenzialgleichung wiedergeben. Auch läßt sich leicht, wie in dem Falle, wo das Binom $Mdx + Ndy$ ein genaues Differenzial ist, zeigen, daß das allgemeine Integral der Gleichung:

$$Mdx + Ndy = 0$$

folgendes ist:

$$\int Mdx + \int N_y dy = C, \text{ oder } \int Ndy + \int M_x dx = C,$$

wo N_y die Glieder von N bezeichnet, welche kein x enthalten, und M_x die Glieder von M, welche kein y enthalten. In der That haben alle Glieder von u, welche x enthielten, durch die Differenzirung Glieder gegeben, welche in Mdx vorkommen, so daß man sie folglich wieder erhält, wenn man das Integral $\int Mdx$ sucht, und um u vollständig zu machen, d. h. um die Glieder von u zu finden, welche nur y enthielten, braucht man nur den kein x enthaltenden Theil Ndy, welchen wir mit $N_y dy$ bezeichnet haben, zu integriren. Dieselben Schlüsse lassen sich auf den Ausdruck:

$$\int Ndy + \int M_x dx$$

anwenden, und in allen Fällen muß man offenbar, um N_y zu erhalten, von N, welches die Totalableitung der Function u in Beziehung auf y ist, $\frac{d}{dy}\int Mdx$ oder den Theil dieser Ableitung abziehen, welcher von dem x enthaltenden Gliedern $\int Mdx$ herrührt, und auf diese Weise erhält man die bekannte Formel:

$$u = \int Mdx + \int \left(N - \frac{d}{dy}\int Mdx\right) dy.$$

Beispiel 1. Es sei:

$$\frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2} = 0,$$

so hat man:

$$\frac{d\frac{y}{x^2+y^2}}{dy} = \frac{d\frac{-x}{x^2+y^2}}{dx} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\int_{x_0}^{x} Mdx = \int_{x_0}^{x} \frac{ydx}{x^2+y^2} = \text{arc tang}\frac{x}{y} - \text{arc tang}\frac{x_0}{y},$$

$$\int_{y_0}^{y} N_{x_0} dy = -\int_{y_0}^{y} \frac{x_0 dy}{x_0^2+y^2} = -\text{arc tang}\frac{y}{x_0} + \text{arc tang}\frac{x_0}{y_0},$$

$$u = \text{arc tang}\frac{x}{y} - \left(\text{arc tang}\frac{x_0}{y} + \text{arc tang}\frac{y}{x_0}\right) + \text{arc tang}\frac{x_0}{y_0},$$

oder wegen:

$$\text{arc tang}\frac{x_0}{y} + \text{arc tang}\frac{y}{x_0} = \frac{\pi}{2}.$$

$$u = \text{arc tang } \frac{x}{y} + C.$$

Das gesuchte Integral ist folglich:

$$\text{arc tang } \frac{x}{y} = C.$$

Wenn man die Formel:

$$\int M dx + \int N_y dy = C$$

anwendet, so findet man für das gesuchte Integral:

$$\int M dx = \text{arc tang } \frac{x}{y} = C.$$

So oft sich die gegebene Differenzialgleichung auf eine der Formen:

$$\varphi(x, y)\,dx + \chi(y)\,dy = 0,$$
$$\varphi(x)\,dx + \chi(x, y)\,dy = 0$$

reducirt, reducirt sich ihr Integral auf:

$$\int M dx = \int \varphi(x, y)\,dx = C,$$

oder:

$$\int N dy = \int \chi(x, y)\,dx = C.$$

Beispiel 2. Es sei:

$$\frac{dx}{x} + \frac{y^2 dx}{x^3} - \frac{y dy}{x^2} + \frac{(y\,dx - x\,dy)\sqrt{x^2+y^2}}{x^3} + \frac{dy}{2y} = 0$$

oder:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{y^2 + y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}\right)dx + \left(\frac{1}{2y} - \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}\right)dy = 0,$$

so hat man:

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} = \frac{2y}{x^3} + \frac{x^2 + 2y^2}{x^3\sqrt{x^2+y^2}} \cdots$$

$$\int M dx = 1x - \frac{y^2}{2x^2} + y\int \frac{dx}{x^3}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Integrirt man theilweise, so findet man:

$$\int \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{dx}{x^3} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+y^2}};$$

aber wenn man setzt:

$$\sqrt{x^2+y^2} = z$$

und dann x für z substituirt; so findet man leicht, daß:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{y} 1\left(\frac{-y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right)$$

ist, und außerdem ist:

$$N_y = \frac{1}{2y}, \int N_y dy = \int \frac{dy}{2y} = \frac{1}{2} \mathrm{l} y;$$

folglich ist das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung:

$$\mathrm{l} x = \frac{y^2}{2y^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\mathrm{l}\left(\frac{-y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{l} y = C.$$

Drei und zwanzigste Vorlesung.

Integration durch Substitution. — Integration vermittelst eines schicklichen Factors.

---

§. 144. Die Integration durch Substitution besteht darin, daß man für die Veränderliche y oder x eine neue Veränderliche z einführt, welche so gewählt ist, daß man zwischen x und z, oder zwischen y und z eine Gleichung erhält, deren erster Theil ein unmittelbares Differenzial ist, oder daß man durch eine andere Methode leicht integriren kann.

Beispiel 1. Es sei:

$$dy + f\left(\frac{y}{x}\right) dx = 0,$$

so wollen wir setzen:

$$\frac{y}{x} = z,$$

woraus folgt:

$$y = xz, \quad dy = xdz + zdx,$$

und wenn man für y und dy ihre Werthe substituirt:

$$xdz + [z + f(z)]\,dx = x[z + f(z)]\left[\frac{dz}{z + f(z)} + \frac{dx}{x}\right] = 0.$$

Diese letzte Gleichung zerfällt in die beiden andern:

$$\frac{dz}{z + f(z)} + \frac{dx}{x} = 0, \quad x[z + f(z)] = 0,$$

und folglich wird derselben genügt, sowohl wenn man setzt:

$$lx + \int \frac{dz}{z + f(z)} = C,$$

als wenn man z einen der Werthe:

$$z = z_1, \quad z = z_2, \quad z = z_3, \ldots$$

beilegt, wo z_1, z_2, z_3, ... die verschiedenen Wurzeln der Gleichung:

$$z + f(z) = 0$$

bezeichnen.

Wenn man wieder $\frac{y}{x}$ für z ſetzt, ſo findet man für die Integrale der gegebenen Gleichung:

$$\int \frac{dy}{y+xf\left(\frac{y}{x}\right)} + lx = C, \quad y = z_1 x, \quad y = z_2 x, \text{ etc.}$$

Die erſte dieſer Gleichungen iſt das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung und die durch die andern Gleichungen gegebenen Werthe von y ſind particuläre, oder ſinguläre Integrale.

Beiſpiel 2. Es ſei:

$$\frac{xy\,dy + y^2dx}{x^2y^2 + a^4} = \frac{df(y)}{a^2}$$

oder:

$$\frac{y}{x^2y^2 + a^4}\,d(xy) = \frac{df(y)}{a^2}.$$

Setzt man:

$$xy = az,$$

ſo findet man:

$$d(xy) = adz, \quad x = \frac{az}{y},$$

und folglich:

$$\frac{aydz}{a^2z^2 + a^4} = \frac{df(y)}{a^2}, \quad \left[\frac{df(y)}{y} - \frac{adz}{z^2 + a^2}\right] y = 0,$$

welcher Gleichung genügt wird, ſowohl wenn man $y = 0$, als wenn man:

$$\int \frac{df(y)}{y} - \text{arc tang}\,\frac{z}{a} = C$$

ſetzt.

Beiſpiel 3. Es ſei:

$$bydx - \frac{a^3dx}{x} = aydy$$

oder:

$$y(bdx - ady) = \frac{a^3dx}{x}, \quad yd(bx - ay) = \frac{a^3dx}{x},$$

ſo verwandelt ſich die vorhergehende Gleichung, wenn man ſetzt:

$$bx - ay = az$$

in folgende:

$$bxdz - azdz = \frac{a^3dx}{x}.$$

Setzt man ferner:

$$zdz = \frac{a^2 ds}{s},$$

so kommt:

$$bxdz = a^3 \left(\frac{ds}{s} + \frac{dx}{x}\right) = a^3 \frac{d.xs}{xs}$$

und endlich, wenn man setzt:

$$sx = v, \quad x = \frac{v}{s}, \quad \frac{bdz}{s} - a^3 \frac{dv}{v^2} = 0.$$

Da s durch die Gleichung:

$$zdz = \frac{a^2 ds}{s}$$

als Function von z ausgedrückt wird, so können die Veränderlichen z und v in dieser letzten Gleichung als getrennt angesehen werden, und folglich läßt sich diese Gleichung integriren.

Es lassen sich übrigens in Beziehung auf diese Substitution keine allgemeinen Regeln geben. Zuweilen läßt man einige der neu eingeführten Veränderlichen unbestimmt, um ihnen im Verlaufe der Operationen besondere Werthe beizulegen, welche die Trennung der Veränderlichen erleichtern, oder die Gleichungen vereinfachen, indem sie ein oder mehrere Glieder verschwinden machen.

Beispiel. Es sei:

$$dy + yF(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Setzt man $y = zt$ und substituirt, so erhält man:

$$zdt + tdz + ztF(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

und man kann z und t so annehmen, daß man hat:

$$tdz + ztF(x)\,dx = 0, \text{ oder } \frac{ds}{s} + F(x)\,dx = 0.$$

Die vorhergehende Gleichung reducirt sich alsdann auf:

$$zdt = f(x)\,dx, \text{ oder } dt = \frac{f(x)}{s}\,dx.$$

Aus der Gleichung:

$$\frac{ds}{s} + F(x)\,dx = 0$$

ergiebt sich:

$$z = e^{-\int F(x)\,dx}$$

und wenn man substituirt, so erhält man:

$$dt = e^{\int F(x)\,dx} f(x)\,dx, \quad t = C + \int e^{\int F(x)\,dx} f(x)\,dx,$$

und das gesuchte Integral ist:

$$y = e^{-\int F(x)\,dx}\left[C + \int e^{\int F(x)\,dx} f(x)\,dx\right].$$

§. 145. Wenn man, um den ersten Theil der Gleichung:

$$M dx + N dy = 0$$

in ein genaues Differenzial zu verwandeln, nur mit einem bekannten Factor v zu multipliciren braucht, oder mit andern Worten, wenn man identisch hat:

$$v(M dx + N dy) = du,$$

so läßt sich die gegebene Gleichung auf folgende Form bringen:

$$\frac{1}{v} du = 0$$

und man genügt derselben, sowohl wenn man $du = 0$ oder $u = C$, als wenn man $\frac{1}{v} = 0$ setzt. Die Gleichung $u = C$ ist das allgemeine Integral und die aus der Gleichung $\frac{1}{v} = 0$ als Functionen von x abgeleiteten Werthe von y sind particuläre, oder singuläre Integrale.

Beispiel 1. Es sei:

$$x dy - y dx = 0,$$

so hat man:

$$x dy - y dx = xy\left(\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x}\right) = xy\,d(\mathrm{l}y - \mathrm{l}x) = xy\,du.$$

Man braucht also die gegebene Gleichung nur mit $\frac{1}{xy}$ zu multipliciren, um ihren ersten Theil zu einem genauen Differenziale zu machen. Man genügt derselben folglich: 1) wenn man $u = \mathrm{l}y - \mathrm{l}x = C$ oder $\frac{y}{x} = C$, also $y = Cx$ setzt, und diese letzte Gleichung ist das gesuchte allgemeine Integral; 2) wenn man $y = 0$ setzt; aber dieser letzte Werth ist nur ein particuläres Integral; denn derselbe ergiebt sich aus dem allgemeinen Integrale, wenn man darin $C = 0$ setzt.

Beispiel 2. Es sei:

$$dy\sqrt{x} - dx\sqrt{y} = 0,$$

so hat man:

$$\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}(dy\sqrt{x} - dx\sqrt{y}) = \frac{dy}{\sqrt{y}} - \frac{dx}{\sqrt{x}} = du,$$

und das allgemeine Integral ist:

$$u = 2(y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) = C, \text{ oder } y = (C + \sqrt{x})^2.$$

Der Werth $y=0$, welchen man erhält, wenn man den Factor $\frac{1}{v}=\sqrt{x}\sqrt{y}$ gleich Null setzt, ist ein singuläres Integral, weil sich derselbe nicht aus dem allgemeinen Integrale ableiten läßt.

Beispiel 3. Es sei:

$$dy-y\,\mathrm{l}y\,dx=0,$$

so ist der integrirende Factor $=\frac{1}{y\,\mathrm{l}y}$, und wenn man die gegebene Gleichung damit multiplicirt, so zerfällt sie in die beiden andern:

$$\frac{dy}{y\,\mathrm{l}y}-dx=\frac{d\,\mathrm{l}y}{\mathrm{l}y}-dx=0, \text{ und } y\,\mathrm{l}y=0.$$

Das allgemeine Integral ist:

$$\mathrm{ll}y=x+\mathrm{C}, \text{ oder } \mathrm{l}y=\mathrm{C}e^{x}$$

und die aus der Gleichung $y\,\mathrm{l}y=0$ abgeleiteten Werthe $y=0$, $y=1$ sind particuläre Integrale.

Beispiel 4. Es sei:

$$\varphi(x)\chi(y)\,dx+\varphi_1(x)\chi_1(y)\,dy=0,$$

so ist $\frac{1}{\varphi_1(x)\chi(y)}$ der integrirende Factor und das allgemeine Integral ist:

$$\int\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}dx+\int\frac{\chi_1(y)}{\chi(y)}dx=C,$$

und wenn:

$$y_1, y_2, y_3, \ldots$$

die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\chi(y)=\infty$ bezeichnen, so sind die Werthe $y=y_1$, $y=y_2$, etc. particuläre, oder singuläre Integrale.

§. 146. Wenn man einen ersten integrirenden Factor v der Gleichung $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy=0$ gefunden hat, so daß identisch:

$$v(\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy)=du$$

ist, so lassen sich daraus unendlich viele andere integrirende Factoren von der Form $v\varphi(u)$, wo φ eine beliebige Function bezeichnet, ableiten. Denn wenn ein zweiter Factor V dieselbe Eigenschaft als der Factor v haben soll, so ist erforderlich, aber auch hinreichend, daß das Product:

$$\mathrm{V}(\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy)=\frac{\mathrm{V}}{v}du$$

ein genaues Differenzial $d\mathrm{U}$ sei. Diese Bedingung wird aber erfüllt, wenn man setzt:

$$\frac{\mathrm{V}}{v}=\varphi(u), \quad \mathrm{V}=v\varphi(u),$$

weil alsdann der Gleichung:

$$V(Mdx+Ndy)=\frac{V}{v}du=\varphi(u)du=dU$$

genügt wird, wenn man ſetzt:

$$U=\int\varphi(u)du.$$

Umgekehrt, wenn der neue Factor V das Binom $Mdx+Ndy$ integrabel macht, ſo iſt derſelbe von der Form $v\varphi(u)$; denn wenn man hat:

$$V(Mdx+Ndy)=\frac{V}{v}du=dU,$$

ſo iſt, wenn man bemerkt, daß U, welches eine Function von x und y iſt, als eine Function von x und u betrachtet werden muß, welche für y ſubſtituirt werden kann:

$$\frac{V}{v}du=\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{du}du.$$

Nun zerfällt aber dieſe letzte Gleichung in zwei andere, nämlich in:

$$\frac{V}{v}=\frac{dU}{du}du$$

und in:

$$\frac{dU}{dx}=0,$$

und aus dieſer letzten Gleichung ergiebt ſich:

$$U=\psi(u),\quad\frac{V}{v}=\psi'(u),\quad V=v\psi'(u)=v\varphi(u).$$

Es iſt gewöhnlich ſehr ſchwierig, den integrirenden Factor des Ausdruckes $Mdx+Ndy$ zu finden; aber um die Exiſtenz eines ſolchen Factors nachzuweiſen, braucht man nur anzunehmen, daß die Differenzialgleichung:

$$Mdx+Ndy=0$$

ein allgemeines Integral von der Form:

$$y=f(x,C)$$

hat; denn alsdann ergiebt ſich aus dieſer letzten Gleichung $C=u$, wo u eine Function von x,y bezeichnet, und wenn man differenzirt, ſo findet man:

$$\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=0.$$

Hieraus folgt, daß der Werth von $\frac{dy}{dx}$ zu gleicher Zeit durch die beiden Gleichungen des erſten Grades:

$$M-N\frac{dy}{dx}=0,\quad\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}=0$$

gegeben wird, und wenn man $\frac{dy}{dx}$ zwischen diesen beiden Gleichungen eliminirt; so erhält man:

$$\frac{\frac{du}{dx}}{M} = \frac{\frac{du}{dy}}{N}.$$

Diese letzte Gleichung kann aber nur eine identische und keine Gleichung sein, welche y als Function von x bestimmt, so daß man $y = \varphi(x)$ hätte; denn sie muß, sowohl als die beiden Gleichungen:

$$Mdx + Ndy = 0, \quad \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy = 0$$

für $y = f(x, C)$ erfüllt werden, und man müßte folglich für jeden Werth von C folgende Gleichung haben:

$$\varphi(x) = f(x, C),$$

was ungereimt ist. Wenn man also $\frac{\frac{du}{dx}}{M} = v$ setzt, so hat man identisch:

$$\frac{\frac{du}{dy}}{N} = v, \quad \frac{du}{dx} = vM, \quad \frac{du}{dy} = vN,$$

$$v(Mdx + Ndy) = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy = du,$$

und es giebt folglich einen Factor v, welcher so beschaffen ist, daß der mit diesem Factor multiplicirte Ausdruck $Mdx + Ndy$ ein genaues Differenzial wird.

P. Binet beweist diesen Satz ganz streng auf folgende Weise: Da der Werth $y = f(x, C)$ der Gleichung:

$$\varphi(x, y)\,dx + \chi(x, y)\,dy = 0$$

genügt, so hat man identisch:

$$\varphi(x, f)\,dx + \chi(x, f)\,df = 0,$$

wenn man die Function $f(x, C)$ der Kürze wegen mit f bezeichnet.

Wenn man in diese Function für die Constante C einen veränderlichen Werth oder eine Function von x, y setzt, so wird die vorhergehende Gleichung nicht mehr erfüllt; aber man hat identisch:

$$\varphi(x, f)\,dx + \chi(x, f)\,df = \varphi(x, f)\,dx + \chi(x, f)\frac{df}{dx}\,dx + \chi(x, f)\,\frac{df}{dC}\,dC,$$

und außerdem ist:

$$\varphi(x,f)\,dx+\chi(x,f)\,\frac{df}{dx}\,dx=0,$$

weil der erste Theil dieser letzten Gleichung das Resultat der Substitution des Werthes $y=f(x,C)$ in die Gleichung:

$$\varphi(x,y)\,dx+\chi(x,y)\,dy=0$$

ist, wenn C als eine Constante betrachtet wird, und man hat folglich für jeden Werth von C:

$$\varphi(x,f)\,dx+\chi(x,f)\,df=\chi(x,f)\,\frac{df}{dC}\,dC.$$

Wenn man in dieser Gleichung für C seinen aus der Gleichung $y=f(x,C)$ abgeleiteten Werth $u=\mathrm{F}(x,y)$ setzt und bemerkt, daß identisch $f(x,u)=y$ ist, weil, wenn man den aus der Gleichung $y=f(x,C)$ abgeleiteten Werth u von C substituirt, die resultirende Gleichung $y=f(x,u)$ identisch sein muß, so daß sich der zweite, wie der erste Theil, auf y reducirt; so findet man:

$$\varphi(x,y)\,dx+\chi(x,y)\,dy=\chi(x,y)\,\frac{df}{du}\,du$$

$$=\chi(x,y)\,\frac{df(x,u)}{du}\,du$$

und folglich:

$$\frac{1}{\chi(x,y)\,\frac{df(x,u)}{du}}\,[\varphi(x,y)\,dx+\chi(x,y)\,dy]=du,$$

$$\frac{\psi(u)}{\chi(x,y)\,\frac{df(x,u)}{du}}\,[\varphi(x,y)\,dx+\chi(x,y)\,dy]=\psi(u)\,du=d\mathrm{U}.$$

Der Factor:

$$v=\frac{1}{\chi(x,y)\,\frac{df(x,u)}{du}}$$

oder allgemeiner, der Factor:

$$\mathrm{V}=v\psi(u)$$

hat also die Eigenschaft, daß er den Differenzialausdruck $\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy$ zu einem vollständigen Differenziale macht, wenn man diesen Ausdruck mit diesem Factor multiplicirt.

§. 147. Der Factor v muß seiner Definition zufolge so beschaffen sein, daß der Ausdruck $v(\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy)$ ein genaues Differenzial wird, und folglich der Gleichung:

$$\frac{d.\mathrm{M}v}{dy}=\frac{d.\mathrm{N}v}{dx}$$

genügt, woraus folgt, wenn man entwickelt:

$$M\frac{dv}{dy} - N\frac{dv}{dx} + \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) v = 0.$$

Diese letzte Gleichung, welche die beiden partiellen Ableitungen des Factors v enthält, ist fast immer schwieriger zu integriren, als die gegebene Gleichung selbst, so daß sie nur in einigen besondern Fällen zur Kenntniß dieses Factors führen kann. Wir wollen z. B. annehmen, daß in dieser auf die Form:

$$\frac{1}{v}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{M}{N}\frac{dv}{dy}\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)$$

gebrachten Gleichung der zweite Theil eine Function X von x allein sei, so muß es auch der erste Theil sein. Dieses findet aber statt, wenn man den Factor v als eine Function von x allein betrachtet und setzt:

$$\frac{dv}{v} = X dx, \quad v = e^{\int X dx}.$$

Dieses ist also in dem gegenwärtigen Falle der integrirende Factor oder der Factor, welcher den Ausdruck $Mdx + Ndy$ zu einem genauen Differenziale macht. Eben so fände man für v den Werth $e^{\int Y dy}$, wenn der Ausdruck:

$$\frac{1}{M}\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right)$$

eine Function Y von y allein wäre.

Zuweilen gelangt man auch zur Bestimmung den Factors v, wenn man den Ausdruck $Mdx + Ndy$ in zwei andere:

$$(M_1 dx + N_1 dy) + (M_2 dx + N_2 dy)$$

zerlegt, welche so gewählt sind, daß man unmittelbar zwei Factoren v_1 und v_2 angeben kann, welche diese beiden letzten Ausdrücke zu genauen Differenzialen machen und die Gleichungen:

$$v_1 (M_1 dx + N_1 dy) = du_1, \quad v_2 (M_2 dx + N_2 dy) = du_2$$

erfüllt werden; denn alsdann machen auch die Factoren:

$$V_1 = v_1 \varphi_1 (u_1), \quad V_2 = v_2 \varphi_2 (u_2)$$

diese Ausdrücke integrabel, und man braucht offenbar die Functionen $\varphi_1 (u_1)$, $\varphi_2 (u_2)$ nur so zu wählen, daß man hat:

$$v_1 \varphi_1 (u_1) = v_2 \varphi_2 (u_2) = v,$$

um den Factor v zu erhalten, welcher den Ausdruck $Mdx + Ndy$ zu einem genauen Differenziale macht.

Beispiel Es sei:

$$aydx + bxdy + x^m y^n (hydx + kxdy) = 0.$$

Setzt man:

$$M_1 = ay, \quad N_1 = bx, \quad M_2 = hx^m y^{n+1}, \quad N_2 = kx^{m+1} y^n,$$
$$M_1 dx + N_1 dy = aydx + bxdy,$$
$$M_2 dx + N_2 dy = x^m y^n (hydx + kxdy),$$

so kann man setzen:

$$v_1 = \frac{1}{xy},\ v_2 = \frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}};$$

denn man findet alsdann:

$$\frac{1}{xy}(aydx + bxdy) = a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} = dl.x^a y^b,$$

$$u_1 = l.x^a y^b,$$

$$\frac{x^m y^n}{x^{m+1}y^{n+1}}(hydx + kxdy) = h\frac{dx}{x} + k\frac{dy}{y} = dl.x^h y^k,$$

$$u_2 = l.x^h y^k$$

und die Ausdrücke:

$$v_1\varphi(u_1) = \frac{1}{xy}\varphi_1(x^a y^b),\quad v_2\varphi(u_2) = \frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}\varphi_2(x^h y^k)$$

werden einander gleich, wenn man, nachdem:

$$\varphi_1(x^a y^b) = x^{a\alpha}y^{b\alpha},\quad \varphi_2(x^h y^k) = x^{\beta h}y^{\beta k}$$

gesetzt ist, hat:

$$a\alpha - 1 = \beta h - m - 1,\quad b\alpha - 1 = \beta k - n - 1,$$

woraus folgt:

$$\alpha = \frac{nh - mk}{ak - ah},\quad \beta = \frac{an - mb}{ak - bh}$$

und:

$$v = \frac{1}{xy}(x^a y^b)^{\frac{nh - km}{ak - bh}}.$$

§. 148. Wir wollen nun die vorhergehenden Principien auf die lineare und auf die homogene Differenzialgleichung der ersten Ordnung anwenden.

Die lineare Differenzialgleichung der ersten Ordnung ist diejenige, worin die abhängige Veränderliche y und ihre Ableitung y' weder in einander multiplicirt, noch zu höhern Potenzen, als die erste erhoben sind, oder diejenige Gleichung, deren erster Theil eine lineare Function der Größen y und $y' = \frac{dx}{dy}$ ist. Die allgemeinste Form dieser Gleichung ist:

$$y'\varphi(x) + y\chi(x) + \psi(x) = 0$$

oder:

$$\varphi(x)\,dy + [y\chi(x) + \psi(x)]\,dx = 0,$$

und wenn man setzt:

$$\frac{\chi(x)}{\varphi(x)} = \mathrm{F}(x),\quad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = f(x),$$

so verwandelt sie sich in folgende:

$$dy + yF(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Wir haben sie unter dieser Form bereits integrirt, indem wir $y = zt$ setzten; aber man gelangt dazu vielleicht einfacher, wenn man zunächst annimmt, daß $f(x) = 0$ sei, wodurch sich die Gleichung auf:

$$dy + yF(x)\,dx = 0$$

reducirt und in die beiden andern:

$$\frac{dy}{y} + F(x)\,dx = 0, \quad y = 0$$

zerfällt, so daß: $\quad ly + \int F(x)\,dx = C,$

oder: $\quad y = Ce^{-\int F(x)\,dx}$

das allgemeine, und $y = 0$ ein particuläres Integral derselben ist, welches man erhält, wenn man $C = 0$ setzt.

Wir wollen $C = 1$ setzen, und mit y_1 den Ausdruck:

$$e^{-\int F(x)\,dx}$$

bezeichnen, so ist $y = Cy_1$ das allgemeine Integral, und um auf den Fall zurückzukommen, wo $f(x)$ nicht Null ist, wollen wir für die Constante C eine neue Veränderliche z setzen, welche so gewählt ist, daß der Werth:

$$y = zy_1 = ze^{-\int F(x)\,dx}$$

der gegebenen Differenzialgleichung:

$$dy + yF(x)\,dx = f(x)\,dx$$

genügt. Wenn man nun in dieser Gleichung für y den Werth zy_1 setzt, und bemerkt, daß:

$$dy_1 + y_1F(x)\,dx = 0$$

ist, weil y_1 ein particuläres Integral der Gleichung:

$$dy + yF(x)\,dx = 0$$

ist; so findet man:

$$y_1\,dz = f(x)\,dx,$$

folglich:

$$dz = \frac{f(x)}{y_1}\,dx = e^{\int F(x)\,dx} f(x)\,dx,$$

und mithin:

$$z = C + \int e^{\int F(x)\,dx} f(x)\,dx.$$

Das allgemeine Integral der linearen Differenzialgleichung ist folglich:

$$y = e^{-\int F(x)\,dx}\left[C + \int e^{\int F(x)\,dx} f(x)\,dx\right],$$

wie wir bereits wußten, oder einfacher:

$$y = e^{-\int F(x)\,dx} \int e^{\int F(x)\,dx} f(x)\,dx.$$

Beispiele. Die allgemeinen Integrale der Differenzialgleichungen:

$$dy - y\,dx = e^x dx, \quad dy + y\,dx = e^x dx$$

sind resp.:

$$y = (x + C)\,e^x, \quad y = \tfrac{1}{2} e^x + Ce^{-x}$$

Dieselbe lineare Differenzialgleichung kann man auch integriren, wenn man den Factor bestimmt, welcher die beiden Theile derselben zu genauen Differenzialen macht. Betrachtet man zunächst die Gleichung:

$$dy + yF(x)\,dx = 0,$$

so wird sie durch Multiplication mit dem Factor $v = \frac{1}{y}$, welcher nur die Veränderliche y enthält, integrabel gemacht, und man findet alsdann:

$$u = \mathrm{l}\,y + \int F(x)\,dx = \mathrm{l}\left[y e^{\int F(x)\,dx}\right].$$

Die verschiedenen Factoren, welche den ersten Theil der Gleichung:

$$dy + y\,F(x)\,dx = 0$$

zu einem genauen Differenziale machen können, sind folglich von der Form:

$$v_\varphi(u) = \frac{1}{y}\varphi\left[\mathrm{l}\,y + \int F(x)\,dx\right].$$

Es ist wohl zu bemerken, daß unter diesen integrirenden Factoren einer vorkommt, welcher blos die Veränderliche x enthält, nämlich der, welchen man erhält, wenn man setzt:

$$\varphi(u) = e^u = y e^{\int F(x)\,dx}$$

und welcher sich auf $e^{\int F(x)\,dx}$ reducirt. Dieser von y unabhängige Factor macht auch die vollständige lineare Differenzialgleichung:

$$dy + y\,F(x)\,dx = f(x)\,dx$$

integrabel; denn wenn man ihre beiden Theile mit $e^{\int F(x)\,dx}$ multiplicirt, so findet man:

$$e^{\int F(x)\,dx} dy + yF(x)\,e^{\int F(x)\,dx} dx = e^{\int F(x)\,dx} f(x)\,dx$$

oder:

$$d\left[y e^{\int F(x)\,dx}\right] = e^{\int F(x)\,dx} f(x)\,dx,$$
$$y e^{\int F(x)\,dx} = \int f(x)\,e^{\int F(x)\,dx}\,dx,$$
$$y = e^{-\int F(x)\,dx} \int f(x)\,e^{\int F(x)\,dx}\,dx.$$

Beiſpiel 1. Es ſei:

$$dy + ydx = ax^n dx$$

die gegebene Differenzialgleichung, wo n eine ganze Zahl bezeichnet; ſo iſt das allgemeine Integral derſelben:

$$y = Ce^{-x} + x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \text{etc.},$$

und wenn man $C = 0$ ſetzt, ſo erhält man ein particuläres algebraiſches Integral derſelben.

Beiſpiel 2. Es ſei:

$$(1-x^2)dy + xydx = adx,$$

ſo iſt:

$$y = ax + C\sqrt{1-x^2}.$$

Beiſpiel 3. Es ſei:

$$dy + \frac{nydx}{\sqrt{1-x^2}} = adx,$$

ſo iſt:

$$y = C(\sqrt{1+x^2} - x)^n + \frac{na}{n^2-1}\sqrt{1+x^2} - \frac{ax}{n^2-1}.$$

Die Differenzialgleichung:

$$dy + yF(x)dx = f(x)y^{n+1}dx$$

läßt ſich unmittelbar auf eine lineare Differenzialgleichung zurückführen; denn man braucht zu dem Zwecke nur zu ſetzen:

$$\frac{1}{y^n} = z,$$

ſo erhält man in der That auf dieſe Weiſe:

$$\frac{-ndy}{y^{n-1}} = dz, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dz}{nz},$$

$$\frac{-dz}{nz} + F(x)dx = \frac{f(x)dz}{z},$$

$$dz - nF(x)zdx = -nf(x)dx,$$

$$z = \frac{1}{y^n} = -e^{n\int F(x)dx}\int e^{-n\int F(x)dx} f(x)dx.$$

§. 149. Die Differenzialgleichung der erſten Ordnung:

$$Mdx + Ndy = 0$$

iſt homogen, wenn die mit M und N bezeichneten Functionen x, y homogen und von demſelben Grade ſind, ſo daß man ha

$$M = x^a\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad N = x^a\chi\left(\frac{y}{x}\right).$$

In dieſer Vorausſetzung verwandelt ſich die gegebene Differ- gleichung in folgende:

$$x^a\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + x^a\chi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0,$$

und man braucht dieſe letzte Gleichung nur durch das Product $x^a\chi\left(\frac{y}{x}\right)$ zu dividiren, um ſie auf die folgende:

$$dy + f\left(\frac{y}{x}\right)dx = 0$$

zurückführen, welche wir vermittelſt der Subſtitution $y = xz$ integrirt haben. Man kann übrigens dieſe Subſtitution unmittelbar auf die Gleichung:

$$x^a\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + x^a\chi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$$

anwenden, welche alsdann in die beiden andern:

$$\frac{dx}{x} + \frac{\chi(z)\,dz}{\varphi(z) + z\chi(z)} = 0, \quad x^{a+1}[\varphi(z) + z\chi(z)] = 0$$

zerfällt, wovon die eine ſich unmittelbar integriren läßt und das allgemeine Integral:

$$lx + \int\frac{\chi(z)\,dz}{\varphi(z) + z\chi(z)} = C, \text{ oder } lx + \int\frac{N\,dy}{Mx + Ny} = C$$

giebt, während ſich aus der andern particuläre, oder ſinguläre Integrale von der Form $z = m$ oder $y = mx$ ergeben, wo m eine Wurzel der Gleichung:

$$\varphi(z) + z\chi(z) = 0$$

iſt.

Beiſpiel. Wir wollen annehmen, daß ſich M und N auf homogene Functionen des erſten Grades reduciren, ſo daß man hat:

$$M = Ax + By, \quad N = Cx + Dy;$$

ſo iſt die Differenzialgleichung:

$$(Ax + By)\,dx + (Cx + Dy)\,dy = 0$$

Setzt man $y = xz$, ſo verwandelt ſie ſich in folgende:

$$x^2\left\{[A + (B + C)z + Dz^2]\frac{dx}{x} + (C + Dz)\,dz\right\} = 0$$

und zerfällt in die beiden andern Differenzialgleichungen:

$$\frac{dx}{x} + \frac{(C + Dz)\,dz}{A + (B + C)z + Dz^2} = 0,$$

$$x^2[A + (B + C)z + Dz^2] = 0.$$

Es ſeien nun:

$$a = \frac{1}{2D}[-B - C + \sqrt{(B + C)^2 - 4AD}],$$

$$b = \frac{1}{2D}[-B - C - \sqrt{(B + C)^2 - 4AD}]$$

die beiden Wurzeln der Gleichung:

$$A+(B+C)z+Dz^2=0,$$

und wir wollen annehmen, daß man durch die Zerlegung des Bruches:

$$\frac{C+Dz}{A+(B+C)z+Dz^2}$$

in einfache Brüche gefunden habe:

$$\frac{C+Dz}{A+(B+C)z+Dz^2}=\frac{m}{z-a}+\frac{n}{z-b},$$

wo die Größe m und n durch die Gleichungen:

$$m+n=1,\quad mb+na=-\frac{C}{D}$$

bestimmt werden, wovon die zweite durch eine der beiden folgenden:

$$m-n=\frac{C-B}{\sqrt{(B+C)^2-4AD}},$$

$$mn=\frac{BC-AD}{(B+C)^2-4AD}$$

ersetzt werden kann; so reducirt sich die Gleichung:

$$\frac{dx}{x}+\frac{(C+Dz)\,dz}{A+(B+C)z+Dz^2}=0$$

auf:

$$\frac{dx}{x}+\frac{m\,dz}{z-a}+\frac{n\,dz}{z-b}=0,$$

und ihr allgemeines Integral ist:

$$lx+m\,l(z-a)+n\,l(z-b)=C$$

oder:

$$x(z-a)^m(z-b)^n=C.$$

Setzt man für z seinen Werth $\frac{y}{x}$ wieder und berücksichtigt die Gleichung $m+n=1$; so erhält man das allgemeine Integral:

$$(y-ax)^m(y-bx)^n=C.$$

Aus der Gleichung:

$$x^2[A+(B+C)z+Dz^2]=0$$

folgt ferner $z=a$, $z=b$, oder was dasselbe ist, $y=ax$, $y=bx$. Diese beiden Werthe sind offenbar particuläre Integrale, wofern eine der Constanten m, n verschwindet. In diesem letzten Falle giebt die Gleichung:

$$mn=\frac{BC-AD}{(B+C)^2-4AD}$$

$BC - AD = 0$, woraus folgt:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = k,$$

wo k eine neue Conſtante bezeichnet. Die gegebene Differenzialgleichung verwandelt ſich alſo in folgende:

$$(Cx + Dy)(dy + k dx) = 0,$$

welche in die beiden andern:

$$dy + k dx = 0, \quad Cx + Dy = 0,$$

zerfällt. Das allgemeine Integral iſt alsdann:

$$y + kx = C$$

und der Werth $y = -\frac{C}{D}x$ iſt ein ſinguläres Integral, wofern man nicht identiſch hat:

$$k = -\frac{C}{D}.$$

§. 150. Wenn man für M und N zwei beliebige lineare Functionen der Veränderlichen x, y, wie:

$$Ax + By + E,$$

und:

$$Cx + Dy + F$$

nähme, ſo wäre die Differenzialgleichung:

$$(Ax + By + E)dx + (Cx + Dy + F)dy = 0,$$

welche auf die Form:

$$(A\xi + B\eta)d\xi + (C\xi + D\eta)d\eta = 0$$

zurückgeführt wird, wenn man ſetzt:

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta,$$

wo ξ, η zwei neue Veränderliche und α, β zwei Conſtanten bezeichnen, welche durch die Gleichungen:

$$A\alpha + B\beta + E = 0,$$
$$C\alpha + D\beta + F = 0$$

beſtimmt werden. Dieſen beiden letzten Gleichungen kann man aber immer durch endliche Werthe der Conſtanten α, β genügen, wofern die Größen A, B, C, D nicht der Bedingung $\frac{A}{C} = \frac{B}{D} = k$ genügen. In dieſem beſondern Falle reducirt ſich die gegebene Differenzialgleichung auf:

$$(Cx + Dy)(dx + k dy) + E dx + F dy = 0,$$

und man braucht nur z für $Cx + Dy$ zu ſetzen, um die transformirte Gleichung:

$$[(D - kC)z + DE - CF]dx + (kz + F)dz = 0$$

zu erhalten, worin man die Veränderlichen trennen kann, wenn man den ersten Theil durch das Polynom:

$$(D - kC)z + DE - CF$$

dividirt. Durch dieselbe Substitution kann man die Trennung der Veränderlichen in jeder Gleichung von der Form:

$$dy = f(Cx + Dy)\,dx$$

bewerkstelligen.

Beispiel 1. Es sei:

$$x\,dx + y\,dy = m y\,dx,$$

so ist: 1) wenn $m > 2$ oder $m = a + \frac{1}{a}$ ist:

$$\left(\frac{ay - a^2x}{ay - x}\right)^{\frac{a^2+1}{2(a^2-1)}} \sqrt{x^2 - mxy + y^2} = C;$$

2) wenn $m = 2$ ist, so ist:

$$l(x - y) = C - \frac{x}{x - y},$$

und 3) wenn $m < 2$ oder $m = 2\cos\alpha$ ist:

$$l\sqrt{x^2 - mxy + y^2} = C - \cot\alpha \operatorname{arc\,tang} \frac{y \sin\alpha}{x - y\cos\alpha}.$$

Beispiel 2. Es sei:

$$x\,dx + y\,dy = x\,dy - y\,dx,$$

so ist:

$$l\sqrt{x^2 + y^2} = C + \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}.$$

Beispiel 3. Es sei:

$$x\,dy - y\,dx = dx\sqrt{x^2 + y^2},$$ so ist $x^2 = C^2 + 2Cy$.

Vier und zwanzigste Vorlesung.

Integration durch Differenzirung oder durch Substitution der Ableitung y' für die unbekannte Function y.

---

§. 151. Wenn eine für y aufgelöste Differenzialgleichung der ersten Ordnung unter der Form:

$$y = \mathbf{F}(x, y')$$

erscheint, so braucht man diese Gleichung nur zu differenziren, um sie durch Substitution der Ableitung y' für die unbekannte Function y zu integriren. Verfährt man auf diese Weise, so findet man:

$$y'dx = \mathbf{D}_x\mathbf{F}(x, y')dx + \mathbf{D}_{y'}\mathbf{F}(x, y')dy',$$

oder:

$$[\mathbf{D}_x\mathbf{F}(x, y') - y']dx + \mathbf{D}_{y'}\mathbf{F}(x, y')dy' = 0.$$

Wenn man nun durch irgend ein Verfahren das allgemeine Integral und die singulären Integrale dieser letzten Gleichung bestimmen kann, so braucht man nur noch y' zwischen diesen Integralen und der gegebenen Gleichung:

$$y = \mathbf{F}(x, y')$$

zu eliminiren, um das allgemeine Integral und die singulären Integrale dieser letzten Gleichung zu erhalten.

§. 152. Unter den verschiedenen Formen, welche man der Function $\mathbf{F}(x, y')$ geben kann, sind besonders die zu beachten, welche die Gleichung:

$$[\mathbf{D}_x\mathbf{F}(x, y') - y']dx + \mathbf{D}_{y'}\mathbf{F}(x, y')dy' = 0$$

linear und homogen machen. Soll aber diese letzte Gleichung in Beziehung auf die Unbekannte y' und ihr Differenzial dy' linear werden, so ist zunächst erforderlich, daß der Coefficient von dy', nämlich $\mathbf{D}_{y'}\mathbf{F}(x, y')$ sich auf eine Function $f(x)$ der einen Veränderlichen x reducirt, d. h., man muß folgende Gleichung:

$$\mathbf{D}_{y'}\mathbf{F}(x, y') = f(x), \text{ oder } \frac{d\mathbf{F}(x, y')}{dy'}dy' = f(x)dy'$$

haben. Wenn man die beiden Theile dieser letzten Gleichung von $y' = 0$ an integrirt und mit $\mathbf{F}(x)$ den $y' = 0$ entsprechenden Werth von $\mathbf{F}(x, y')$ bezeichnet, so findet man:

$$F(x,y') - F(x) = y' f(x)$$

und folglich:

$$F(x,y') = F(x) + y' f(x).$$

Wenn man diesen allgemeinen Werth von $F(x, y')$ anwendet, so reducirt sich die Gleichung:

$$[D_y F(x,y') - y'] dx + D_{y'} F(x,y') dy' = 0$$

in der That auf eine lineare Differenzialgleichung; aber man muß bemerken, daß sich die gegebene Gleichung in dieser Voraussetzung auf die folgende:

$$y = F(x) + y' f(x),$$

oder:

$$y dx = F(x) dx + f(x) dy$$

reducirt, also selbst linear wird, und folglich die Substitution der Ableitung y' für die Veränderliche y überflüssig wird. Wenn die Gleichung:

$$[D_x F(x,y') - y'] dx + D_{y'} F(x,y') dy' = 0$$

nicht in Beziehung auf y' und dy', sondern in Beziehung auf x und dx linear werden sollte, so müßte man zunächst annehmen, daß sich $D_x F(x,y')$ auf eine Function $f(y')$ der einen Veränderlichen y' reducirte, so daß man die Gleichung:

$$D_x F(x,y') = f(y')$$

erhielte, dann ihre beiden Theile von $x = 0$ an integriren, und wenn man alsdann den $x = 0$ entsprechenden Werth von $F(x,y')$ mit $F(y')$ bezeichnet; so findet man:

$$F(x,y') - F(y') = x f(y'),$$

oder:

$$F(x,y') = F(y') + x f(y').$$

Wenn man diesen Werth von $F(x, y')$ anwendet, so wird die Gleichung:

$$[D_x F(x,y') - y'] dx + D_{y'} F(x,y') = 0$$

wirklich in Beziehung auf x und dx linear, läßt sich auf folgende Form bringen:

$$[f(y') - y'] dx + x f'(y') dy' + F'(y') dy' = 0$$

und ihr allgemeines Integral ist:

$$x = e^{-\int \frac{f'(y')\,dy'}{f(y') - y'}} \left[C - \int F'(y') e^{\int \frac{f'(y')\,dy'}{f(y') - y'}} dy' \right].$$

In derselben Voraussetzung verwandelt sich die gegebene Differenzialgleichung in folgende:

$$y = F(y') + x f(y')$$

und um ihr allgemeines Integral zu erhalten, braucht man nur y' zwiſchen den beiden letzten Gleichungen zu eliminiren.

In dem beſondern Falle, wo man $f(y')=y'$ ſetzt, reduciren ſich die gegebene Gleichung und die durch die Subſtitution von y' für y erhaltene transformirte Gleichung reſp. auf:

$$y=xy'+\mathrm{F}(y'),\ 0=[x+\mathrm{F}'(y')]dy'$$

und um die zweite zu erhalten, braucht man wieder nur die erſte in Beziehung auf x zu differenziren. Dieſe zweite Gleichung zerfällt ferner in die beiden andern:

$$dy'=0,\ x+\mathrm{F}'(y')=0,$$

welche ihr allgemeines Integral $y'=C$ und ihre ſingulären Integrale geben. Subſtituirt man den Werth $y'=C$ in die gegebene Gleichung, ſo erhält man für das geſuchte allgemeine Integral:

$$y=Cx+\mathrm{F}(C)$$

und wenn man y' zwiſchen den Gleichungen:

$$y=xy'+\mathrm{F}(y'),\ x+\mathrm{F}'(y')=0$$

eliminirt; ſo erhält man die ſingulären Integrale der gegebenen Differenzialgleichung.

Beiſpiel. Das allgemeine Integral der Differenzialgleichung $y=xy'-y'^2$ iſt $y=Cx+C^2$ und das ſinguläre Integral derſelben iſt $y=\frac{x^2}{4}$.

§. 153. Wir wollen wieder die Gleichung:

$$[\mathrm{D}_x\mathrm{F}(x,y')-y']dx+\mathrm{D}_{y'}\mathrm{F}(x,y')dy'=0$$

betrachten. Soll ſie homogen ſein, ſo iſt erforderlich, aber auch hinreichend, daß die beiden Functionen:

$$\mathrm{D}_x\mathrm{F}(x,y')-y',\ \mathrm{D}_{y'}\mathrm{F}(x,y')$$

homogen und von demſelben Grade ſind. Bezeichnet man dieſen Grad mit a, ſo erhält man:

$$\mathrm{D}_{y'}\mathrm{F}(x,y')=x^a f\left(\frac{y'}{x}\right).$$

Wenn man die beiden Theile dieſer letzten Gleichung in Beziehung auf y integrirt und mit $\mathrm{F}(x)$ wieder den $y'=0$ entſprechenden Werth von $\mathrm{F}(x,y')$ bezeichnet; ſo findet man:

$$\mathrm{F}(x,y')=\mathrm{F}(x)+x^{a+1}\int_0^{y'} f\left(\frac{y'}{x}\right)\frac{dy'}{x},$$

woraus folgt, wenn man in Beziehung auf x differenzirt:

$$\mathrm{D}_x\mathrm{F}(x,y')=\mathrm{F}'(x)+x^a\int_0^{y'}\left[af\left(\frac{y'}{x}\right)-\frac{y'}{x}f'\left(\frac{y'}{x}\right)\frac{dy'}{x}\right],$$

und mithin:

$$\mathrm{D}_x\mathrm{F}(x,y')-y'$$
$$=x^a\left\{\frac{\mathrm{F}'(x)-y'}{x^a}+\int_0^{y'}\left[af\left(\frac{y'}{x}\right)-\frac{y'}{x}f'\left(\frac{y'}{x}\right)\right]\frac{dy'}{x}\right.$$

Soll nun die Differenz $D_x F(x, y') - y'$ auch eine homogene Function des a^{ten} Grades sein, so muß der Coefficient von x^a im zweiten Theile der letzten Gleichung blos von dem Verhältnisse $\frac{y'}{x}$ abhängen, und da das Integral:

$$\int_0^{y'} \left[af\left(\frac{y'}{x}\right) - \frac{y'}{x} f'\left(\frac{y'}{x}\right)\right] \frac{dy'}{x}$$

dieser Bedingung genügt; so muß das Glied $\frac{F'(x) - y'}{x^a}$ derselben auch genügen, wozu erforderlich, aber auch hinreichend ist, daß man zugleich hat:

$$a = 1, \; F'(x) = bx,$$

oder was auf dasselbe hinausläuft:

$$a = 1, \text{ und } F(x) = \tfrac{1}{2} bx^2 + C,$$

wo b und C zwei constante Größen sind, welche auch Null sein können. Soll also die Substitution von y' für y in die gegebene Gleichung auf eine homogene Gleichung führen, so ist erforderlich, daß sich der Werth von $F(x, y')$ auf:

$$F(x, y') = \left[\tfrac{1}{2} b + \int_0^{y'} F\left(\frac{y'}{x}\right) \frac{dy'}{x}\right] x^2 + C$$

reducirt, d. h. der Ausdruck von $F(x, y')$ muß eine homogene Function des zweiten Grades, oder einer solchen um eine constante Größe vermehrten Function gleichbedeutend sein. Umgekehrt, wenn $F(x, y')$ auf die eben angegebene Weise bestimmt ist, so ist die durch die Differenzirung erhaltene transformirte Gleichung homogen, und wenn man sie integrirt, so ergiebt sich daraus unmittelbar das allgemeine Integral, oder die singulären Integrale der gegebenen Gleichung.

Beispiel. Es sei:

$$F(x, y') = \tfrac{1}{4}(x^2 + y'^2), \; y = \tfrac{1}{4}(x^2 + y'^2),$$

so ergiebt sich durch Differenzirung:

$$y'dx = \tfrac{1}{2}(xdx + y'dy'), \; (x - 2y')dx + y'dy' = 0,$$

und wenn man diese letzte Gleichung integrirt, so findet man:

$$(x - y')\, e^{\frac{x}{x-y'}} = C.$$

Das allgemeine Integral der Gleichung:

$$y = \tfrac{1}{4}(x^2 + y'^2)$$

ist folglich:

$$(x \pm \sqrt{4y - x^2})\, e^{\frac{x}{x \pm \sqrt{4y - x^2}}} = C.$$

Fünf und zwanzigste Vorlesung.

Verfahren, durch welches man aus dem allgemeinen Integrale gewisse singuläre Integrale ableiten kann. — Bestimmung der in dem allgemeinen Integrale vorkommenden Constante.

---

§. 154. Es sei $F(x, y, C)$ eine Function der Veränderlichen x, y und der Constante C, so muß man, um eine Differenzialgleichung zu erhalten, welche die endliche Gleichung:

$$F(x, y, C) = 0$$

zum allgemeinen Integrale hat, die Constante C zwischen dieser Gleichung und ihrer Ableitung:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$$

eliminiren, und es kommt darauf an, zu wissen, ob diese letzte Gleichung Auflösungen gestattet, welche in dem allgemeinen Integrale nicht enthalten sind. Nun läßt sich aber jede Gleichung zwischen x und y auf folgende Form bringen:

$$F[x, y, \varphi(x, y)] = 0,$$

wo $\varphi(x, y)$ eine gewisse Function von x, y und F wieder dieselbe Function, wie weiter oben bezeichnet, worin aber für die Constante C die Function $\varphi(x, y)$ gesetzt ist. Man kann also annehmen, daß die singulären Auflösungen, wenn es deren giebt, alle in der Gleichung:

$$F[x, y, \varphi(x, y)] = 0$$

enthalten sind, und es bleibt noch zu bestimmen übrig, von welcher Beschaffenheit die Function φ alsdann sein muß. Differenzirt man diese letzte Gleichung, so findet man:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = 0$$

und wenn der aus dieser Gleichung abgeleitete Werth von $\frac{dy}{dx}$ mit dem aus der Gleichung:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$$

abgeleiteten Werthe identiſch ſein, d. h. die Gleichung:

$$F\,[x,\ y,\ \varphi\ (x,\ y)] = 0$$

ſelbſt ein ſinguläres, oder particuläres Integral der Gleichung:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0$$

ſein ſoll; ſo iſt es offenbar hinreichend, daß man habe:

$$\frac{\frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{dF}{dy}} = 0,$$

was auf mehrere Weiſen ſtatt finden kann:

1) Wenn $\frac{d\varphi}{dx} = 0$ iſt; aber alsdann iſt φ eine Conſtante, und da die Gleichung:

$$F\,[x,\ y,\ \varphi\ (x,\ y)] = 0$$

nur ein beſonderer Fall der Gleichung:

$$F\ (x,\ y,\ C) = 0$$

iſt; ſo iſt ſie blos ein particuläres Integral.

2) Wenn:

$$\frac{\frac{dF}{d\varphi}}{\frac{dF}{dy}} = 0$$

iſt, welcher Gleichung genügt wird, wenn man $\frac{dF}{d\varphi} = 0$, oder $\frac{dF}{dy} = \infty$ ſetzt. Man kann folglich ſinguläre Integrale erhalten, wenn man die Function φ zwiſchen den Gleichungen:

$$F[x, y, \varphi\ (x, y)] = 0,\ \frac{dF}{d\varphi} = 0,$$

oder:

$$F[x, y, \varphi\ (x, y)] = 0,\ \frac{dF}{dy} = \infty,$$

d. h. die Conſtante C zwiſchen den Gleichungen:

$$F(x, y, C) = 0,\ \frac{dF}{dC} = 0,$$

oder:

$$F(x, y, C) = 0,\ \frac{dF}{dy} = \infty$$

eliminirt. Soll jedoch eine ſich aus dieſer Elimination ergebende Gleichung wirklich ein ſinguläres Integral ſein, ſo iſt erforderlich, daß der für φ gefundene Werth der Gleichung:

$$\frac{\frac{dF}{d\varphi}}{\frac{dF}{dy}} = 0,$$

d. h. der gegebenen Differenzialgleichung genügt, und daß sich diese Gleichung nicht aus dem allgemeinen Integrale $F(x, y, C) = 0$ ableiten läßt, wenn man der Constante C einen besondern Werth beilegt.

§. 155. Zwischen dem allgemeinen Integrale und dem singulären findet eine sehr merkwürdige geometrische Beziehung statt; denn wenn man die Methode, welche die singulären Integrale giebt, mit der, welche die Umhüllungslinien giebt, vergleicht, so sieht man unmittelbar, daß das singuläre Integral die Umhüllungscurve der durch die particulären Integrale ausgedrückten umhüllten Curven darstellt.

Beispiel 1. Betrachten wir die Gleichung:

$$dy = \pm 2y^{\frac{1}{2}}dx,$$

oder:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \pm dx,$$

so ist $y = (x+C)^2$ ihr allgemeines Integral, und man hat:

$$\frac{dF}{dC} = x + C.$$

Eliminirt man C zwischen den beiden Gleichungen:

$$y = (x+C)^2,\ x+C = 0,$$

so findet man $y = 0$, und diese letzte Gleichung ist das singuläre Integral der gegebenen Gleichung. In dem gegenwärtigen Falle kann man nicht $\frac{dF}{dy} = \infty$ setzen, weil $\frac{dF}{dy} = 1$ ist.

Beispiel 2. Die Gleichung $y = C(x+C)^2$ genügt der Gleichung:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 8y^2 - 4xy\frac{dy}{dx}$$

und ist das allgemeine Integral derselben. Nun hat man aber:

$$\frac{dF}{dC} = (x+C)^2 + 2(x+C)C = 0,$$

woraus folgt:

$$C = -x,\ C = -\frac{x}{3}.$$

Substituirt man den ersten dieser beiden Werthe in die Gleichung $y = C(x+C)^2$, so erhält man das particuläre Integral $y = 0$, welches auch einem Nullwerthe der Constante entspricht,

und der zweite Werth führt auf das singuläre Integral $y = -\frac{4}{27}x^3$.

Beispiel 3. Betrachten wir endlich die Differenzialgleichung:

$$y = xy' + f(y'),$$

deren allgemeines Integral, wie wir gesehen haben, folgendes ist:

$$y = Cx + f(C),$$

so hat man:

$$\frac{dF}{dC} = x + f'(C) = 0$$

und die Elimination von C zwischen diesen beiden Gleichungen giebt offenbar singuläre Integrale. Denn da die Ableitung y' eines beliebigen dieser Werthe durch das System der Gleichungen:

$$y = Cx + f(C),\ x + f'(C) = 0$$

oder durch die eine Gleichung:

$$x + f'(y') = 0$$

bestimmt wird, so ist sie nothwendig eine veränderliche Größe oder eine Function von x, während die Ableitung jedes particulären Integrales vermöge der Gleichung $y' = C$ eine constante Größe ist.

§. 156. Bei der vorhergehenden Methode der Bestimmung der singulären Integrale muß man das allgemeine Integral kennen; allein diese singulären Integrale oder Auflösungen haben Merkmale, vermöge welcher man sie unmittelbar aus der gegebenen Differenzialgleichung ohne alle Integration ableiten kann. Euler, Laplace, Lagrange und Poisson haben sich nach einander mit dieser Untersuchung beschäftigt, und insbesondere zu beweisen gesucht, daß das eigenthümliche Merkmal der singulären Auflösungen darin bestehe, den Differenzialcoefficienten $\frac{dy'}{dy}$ unendlich, oder unbestimmt zu machen. Diese Eigenschaft ist jedoch nicht so allgemein, als es die genannten großen Geometer geglaubt haben, und außerdem sind die bisjetzt bekannt gemachten Beweise von Reihenentwickelungen abhängig, deren Convergenz durch nichts bewiesen wird, und folglich haben diese Beweise bei weitem nicht die Strenge, welche wir hier verlangen. In einer der folgenden Vorlesungen werden wir sehen, wie Cauchy zu einer strengen Definition des Characters der singulären Auflösungen und zu einer scharfen Trennung derselben von den particulären Integralen gelangt ist.

§. 157. Da der Werth, welchen das allgemeine Integral $F(x, y, C) = 0$ für y giebt, außer der Veränderlichen x noch eine willkührliche Constante C enthält, so folgt, daß die Unbekannte y durch die Bedingung, der gegebenen Gleichung:

$$\mathbf{M}dx + \mathbf{N}dy = 0$$

zu genügen, nicht vollständig als Function von x bestimmt sein kann.

Da man der Constante C einen beliebigen Werth beilegen kann, so kann man die Unbekannte y einer zweiten Bedingung unterwerfen, z. B. der Bedingung, daß sie für einen gegebenen Werth x_0 der Veränderlichen x einen bestimmten Werth y_0 annimmt. Denn diese zweite Bedingung wird erfüllt, wenn man die Constante C durch die Gleichung:

$$F(x_0, y_0, C) = 0$$

bestimmt. Wenn man nun C zwischen den beiden Gleichungen:

$$F(x, y, C) = 0, \quad F(x_0, y_0, C) = 0$$

eliminirt, so enthält die resultirende Gleichung blos noch die Veränderlichen x, y und deren particuläre Werthe x_0, y_0 und giebt für y eine Function von x, welche den beiden vorhin ausgesprochenen Bedingungen zugleich genügen kann.

Wenn das allgemeine Integral unter der Form $u = C$ erscheint, wo u eine Function der Veränderlichen x, y ist, so wird die zweite Gleichung $u_0 = C$, wo u_0 den besondern Werth bezeichnet, welchen die Function u annimmt, wenn man darin $x = x_0$, $y = y_0$ setzt, und die Elimination der Constante C giebt die Gleichung $u = u_0$, welche in der That den erforderlichen Bedingungen genügt. Um diese Gleichung direct zu erhalten, braucht man nur zu bemerken, daß, wenn das allgemeine Integral $u = C$ der Gleichung:

$$M dx + N dy = 0$$

angehört, diese Gleichung sich in $du = 0$ verwandelt, wenn sie mit einem schicklichen Factor multiplicirt wird. Wenn man in dieser letzten Gleichung y als eine Function von x betrachtet und dann die beiden Theile derselben von $x = x_0$, $y = y_0$ an, d. h. so integrirt, daß sie für die Werthe x_0, y_0 von x, y verschwinden; so findet man:

$$u - u_0 = 0,$$

und folglich:

$$u = u_0.$$

Beispiel 1. Die Gleichung:

$$\varphi(x)\,dx + \chi(y)\,dy = 0$$

hat zum allgemeinen Integrale:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} \chi(y)\,dy = 0.$$

Beispiel 2. Wenn man mit den beiden Theilen der durch den Factor $\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$ multiplicirten Gleichung:

$$dy + y F(x)\,dx = f(x)\,dx$$

auf die vorhin angegebene Weise verfährt, so erhält man:

$$ye^{\int_{x_0}^{x} F(x)dx} - y_0 = \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} F(x)dx} f(x)\,dx,$$

und folglich:

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} F(x)dx}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} F(x)dx} f(x)\,dx\right].$$

Wenn $f(x) = 0$ ist, so hat man blos:

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} F(x)dx}.$$

Betrachten wir noch die Differenzialgleichung:

$$y = xy' + f(y'),$$

so ergiebt sich ihr allgemeines Integral, wie wir gesehen haben, aus der Gleichung $dy' = 0$. Bezeichnet man aber mit y'_0 den Werth von y', welcher dem Werthe x_0 von x entspricht; so ergiebt sich aus der Gleichung $dy' = 0$, wenn man ihre beiden Theile von $x = x_0$ an integrirt, $y' - y'_0 = 0$, oder was dasselbe ist, $dy = y'_0\,dx$. Verfährt man mit dieser letzten Gleichung ebenso, so findet man:

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0),$$

folglich:

$$y'_0 = y' = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

und wenn man für y' seinen Werth in die Gleichung:

$$y = xy' + f(y'),$$

substituirt:

$$\frac{y_0 x - x_0 y}{x - x_0} = f\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right).$$

Um die eben erhaltenen verschiedenen Integrale in allgemeine Integrale zu verwandeln, braucht man nur anzunehmen, daß, indem sich die eine der Größen x_0, y_0 auf eine bestimmte Zahl, z. B. auf Null, oder auf die Einheit reducirt, die andere sich in eine willkührliche Constante verwandelt. Gewöhnlich vereinfacht man diese Integrale, wenn man $x_0 = 0$ setzt. In dieser Voraussetzung reducirt sich z. B. das Integral der Gleichung:

$$y = xy' + f(y') \text{ auf } y_0 = f\left(\frac{y - y_0}{x}\right).$$

Alles bisher über die allgemeinen Integrale der Differenzialgleichungen Gesagte ist auf ihre singulären Integrale nicht anwendbar, weil diese keine willkührlichen Constanten enthalten, welche man so annehmen kann, daß neue Bedingungen erfüllt werden.

§. 158. Wenn man $\frac{M}{N} = -f(x,y)$ setzt, so verwandelt sich die Gleichung:

$$Mdx + Ndy = 0$$

in:

$$dy = f(x,y)\,dx.$$

Es sei ferner $y = F(x)$ ein Werth der Unbekannten y, welcher die doppelte Bedingung erfüllt, daß er der Gleichung:

$$dy = f(x,y)\,dx,$$

genügt und sich für $x = x_0$ auf y_0 reducirt; so hat man:

$$F'(x) = f[x, F(x)],\ y_0 = F(x_0).$$

Da $F(x)$ eine bestimmte Function der Veränderlichen x ist, so muß, wenn man dieser Veränderlichen einen neuen besondern Werth X beilegt, der entsprechende Werth von y auch eine bestimmte Größe sein. Bezeichnet man diese Größe mit Y und mit ϑ eine kleinere Zahl als die Einheit, so findet man $Y = F(X)$ und:

$$Y - y_0 = F(X) - F(x_0) = (X - x_0)\,F'[x_0 + \vartheta(X - x_0)]$$
$$= (X - x_0)\,f\{x_0 + \vartheta(X - x_0),\ F[x_0 + \vartheta(X - x_0)]\}.$$

Ebenso hat man, wenn $x_1, \ldots, x_{n-1}$, n Werthe von x bezeichnen, welche zwischen den Grenzen $x = x_0$, $x = X$ eine zunehmende Reihe bilden und $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ die entsprechenden Werthe von y sind:

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0)\,f\{x_0 + \vartheta_0(x_1 - x_0),\ F[x_0 + \vartheta_0(x_1 - x_0)]\},$$

$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)\,f\{x_1 + \vartheta_1(x_2 - x_1),\ F[x_1 + \vartheta_1(x_2 - x_1)]\},$$

. . . . . .

$$Y - y_{n-1} = (X - x_{n-1})\,f\{x_{n-1} + \vartheta_{n-1}(X - x_{n-1}),$$
$$F[x_{n-1} + \vartheta_{n-1}(X - x_{n-1})]\},$$

wo $\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots \vartheta_{n-1}$ ebenfalls kleinere Zahlen als die Einheit bezeichnen. In den zweiten Theilen dieser letzten Gleichungen sind die verschiedenen Elemente der Differenz $X - x_0$, nämlich:

$$x_1 - x_0,\ x_2 - x_1, \ldots,\ X - x_{n-1}$$

durch Coefficienten multiplicirt, welche resp. sehr wenig von den Größen:

$$f[x_0, F(x_0)],\ f[x_1, F(x_1)], \ldots, f[x_{n-1}, F(x_{n-1})],$$

oder von den Größen:

$$f(x_0, y_0),\ f(x_1, y_1), \ldots, f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

verschieden sind, wenn diese Elemente sehr kleine Werthe haben

und die Function $f[x, F(x)]$ zwischen den Grenzen x_0, X endlich und stetig bleibt. Wenn diese Bedingungen erfüllt werden, so hat man folglich nahezu:

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0),$$
$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) f(x_1, y_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Y - y_{n-1} = (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

und der wahre Werth von Y ist in dieser Voraussetzung sehr wenig von dem verschieden, welcher sich aus diesen letzten genäherten Gleichungen ergiebt, wenn man die Größen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ zwischen diesen Gleichungen eliminirt. Dieser Satz kann vermittelst der in der folgenden Vorlesung aufzustellenden Principien streng bewiesen werden, und für den Augenblick beschränken wir uns darauf, die Richtigkeit desselben in dem Falle darzuthun, wo sich die Differenzialgleichung auf folgende reducirt:

$$dy = yF(x)dx.$$

Wenn man in diesem besondern Falle die Integration so verrichtet, daß dem Werthe x_0 der Veränderlichen x der Werth y_0 der Veränderlichen y entspricht, so findet man:

$$y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} F(x)dx}.$$

Man hat folglich:

$$Y = y_0 e^{\int_{x_0}^{X} F(x)dx}$$

und:

$$y_1 = y_0[1 + (x_1 - x_0)F(x_0)],$$
$$y_2 = y_1[1 + (x_2 - x_1)F(x_1)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Y = y_{n-1}[1 + (X - x_{n-1})F(x_{n-1})],$$

und wenn man $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ zwischen diesen Gleichungen eliminirt:

$$Y = y_0[1 + (x_1 - x_0)F(x_0)][1 + (x_2 - x_1)F(x_1)] \ldots [1 + (X - x_{n-1})F(x_{n-1})],$$

$$lY = ly_0 + l[1 + (x_1 - x_0)F(x_0)] + l[1 + (x_2 - x_1)F(x_1)] \ldots + l[1 + (X - x_{n-1})F(x_{n-1})].$$

Ferner hat man, wenn a eine endliche Größe, α, ε, zwei unendlich kleine Größen und ϑ eine kleinere Zahl als die Einheit bezeichnen:

$$l(1 + a\alpha) = \frac{a\alpha}{1 + \vartheta a\alpha} = a(\alpha \pm \varepsilon),$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{l}[1+(x_1-x_0)\,\mathrm{F}(x_0)]+\mathrm{l}[1+(x_2-x_1)\,\mathrm{F}(x_1)]\ldots \\ &\qquad\qquad +\mathrm{l}[1+(\mathrm{X}-x_{n-1})\,\mathrm{F}(x_{n-1})] \\ &=(x_1-x_0)[\mathrm{F}(x_0)+\varepsilon_0]+(x_2-x_1)[\mathrm{F}(x_1)+\varepsilon_1]\ldots \\ &\qquad\qquad +(\mathrm{X}-x_{n-1})[\mathrm{F}(x_{n-1})+\varepsilon_{n-1}], \end{aligned}$$

wo $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ sehr kleine Zahlen bezeichnen. Da der zweite Theil dieser letzten Gleichung sehr wenig von dem bestimmten Integrale $\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}(x)\,dx$ verschieden ist, so folgt, daß sich der Werth von lX nahezu auf:

$$\mathrm{lY}=\mathrm{l}y_0+\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}(x)\,dx$$

und der entsprechende Werth von Y auf:

$$y_0\, e^{\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}(x)dx}$$

reducirt.

Sechs und zwanzigste Vorlesung.

Strenge Methode zur Nachweisung der Existenz eines Werthes von y, welcher einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung genügt, und zur Berechnung dieses Werthes mit einem gegebenen Grade von Annäherung.

---

§. 159. So oft sich die Differenzialgleichung:

$$dy = f(x, y)\, dx$$

durch eine der in den frühern Vorlesungen erörterten Methoden integriren läßt, ergiebt sich, wie wir gezeigt haben, für die Unbekannte y leicht eine Function von x, welche dieser Differenzialgleichung genügt und einen besondern, aber willkührlichen Werth y_0 annimmt, wenn man der Veränderlichen x einen gegebenen Werth x_0 beilegt. Umgekehrt läßt sich die Gleichung:

$$dy = f(x, y)\, dx$$

integriren und hat ein allgemeines Integral mit einer willkührlichen Constante, wenn man beweisen kann, daß es einen allgemeinen Werth von y giebt, welcher die beiden eben ausgesprochenen Bedingungen erfüllt. Diesen Zweck erreicht man aber in sehr vielen Fällen vermittelst der nun aufzustellenden Principien.

Es bezeichne X einen neuen besondern Werth von x und $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ seien Größen, welche zwischen den Grenzen x_0, X liegen und von der ersten bis zu der zweiten Grenze fortwährend zu- oder fortwährend abnehmen. Ferner wollen wir annehmen, daß man vermittelst der Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\ y_2 - y_1 &= (x_2 - x_1) f(x_1, y_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{Y} - y_{n-1} &= (\mathrm{X} - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

n entsprechende Werthe von y, nämlich $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, Y berechnet habe, so erhält man durch Elimination von $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ einen Werth für Y von der Form:

$$\mathrm{Y} = F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \mathrm{X}, y_0),$$

welcher sehr merkwürdige Eigenschaften hat. Addirt man zunächst alle diese Gleichungen zusammen, so erhält man:

$$Y - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) + (x_2 - x_1) f(x_1, y_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Nun ist aber die Summe im zweiten Theile dieser letzten Gleichung gleich dem Producte aus der Summe der Differenzen $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, X - x_{n-1}$ oder $X - x_0$ und aus einer Mittelgröße zwischen den Coefficienten:

$$f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), \ldots,$$

und wenn man den absoluten Werth des größten dieser Coefficienten mit A bezeichnet; so wird dieser Mittelwerth nothwendig durch einen Ausdruck von der Form $\pm \Theta A$ ausgedrückt, wo Θ eine kleinere Zahl als die Einheit bezeichnet. Man hat folglich:

$$Y - y_0 = \pm \Theta A (X - x_0),$$

$$Y = y_0 \pm \Theta A (X - x_0),$$

und hieraus folgt, daß der Werth von Y nothwendig zwischen den Grenzen $y_0 \pm A(X - x_0)$ liegt. Ebenso ergiebt sich, daß die Größen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ resp. zwischen den Grenzen:

$$y_0 \pm A(x_1 - x_0), y_0 \pm A(x_2 - x_1), \ldots, y_0 \pm A(x_{n-1} - x_{n-2})$$

liegen, und folglich reduciren sich alle diese Größen, sowohl als Y, auf Ausdrücke von der Form:

$$y_0 \pm \Theta A (X - x_0).$$

Hieraus folgt, daß die Coefficienten:

$$f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), \ldots, f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

besondere Werthe des Ausdruckes:

$$f[x_0 + \vartheta(X - x_0), y_0 \pm \Theta A (X - x_0)]$$

sind, welche zwischen 0 und 1 liegenden Werthen von ϑ und Θ entsprechen. Nun wollen wir annehmen, daß der größte und kleinste der in Rede stehenden Coefficienten resp. den Werthen:

$$\vartheta = \vartheta_0, \pm\Theta = \Theta_0; \quad \vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon, \pm\Theta = \Theta_0 + \varepsilon'$$

entsprechen, so kann jede zwischen diesen beiden Coefficienten oder zwischen:

$$f[x_0 + \vartheta_0 (X - x_0), y_0 + \Theta_0 A (X - x_0)],$$
$$f[x_0 + (\vartheta_0 + \varepsilon)(X - x_0), y_0 + (\Theta_0 + \varepsilon') A (X - x_0)]$$

liegende Größe offenbar als ein besonderer Werth des Ausdruckes:

$$f(x_0 + (\vartheta_0 + \varepsilon\zeta)(X - x_0), y_0 + (\Theta_0 + \varepsilon'\zeta) A (X - x_0)]$$

betrachtet werden, welcher einem zwischen den Grenzen 0 und 1 liegenden Werthe von ζ entspricht, und folglich als ein besonderer Werth des Ausdruckes:

$$f[x_0 + \vartheta(X - x_0), y_0 \pm \Theta A (X - x_0)],$$

welcher zwischen denselben Grenzen liegenden Werthen von ϑ und Θ entspricht. Man kann folglich, da die Differenz $Y-y_0$ dem Producte aus $X-x_0$ und aus einer Mittelgröße der erwähnten Art gleich ist, setzen:

$$Y-y_0=(X-x_0)\,f\,[x_0+\vartheta(X-x_0),\ y_0\pm\Theta A(X-x_0)],$$

und folglich:

$$Y=y_0+(X-x_0)\,f\,[x_0+\vartheta(X-x_0),\ y_0\pm\Theta A(X-x_0)],$$

wo ϑ und Θ wieder zwei kleinere Zahlen als die Einheit bezeichnen.

Zusatz 1. Wenn sich alle Elemente der Differenz $X-x_0$, d. h. die Binome x_1-x_0, x_2-x_1, ... $X-x_{n-1}$ auf ein einziges reducirten, welches diese Differenz selbst wäre, so hätte man blos:

$$Y-y_0=(X-x_0)\,f\,(x_0,\ y_0).$$

Wenn man diese Gleichung mit der vorhergehenden vergleicht, so sieht man, daß sich durch die Eintheilungsart der Differenz $X-x_0$ in Elemente der zweite Factor des Productes, welches den Werth von $Y-y_0$ ausdrückt, abändert, indem darin die Größen x_0, y_0 so zunehmen, daß ihre Zuwächse resp. kleiner, als der Zahlenwerth des ersten Factors und kleiner, als dieser mit der Constante A multiplicirte Zahlenwerth sind.

Zusatz 2. Wenn m eine kleinere ganze Zahl als n bezeichnet und man setzt $x_m=\xi$, $y_m=\eta$, so erhält man:

$$Y-\eta=(X-\xi)\,f\,[\xi+\vartheta(X-\xi),\ \eta\pm\Theta A(X-\xi)].$$

§. 160. Nachdem wir die Form von Y kennen gelernt haben, wollen wir auch bestimmen, auf welche Weise sich diese Größe mit y_0 ändert, oder den einem Zuwachse β_0 von y_0 entsprechenden Zuwachs β_n von Y berechnen. Es bezeichne $H=\pm(X-x_0)$ den Zahlenwerth der Differenz $X-x_0$, und außerdem wollen wir annehmen, daß die Ableitung $\frac{df(x,y)}{dy}$ für alle zwischen den Grenzen x_0, X liegenden Werthe von x in Beziehung auf die Veränderlichen x, y stetig bleibt und zwischen den Grenzen $\pm C$ liegt. Nun sei:

$$\varphi(x,y)\,dx+\chi(x,y)\,dy$$

das Totaldifferenzial der Function $f(x,y)$, so daß man identisch hat:

$$\frac{df(x,y)}{dx}=\varphi(x,y),\ \frac{df(x,y)}{dy}=\chi(x,y).$$

Ferner bezeichnen β_1, β_2, ..., β_n die resp. Zuwächse, welche y_1 y_2, ..., Y annehmen, wenn man y_0 den Zuwachs β_0 ertheilt, und ϑ, Θ_0, Θ_1, ..., Θ_{n-1} seien wieder kleinere Zahlen als die Einheit.

Da die Gleichung:

$$y_1-y_0=(x_1-x_0)\,f\,(x_0,\ y_0)$$

noch stattfinden muß, wenn man y_0 um β_0 und y_1 um β_1 wachsen läßt; so hat man:

$$y_1+\beta_1-(y_0+\beta_0)=(x_1-x_0)\,f\,(x_0,\ y_0+\beta_0),$$

und folglich:

$$\beta_1-\beta_0=(x_1-x_0)\ \ [f(x_0,\ y_0+\beta_0)-f(x_0,\ y_0)].$$

Ferner hat man vermöge einer bekannten Formel in der gemachten Voraussetzung:

$$\frac{f(x_0,\ y_0+\beta_0)-f(x_0,y_0)}{\beta_0}=\chi\ (x_0\ ,\ y_0\pm\vartheta\beta_0)=\pm\Theta_0 C,$$

$$f\ (x_0,\ y_0+\beta_0)-f\ (x_0,\ y_0)=\pm\Theta_0\beta_0 C,$$

und folglich:

$$\beta_1=\beta_0\ [1\pm\Theta_0 C\,(x_1-x_0)].$$

Ebenso findet man:

$$\beta_2=\beta_1\,[1\pm\Theta_1 C(x_2-x_1)],$$

. . . . . .

$$\beta_n=\beta_{n-1}\,[1\pm\Theta_{n-1}\,C(X-x_{n-1})],$$

$$\beta_n=\beta_0\,[1\pm\Theta_0 C(x_1-x_0)][1\pm\Theta_1 C(x_2-x_1)]...[1\pm\Theta_{n-1}C(X-x_{n-1})].$$

Wenn nun die Differenz $X-x_0$ positiv ist, so ist der Zahlenwerth des Binomes:

$$1\pm\Theta_0 C\,(x_1-x_0)$$

kleiner, als die Summe:

$$1+C(x_1-x_0)$$

und folglich kleiner, als die Exponentialgröße:

$$e^{\,C(x_1-x_0)}=1+C(x_1-x_0)+\frac{C^2\ (x_1-x_0)^2}{1.2}+\text{etc.}$$

Aus demselben Grunde sind die Zahlenwerthe der Binome:

$$1\pm\Theta_1 C(x_2-x_1),\ ....,\ 1\pm\Theta_{n-1}\,C\,(X-x_{n-1})$$

resp. kleiner, als die Exponentialgrößen:

$$e^{\,C\,(x_2-x_1)},\ ...,\ \ e^{\,C\,(X-x_{n-1})},$$

und folglich ist das Product aller in dem Werthe von β_n vorkommenden Binome kleiner, als das Product aller dieser Exponentialgrößen, d. h. als $e^{\,C(X-x_0)}$, und reducirt sich mithin auf einen Ausdruck von der Form:

$$\pm\Theta e^{\,C(X-x_0)},$$

wo Θ wieder eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl bezeichnet. Für diesen Ausdruck müßte man offenbar den folgenden:

$$\pm\Theta e^{\,C(x_0-X)}$$

setzen, wenn die Differenz $X - x_0$ negativ würde. Demnach hat man:

$$\beta_n = \pm \Theta \beta_0 e^{\pm C(X - x_0)} = \pm \Theta \beta_0 e^{CH},$$

und dieses ist folglich der Zuwachs β_n von Y, welcher dem Zuwachse β_0 von y_0 entspricht. Wenn man der Kürze wegen $K = e^{CH}$ setzt, wo K eine positive und endliche Constante ist; so hat man blos:

$$\beta_n = \pm \Theta K \beta_0.$$

Zusatz 1. Wenn die Elemente $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... der Differenz $X - x_0$ alle kleinere Zahlenwerthe, als $\frac{1}{C}$ bekommen, so sind die Factoren:

$$1 \pm \Theta_0 C(x_1 - x_0),\ 1 \pm \Theta_1 C(x_2 - x_1), \ldots$$

sämmtlich positiv, und man hat nothwendig:

$$\beta_n = \Theta K \beta_0.$$

Zusatz 2. Der Werth von $\beta_n = \pm \Theta K \beta_0$ wird mit β_0 zugleich unendlich klein; folglich entspricht einem unendlich kleinen Incremente der Größe y_0 immer ein unendlich kleines Increment der Größe Y, und mithin ist die zweite dieser Größen eine stetige Function der ersten.

Zusatz 3. Wenn man blos die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
y_{m+1} - y_m &= (x_{m+1} - x_m)\, f(x_m, y_m), \\
y_{m+2} - y_{m+1} &= (x_{m+2} - x_{m+1})\, f(x_{m+1}, y_{m+1}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Y - y_{n-1} &= (X - x_{n-1})\, f(x_{n-1}, y_{n-1})
\end{aligned}$$

betrachtet, so sind sie zur Bestimmung von Y als Function der Größen x_m, x_{m+1}, ..., x_{n-1}, X, y_m hinreichend, und man kann wieder leicht zeigen, daß, wenn man y_m einen gewissen Zuwachs β_m ertheilt, der entsprechende Zuwachs von Y von folgender Form ist:

$$\pm \Theta \beta_m e^{\pm C(X - x_m)}.$$

Folglich hat dieser letzte Zuwachs einen kleinern Zahlenwerth, als der des Productes:

$$\beta_m e^{\pm C(X - x_m)}$$

und umsomehr, als der des Productes:

$$\beta_m e^{\pm C(X - x_0)} = K \beta_m.$$

§. 161. Die Größe Y ist offenbar abhängig: 1) von den Grenzwerthen x_0, X der Veränderlichen x; 2) von der Größe y_0 und 3) von der Anzahl n und den Werthen der Elemente, in welche die Differenz $X - x_0$ getheilt ist, oder mit andern Worten, von der gewählten Eintheilungsart dieser Differenz. Es läßt

sich aber leicht zeigen, daß der Werth von Y blos von den drei Größen x_0, X und y_0 abhängt, wenn man die Zahlenwerthe der Elemente der Differenz $X - x_0$ unendlich klein werden läßt. Zu diesem Zwecke braucht man nur zu zeigen, daß die gewählte Eintheilungsart auf den Werth von Y keinen merklichen Einfluß mehr hat, wenn die Zahl n sehr groß wird, was man leicht auf folgende Weise darthun kann:

Wenn sich die Elemente der Differenz $X - x_0$ auf ein einziges reduciren, welches alsdann diese Differenz selbst ist; so wird der Werth von Y durch die Gleichung:

$$Y - y_0 = (X - x_0)\, f(x_0, y_0)$$

bestimmt. Wenn dagegen diese Differenz $X - x_0$ in n Elemente:

$$x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ \ldots,\ X - x_{n-1}$$

getheilt wird, so hat man:

$$Y - y_0 = (X - x_0)\, f[x_0 + \vartheta (X - x_0),\ y_0 \pm \Theta A (X - x_0)].$$

Um zu der zweiten Eintheilungsart überzugehen, braucht man jedes Element der ersten Eintheilung nur wieder in neue Elemente zu zerlegen, und man kann alsdann den Einfluß, welchen jede Eintheilung auf den Werth von Y hat, näherungsweise berechnen. Denn wenn man z. B. das Element $x_1 - x_0$ in mehrere andere zerlegt, so erhält man für die Gleichung:

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0)\, f(x_0, y_0)$$

mehrere andere Gleichungen von derselben Form; aber wenn man auf die bekannte Weise verfährt, so findet man:

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0)\, f[x_0 + \vartheta_1 (x_1 - x_0),\ y_0 \pm \Theta_1 A (x_1 - x_0)]$$

wo ϑ_1, Θ_1 wieder zwei kleinere Zahlen als die Einheit bezeichnen. Setzt man:

$$f[x_0 + \vartheta_1 (x_1 - x_0),\ y_0 \pm \Theta_1 A (x_1 - x_0)] = f(x_0, y_0) \pm \varepsilon_0,$$

so hat man:

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0)\, f(x_0, y_0) \pm \varepsilon_0 (x_1 - x_0);$$

aber vor der weitern Eintheilung des Elementes $x_1 - x_0$ hatte man:

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0)\, f(x_0, y_0),$$

und folglich ist der Werth von y_1 durch diese neue Eintheilung um das Product:

$$\pm \varepsilon_0 (x_1 - x_0)$$

geändert.

Wenn aber die übrigen Elemente der Differenz $X - x_0$ ihre ursprünglichen Werthe beibehalten, während die Größe y_1 das Increment $\pm \varepsilon_0 (x_1 - x_0)$ bekommt; so erhält Y nach dem vorhin Gesagten ein anderes Increment von der Form:

$$\pm \Theta K \varepsilon_0 (x_1 - x_0),$$

und folglich hat der durch die alleinige Untereintheilung des Elementes $x_1 - x_0$ verursachte Zuwachs von Y einen kleinern Zahlenwerth, als die Größe:

$$\pm K\varepsilon_0 (x_1 - x_0).$$

Ebenso beweist man, daß der von der Untereintheilung des Elementes $x_{m+1} - x_m$ veranlaßte Zuwachs von Y einen kleinern Zahlenwerth hat, als die Größe:

$$\pm K\varepsilon_m (x_{m+1} - x_m),$$

wo die Zahl ε_m durch eine Gleichung von der Form:

$$\pm \varepsilon_m = f[x_m + \vartheta(x_{m+1} - x_m),\ y_m \pm \Theta A (x_{m+1} - x_m)] - f(x_m, y_m)$$

bestimmt wird. Wenn man also alle Elemente der Differenz $X - x_0$ successive von neuem eintheilt, so bekommt Y eine Reihe von Incrementen, deren Summe kleiner ist, als:

$$K\varepsilon_0 (x_1 - x_0) + K\varepsilon_1 (x_2 - x_1) + \ldots + K\varepsilon_{n-1} (X - x_{n-1}) = K\varepsilon (X - x_0),$$

wo ε eine Mittelgröße zwischen den Zahlen ε_0, ε_1, ε_2, ... bezeichnet. Wenn die Differenzen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... unendlich klein werden, so ist dasselbe auch mit den Größen ε_0, ε_1, ε_2, ..., ε_{n-1}, sowie mit dem Ausdrucke:

$$K\varepsilon (X - x_0)$$

der Fall, und folglich wird der einer gewissen Eintheilung, worin die Elemente der Differenz $X - x_0$ sehr kleine Zahlenwerthe haben, entsprechende Werth von Y nicht merklich geändert, wenn man zu einer zweiten Eintheilung schreitet, worin jedes dieser Elemente wieder in mehrere andere zertheilt wird.

Wir wollen nun annehmen, daß man zu gleicher Zeit zwei Eintheilungen von solcher Beschaffenheit betrachtet, daß die Elemente der zweiten Eintheilung keine Unterabtheilungen der Elemente der ersten Eintheilung mehr sind; so kann man diese beiden Eintheilungen mit einer dritten von solcher Beschaffenheit vergleichen, daß jedes Element der ersten oder der zweiten Eintheilung durch die Vereinigung mehrerer Elemente der dritten gebildet wird. Zur Erfüllung dieser Bedingung ist weiter nichts erforderlich, als daß alle bei den beiden ersten Eintheilungen eingeschobenen Werthe von x auch bei der dritten Eintheilung angewandt sind, und man kann beweisen, daß man den Werth von Y sehr wenig ändert, wenn man von der ersten oder von der zweiten Eintheilung zu der dritten übergeht, und folglich auch, wenn man von der ersten zu der zweiten Eintheilung übergeht. Wenn also die Elemente der Differenz $X - x_0$ unendlich klein werden, so hat die Untereintheilungsart auf den Werth von Y keinen merklichen Einfluß mehr, und wenn man die Zahlenwerthe dieser Elemente durch Vermehrung ihrer Anzahl ohne Ende abnehmen läßt; so convergirt der Werth von Y gegen eine gewisse Grenze, welche einzig und allein von der Form der Function $f(x, y)$, von den Grenzwerthen x_0, X der Veränderlichen x und von der Größe y_0 abhängt.

Zusatz 1. Da die Grenze, gegen welche Y convergirt, wenn die Elemente der Differenz $X - x_0$ unendlich klein werden, allein von den drei Größen x_0, X, y_0 abhängt; so wollen wir diese Grenze durch $f(x_0, X, y_0)$ bezeichnen, und mit $F(X, y_0)$, $F(X)$, wenn wir blos die beiden Größen X, y_0, oder die eine Größe X sich ändern lassen wollen.

§. 162. Es läßt sich nun leicht beweisen, daß es immer eine Function von x giebt, welche der Differenzialgleichung $dy = f(x,y)dx$ genügt und einen besondern, aber willkührlichen Werth y_0 annimmt, wenn man der Veränderlichen x einen gegebenen Werth x_0 beilegt.

Denn es sei $F(x)$ der Werth von $F(X)$, wenn man x für X setzt. Da $F(X)$ der Werth von Y ist, wenn die Elemente der Differenz $X - x_0$ unendlich klein werden, so ergiebt sich aus der Gleichung:

$$Y - \eta = (X - \xi) f[\xi + \vartheta(X - \xi), \eta \pm \Theta A(X - \xi)]$$

die Gleichung:

$$F(X) - F(\xi) = (X - \xi) f[\xi + \vartheta(X - \xi), F(\xi) \pm \Theta A(X - \xi)],$$

und wenn man setzt:

$$\xi = x, \quad X = x + h,$$

wo x und $x + h$ zwischen den Grenzen x_0, X liegen; so hat man zu gleicher Zeit:

$$F(x) = y_0 + (x - x_0) f[x_0 + \vartheta(x - x_0), y_0 \pm \Theta A(x - x_0)],$$

$$F(x + h) - F(x) = hf[x + \vartheta h, F(x) \pm \Theta A h].$$

Nun ist aber leicht einzusehen: 1) daß sich $F(x)$ für $x = x_0$ auf y_0 reducirt, 2) daß, wenn h unendlich klein wird, der entsprechende Zuwachs der Function $F(x)$, nämlich $F(x + h) - F(x)$ auch eine unendlich kleine Größe ist, und 3) daß sich aus dieser durch h dividirten Gleichung folgende ergiebt:

$$F'(x) = f[x, F(x)],$$

welche ausdrückt, daß die Function $F(x)$ der Differenzialgleichung $dy = f(x, y)dx$ Genüge leistet. Wenn also die Function $f(x, y)$ und ihre Ableitung $\frac{df(x, y)}{dy}$ zwischen den Grenzen x_0, X endlich und stetig bleiben, so giebt es eine Function von y, welche der Differenzialgleichung $dy = f(x, y)dx$ genügt, und einen besondern, aber willkührlichen Werth y_0 annimmt, wenn man der Veränderlichen x einen gegebenen Werth x_0 beilegt.

Zusatz. Wenn man die Grenze von Y mit $F(x, y_0)$ bezeichnet, so erscheint die Function y unter der Form $y = F(x, y_0)$ und ist das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung, weil y_0 eine willkührliche Constante ist, und zwar ist dieses Integral, wie Y, eine stetige Function von y_0.

Sieben und zwanzigste Vorlesung.

Anwendung der in der vorhergehenden Vorlesung auseinandergesetzten Methode auf die Integration einer beliebigen Differenzialgleichung der ersten Ordnung mit zwei Veränderlichen x, y.

---

§. 163. Bisher haben wir vorausgesetzt, daß die beiden Functionen:

$$f(x,y) \text{ und } \chi(x,y) = \frac{df(x,y)}{dy}$$

endlich und stetig bleiben, was für einen Werth y auch für alle zwischen den Grenzen x_0, $\mathbf{X}$ liegenden Werthe von x haben mag; allein es läßt sich leicht zeigen, daß die in der vorhergehenden Vorlesung angeführten Eigenschaften auch dann noch jedesmal statt finden, wenn diese Functionen in Beziehung auf die Veränderlichen x, y in der Nähe der besondern Werthe $x = x_0$, $y = y_0$ endlich und stetig bleiben, wenn man die Größe $\mathbf{X}$ gehörig annimmt. Denn es seien $f(x_0, y_0)$, $\chi(x_0, y_0)$ zwei endliche Größen, $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ zwei Zahlen, welche größer sind, als ihre Zahlenwerthe und a eine positive, oder negative Größe von solcher Beschaffenheit, daß die beiden Functionen $f(x,y)$, $\chi(x,y)$ für die resp. zwischen den Grenzen $x_0, x_0 + a$ und $y_0 - \mathbf{A}a$, $y_0 + \mathbf{A}a$ liegenden Werthe von x und y in Beziehung auf die Veränderlichen x, y stetig bleiben und resp. zwischen den Grenzen $-\mathbf{A}$, $+\mathbf{A}$ und $-\mathbf{C}$, $+\mathbf{C}$ liegen; so finden die in der vorhergehenden Vorlesung angeführten Eigenschaften auch noch statt, wenn man für $\mathbf{Y}$ ein Mittel zwischen den beiden Größen x_0 und $x_0 + a$ nimmt. Um dieses zu beweisen, braucht man nur zu zeigen, daß in der gemachten Voraussetzung die Functionen $f(x, y)$, $\chi(x, y)$ für alle zwischen x_0 und $x_0 + a$ liegenden Werthen von x entsprechenden Werthe von $y_1, y_2, \ldots, \mathbf{Y}$ endlich und stetig bleiben, wenn die durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
y_1 - y_0 &= (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\
y_2 - y_1 &= (x_2 - x_1) f(x_1, y_1), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{Y} - y_{n-1} &= (\mathbf{X} - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1})
\end{aligned}$$

bestimmten Größen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, \mathbf{Y}$ alle zwischen den Grenzen $y_0 - \mathbf{A}a$, $y_0 + \mathbf{A}a$ liegen. Wenn man aber diese Gleichungen,

worin die Größen $y_0, y_1, \ldots$ vorkommen, zusammenaddirt, so erhält man die Gleichung:

$$y_m - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) + (x_2 - x_1) f(x_1, y_1) \ldots + (x_m - x_{m-1}) f(x_{m-1}, y_{m-1}),$$

deren zweiter Theil dem Producte aus der Differenz $x_m - x_0$ und aus einer Mittelgröße zwischen den Coefficienten:

$$f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), \ldots, f(x_{m-1}, y_{m-1})$$

gleich ist. Da ferner der Zahlenwerth der Differenz $x_m - x_0$ kleiner ist, als der von $X - x_0$, und folglich kleiner als a; so ist klar, daß der Zahlenwerth von y_m zwischen den Grenzen $y_0 - Aa$, $y_0 + Aa$ liegt, wenn jeder der Ausdrücke:

$$f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), \ldots, f(x_{m-1}, y_{m-1})$$

einen kleinern Zahlenwerth als A hat, was nothwendig der Fall ist, wenn die Größen $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$ selbst zwischen den Grenzen $y_0 - Aa$, $y_0 + Aa$ liegen. Da diese Bedingung in Beziehung auf y_0 erfüllt wird, so wird sie es folglich auch in Beziehung auf y_1, und da sie für y_0, y_1 erfüllt wird, so wird sie auch in Beziehung auf y_2 erfüllt, u. s. f., und da sie endlich für y_m verificirt wird, wo m eine ganze Zahl bezeichnet, welche $=$ oder $< n$ ist; so wird sie folglich für alle Glieder der Reihe $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, Y erfüllt.

Zusatz 1. Es seien ϑ, Θ zwei zwischen den Grenzen 0 und 1 veränderliche Zahlen, und wir wollen durch das Zeichen M eine Mittelgröße zwischen mehreren gegebenen Größen andeuten. Da die mit C bezeichnete Zahl beliebig angenommen werden kann, wofern sie nur größer ist, als der Zahlenwerth von $\chi(x_0, y_0)$; so ist klar, daß die Größe a den Bedingungen des vorhergehenden Lehrsatzes genügt, wenn man a und C so gewählt hat, daß die beiden Functionen:

$$f(x_0 + \vartheta a,\ y_0 \pm \Theta A a),\ \chi(x_0 + \vartheta a,\ y_0 \pm \Theta A a)$$

zwischen den Grenzen:

$$\vartheta = 0,\ \vartheta = 1;\quad \Theta = 0,\ \Theta = 1$$

stetig bleiben, und daß man zwischen diesen Grenzen immer hat:

$$f(x_0 + \vartheta a,\ y_0 \pm \Theta A a) = M(-A, +A).$$

Zusatz 2. Wenn man unter den Werthen der Größe a, für welche die in Zusatz 1 ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werden können, den nimmt, welcher, abgesehen vom Zeichen, der größte ist; so giebt die Gleichung:

$$y = F(x), \text{ oder } y = F(x, y_0)$$

der vorhergehenden Vorlesung in dieser Voraussetzung ein particuläres Integral der Differenzialgleichung:

$$dy = f(x, y)\, dx,$$

wofern die Veränderliche x stets zwischen den Grenzen x_0 und x_0+a liegt.

Zusatz 3. Wenn die Größe a auf die eben angegebene Weise bestimmt ist und man setzt in der Gleichung $y=F(x,y_0)$ für y_0 eine willkührliche Constante C, so ist $y=F(x,C)$ das allgemeine Integral der Differenzialgleichung $dy=f(x,y)\,dx$, wenigstens für gewisse Werthe von x, welche zwischen gewissen Grenzen liegen, die selbst von dem der willkührlichen Constante beigelegten Werthe abhängig sind. Denn es sei α eine Größe von demselben Zeichen als a, aber von einem kleinern Zahlenwerthe, ε sei eine kleinere Zahl als die Einheit, und wir wollen setzen:

$$C=y_0\pm\varepsilon A\alpha=M(y_0-A\alpha,\ y_0+A\alpha).$$

Da offenbar:

$$y_0-Aa=C-A(a\pm\varepsilon\alpha),\ y_0+Aa=C+A(a\mp\varepsilon\alpha)$$

ist, so folgt, daß die beiden Größen $C-A(a-\alpha)$, $C+A(a-\alpha)$ zwischen den beiden Größen y_0-Aa, y_0+Aa liegen, und wenn man wie weiter oben schließt; so ergiebt sich, daß der Werth $y=F(x,C)$ eine stetige Function von x ist und der Gleichung $dy=f(x,y)\,dx$ genügt, so lange die Constante C zwischen den Grenzen $y_0-A\alpha$, $y_0+A\alpha$ und die Veränderliche x zwischen den Grenzen x_0, $x_0+(a-\alpha)$ liegt.

Ebenso beweist man den folgenden Satz:

Wir wollen annehmen, daß die Functionen:

$$f(x_0,y_0),\ \chi(x_0,y_0)$$

endliche Werthe haben und die Zahl A, so wie die Größe a so wählen, daß, wenn $\chi(x_0,y_0)$ positiv oder Null ist und die beiden Functionen:

$$f(x_0+\vartheta a,\ y_0+\Theta Aa),\quad \chi(x_0+\vartheta a,\ y_0+\Theta Aa)$$

zwischen den Grenzen:

$$\vartheta=0,\ \vartheta=1,\quad \Theta=0,\ \Theta=1$$

stetig bleiben, beständig zwischen diesen Grenzen:

$$f(x_0+\vartheta a,\ y_0+\Theta Aa)=M(0,A)$$

ist, und wenn $\chi(x_0,y_0)$ negativ oder Null ist, indem die beiden Functionen:

$$f(x_0+\vartheta a,\ y_0-\Theta Aa),\quad \chi(x_0+\vartheta a,\ y_0-\Theta Aa)$$

zwischen den Grenzen:

$$\vartheta=0,\ \vartheta=1,\quad \Theta=0,\ \Theta=1$$

stetig bleiben, beständig zwischen diesen Grenzen:

$$f(x_0+\vartheta a,\ y_0-\Theta Aa)=M(0,-A)$$

ist; so finden die Lehrsätze der vorhergehenden Vorlesung zwischen den Grenzen x_0, x_0+a statt.

§. 164. Unter den Werthen von a, welche die ausgesprochenen Bedingungen erfüllen, ist besonders der zu betrachten, welcher, abgesehen vom Zeichen, der **größte** ist. Um an einem Beispiele zu zeigen, wie man diesen Werth bestimmen kann, wollen wir annehmen, daß die gegebene Differenzialgleichung folgende sei:

$$dy = \text{tang}(x+y)\,dx$$

und daß die Größen x_0, y_0 verschwinden. Soll die Gleichung:

$$f(x_0+\vartheta a,\ y_0+\Theta A a) = \text{tang}(\vartheta a+\Theta A a) = M(0, A)$$

für positive Werthe von a immer statt finden, während sich ϑ und Θ zwischen den Grenzen 0 und 1 ändern; so muß der Bogen $a+Aa$ zwischen den Grenzen $0, \frac{\pi}{2}$ liegen, und es muß $\text{tang}(a+Aa) = M(0, A)$ sein. Um aus dieser letzten Gleichung den größten Werth des Bogens a abzuleiten, indem der Bogen $a+Aa < \frac{\pi}{2}$ bleibt, braucht man für den zweiten Theil $M(0, A)$ nur A zu setzen und mit der Gleichung:

$$\text{tang}(a+Aa) = A, \text{ oder } a = \frac{\text{arc tang } A}{1+A}$$

die zu verbinden, welche das Maximum von a als Function von A giebt, nämlich:

$$\frac{da}{dA} = 0, \text{ oder } \frac{\text{arc tang } A}{1+A} = \frac{1}{1+A^2}.$$

Diesen beiden Gleichungen wird aber genügt, wenn man setzt:

$$a = 1{,}229\ldots,\quad A = 0{,}3983$$

und folglich ist der positive Werth $a = 1{,}229\ldots$ in der gemachten Voraussetzung der größte der Werthe von a, welche der Gleichung:

$$f(x_0+\vartheta a,\ y_0+\Theta A a) = M(0, A)$$

genügen können. Eben so wird bewiesen, daß der negative Werth:

$$a = -1{,}229\ldots,$$

abgesehen vom Zeichen, der größte der Werthe ist, welche der Gleichung:

$$f(x_0+\vartheta a,\ y_0-\Theta A a) = M(0, -A)$$

genügen können. Hieraus folgt, daß die in der vorhergehenden Vorlesung auseinandergesetzte Integrationsmethode den allgemeinen Werth von y giebt, welcher der Gleichung:

$$dy = \text{tang}(x+y)\,dx$$

genügt und mit der Veränderlichen x zugleich verschwindet, so lange dieselbe zwischen den Grenzen:

$$a = -1{,}229\ldots,\quad a = 1{,}229\ldots$$

liegt.

Für die Gleichung:

$$dy = \text{tang}(x^2 + y^2)\,dx$$

fände man, wenn wieder $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ ist, daß der größte Werth von a^2 durch die beiden Gleichungen:

$$a^2 = \frac{\text{arc tang A}}{1+A^2}, \quad \text{arc tang A} = \frac{1}{2A}$$

bestimmt wird, woraus sich ergiebt:

$$A = 07{,}654\ldots, \quad a^2 = 0{,}9653, \quad a = \pm 0{,}9824\ldots,$$

und die auseinandergesetzte Integrationsmethode giebt den Werth von y, welcher der Differenzialgleichung:

$$dy = \text{tang}(x^2 + y^2)\,dx$$

genügt und mit x verschwindet, so lange x zwischen den Grenzen:

$$-0{,}9824\ldots, \quad +0{,}9824$$

liegt.

Wir wollen noch die Differenzialgleichung:

$$dy = \frac{dx}{x+y}$$

betrachten und $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ setzen, so haben wir:

$$f(x_0 + \vartheta a,\ y_0 + \Theta A a) = \frac{1}{1+\vartheta a+\Theta A a} = M(0, A),$$

welche Gleichung zwischen den Grenzen $\vartheta = 0$, $\vartheta = 1$, $\Theta = 0$, $\Theta = 1$ immer statt findet, wenn man $A = 1$ setzt und der Größe a irgend einen positiven Werth beilegt. Der größte positive Werth von a ist also $a = \infty$, und wenn man mit $y = F(x)$ das der particulären Integrale der Differenzialgleichung:

$$dy = \frac{dx}{x+y}$$

bezeichnet, welches für $x = 1$ verschwindet; so giebt die obige Integrationsmethode den Werth von $F(x)$, so lange die Veränderliche x zwischen den Grenzen $x = 1$, $x = \infty$ liegt. Die Gleichung:

$$\frac{1}{1+\vartheta a+\Theta A a} = M(0, A)$$

wird wieder erfüllt, wenn $A > 1$ ist und für a ein zwischen den Grenzen 0 und $-\frac{A-1}{A(A+1)}$ liegender negativer Werth gesetzt wird. Nun wird aber von den negativen Werthen von a, welche die Gleichung $a = -\frac{A-1}{A(A+1)}$ giebt, der größte, abgesehen vom Zeichen, durch die Gleichung:

$$\frac{da}{dA} = 0, \text{ oder } A^2 - 2A = 1$$

bestimmt, woraus folgt, da $A>1$ sein muß:

$$A=1+\sqrt{2},\quad a=-(3-2\sqrt{2})=-0{,}1715.$$

Die obige Integrationsmethode ist also auch zur Bestimmung des Werthes von $F(x)$ hinreichend, wenn sich x zwischen den Grenzen 0 und $-0{,}1715$ ändert.

§. 165. Es ist wohl zu bemerken, daß die auf die obige Weise bestimmten Größen $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, Y$ zwischen den Grenzen y_0+Aa, y_0-Aa liegen und eine zu- oder eine abnehmende Reihe bilden, so oft X zwischen den Grenzen x_0, x_0+a liegt, und die Größen a, A so gewählt sind, daß den oben ausgesprochenen Bedingungen genügt wird. Hieraus folgt leicht, daß die Function $y=F(x)$ in dem in Rede stehenden Falle von $x=x_0$ bis $x=X$ fortwährend zu- oder abnimmt, ohne die Grenze $y+Aa$ oder y_0-Aa überschreiten zu können. Wir wollen nun annehmen, daß a wieder denselben Bedingungen genügt und daß die sich zwischen den Grenzen x_0, x_0+a ändernde Größe X dieser letzten Grenze sich ohne Ende nähert; so nähert sich der Werth von $y=F(X)$ auch ohne Ende einer gewissen Grenze, welche man mit $F(x_0+a)$ bezeichnen kann, und welche zwischen den beiden Größen y_0-Aa, y_0+Aa liegt. Alsdann kann man durch ähnliche Schlüsse, wie die bereits früher angewandten, leicht darthun, daß die Lehrsätze der vorhergehenden Vorlesung nicht blos dann stattfinden, wenn sich die Größe X zwischen den Grenzen x_0, x_0+a ändert, sondern auch dann, wenn sich diese Größe ohne Ende einer neuen Grenze x_0+a_1 nähert. Mann kann also die Werthe von $F(X)$, welche zwischen x_0 und x_0+a_1 liegenden Werthen von X entsprechen, mit jedem beliebigen Grade von Annäherung berechnen. Wenn ferner die Fuctionen $f(x,y)$, $\chi(x,y)$ in der Nähe der besondern Werthe:

$$x=x_0+a_1,\quad y=F(x_0+a_1)$$

stetig bleiben, so kann man auch einen jenseits der Grenze x_0+a_1 liegenden Werth bestimmen, gegen welchen man die Größe X in der Function $F(X)$ convergiren lassen kann. Wir wollen diese neue Grenze mit x_0+a_2 bezeichnen und wieder annehmen, daß die Größen:

$$x_0+a,\quad x_0+a_1,\quad x_0+a_2,\ldots$$

eine zu- oder abnehmende Reihe bilden, indem ihre Zahlenwerthe zuletzt größer werden, als jede gegebene Zahl, oder sich einer gewissen Grenze ohne Ende nähern. Im ersten Falle kann die Größe X ohne Ende zu- oder abnehmen, so daß sie größer, oder kleiner wird, als jede gegebene Größe, und im zweiten Falle kann sich die Größe X der Grenze, gegen welche die verschiedenen Glieder der vorhergehenden Reihe convergiren, ohne Ende nähern. Es bezeichne X diese Grenze und $F(X)$ den entsprechenden Werth von $F(X)$, so muß, wenn die Größe X die Grenze X in der Function $F(X)$ nicht mehr soll überschreiten können, entweder die Größe $F(X)$ unendlich sein, oder eine der Functionen $f[x,F(x)]$,

$\chi[x, F(x)]$ für den besondern Werth $x = X$ unendlich werden, oder es muß endlich eine dieser Functionen in der Nähe dieses besondern Werthes discontinuirlich werden.

§. 166. Um diese allgemeinen Principien auf ein Beispiel anzuwenden, wollen wir annehmen, daß $F(x)$ das der particulären Integrale der Differenzialgleichung $dy = \frac{dx}{x+y}$ sei, welches für $x = 1$ verschwindet, und die Werthe suchen, welche man in diesem Falle den Constanten $a, a_1, a_2, \ldots$ beilegen muß, wenn sie negativ sind und die größten absoluten Werthe haben. Diese Werthe haben die Eigenschaft, Gleichungen von der Form:

$$\frac{1}{1+\vartheta a+\Theta A a} = M(0, A),$$

d. h.:

$$\frac{1}{x_0+F(x_0)+(\vartheta+\Theta A)a} = M(0, A),$$

$$\frac{1}{x_0+a+F(x_0+a)+(\vartheta+\Theta A_1)(a_1-a)} = M(0, A_1),$$

$$\frac{1}{x_0+a_1+F(x_0+a_1)+(\vartheta+\Theta A_2)(a_2-a_1)} = M(0, A_2), \text{ etc.}$$

zu genügen, wenn die Zahlen ϑ und Θ zwischen den Grenzen 0 und 1 liegen. Diesen Gleichungen wird aber genügt, wenn man setzt:

$$a = -\frac{A[x_0+F(x_0)]-1}{A(A+1)},$$

$$a_1 - a = -\frac{A_1[x_0+a+F(x_0+a)]-1}{A_1(A_1+1)},$$

$$a_2 - a_1 = -\frac{A_2[x_0+a_1+F(x_0+a_1)]-1}{A_2(A_2+1)}, \ldots$$

und allgemein:

$$a_m - a_{m-1} = -\frac{A^m[x_0+a_{m-1}+F(x_0+a_{m-1})]-1}{A_m(A_m+1)}.$$

Ferner wollen wir bemerken, daß der absolute Werth von a_m ein Maximum wird, wenn man A_m so annimmt, daß der Gleichung:

$$A_m^2 - \frac{2A_m+1}{x_0+a_{m-1}+F(x_0+a_{m-1})} = 0$$

Genüge geschieht, und wenn man folglich:

$$A_m = \frac{1+\sqrt{1+x_0+a_{m-1}+F(x_0+a_{m-1})}}{x_0+a_{m-1}+F(x_0+a_{m-1})},$$

$$a_m = -2-x_0-F(x_0+a_{m-1})+2\sqrt{1+x_0+a_{m-1}+F(x_0+a_{m-1})}$$

nimmt; so hat man wegen $x_0 = 1, F(x_0) = 0$:

$$a_m = -3-F(1+a_{m-1})+2\sqrt{2+a_{m-1}+F(1+a_{m-1})},$$

woraus sich ergiebt:

$$a = -3 + 2\sqrt{2},$$

$$a_1 = -3 + F(1+a) + 2\sqrt{2 + a + F(1+a)}, \text{ etc.}$$

Wenn man vermittelst dieser letzten Gleichungen und der in der vorhergehenden Vorlesung mitgetheilten Integrationsmethode successive die Größen:

$$1+a,\ 1+a_1,\ 1+a_2,\ldots\ldots$$

bestimmt, welche an die Stelle der Größen:

$$x_0+a,\ x_0+a_1,\ x_0+a_2,\ldots$$

treten, so erhält man eine Reihe von Gliedern, welche fortwährend abnehmen und gegen eine gewisse Grenze convergiren. Bezeichnet man diese Grenze mit X, so hat man für sehr große Werthe von m nahezu:

$$1 + a_m = 1 + a_{m-1} = X$$

und folglich:

$$2 + X + F(X) = 2\sqrt{1 + X + F(X)}$$

oder:

$$X + F(X) = 0.$$

Der besondere Werth $x = X$ macht also die Function:

$$f[x, F(x)] = \frac{1}{x + F(x)}$$

unendlich, was mit der weiter oben gemachten Bemerkung übereinstimmt.

Es kann nicht befremden, wenn die fragliche Integrationsmethode in gewissen Fällen nur zur Berechnung reeller Größen dienen kann, welche die successiven Werthe eines particulären Integrales einer gegebenen Differenzialgleichung ausdrücken, wenn die entsprechenden Werthe der unabhängigen Veränderlichen x zwischen gewissen Grenzen liegen. Denn es giebt unter den Differenzialgleichungen, welche sich genau integriren lassen, viele, deren particuläre Integrale nicht auf beliebige Werthe der Veränderlichen x erstreckt werden dürfen, wenn sie reell bleiben sollen. Hierher gehört z. B. die Differenzialgleichung:

$$dy = \frac{dx}{x+y}.$$

Wenn man sie auf die Form:

$$\frac{dx+dy}{x+y+1} = dy$$

bringt und ihre beiden Theile integrirt, so findet man, wenn man annimmt, daß y für $x = 1$ verschwindet:

$$l(x+y+1) - l2 = y$$

und folglich:

$$x = 2e^y - y - 1.$$

Nun ist aber leicht einzusehen, daß der zweite Theil dieser letzten Gleichung ein Minimum gestattet, welches durch die Gleichung $2e^y = 1$ bestimmt wird, woraus sich ergiebt:

$$y = -12 = -0{,}6931 \ldots$$

und folglich:

$$x = 12 = 0{,}6931 \ldots$$

Wenn man also mit $y = F(x)$ das particuläre Integral bezeichnet, welches die Gleichung:

$$x = 2e^y - y - 1$$

giebt, so kann dasselbe, wenn es reell bleiben soll, nicht auf kleinere Werthe von x als $x = 1.2$, welchem ein Nullwerth von:

$$x + y = x + F(x)$$

und ein unendlicher Werth von:

$$f(x, y) = \frac{1}{x + F(x)}$$

entspricht, erstreckt werden. Diese directen Betrachtungen führen uns also wieder auf die frühern Folgerungen.

Acht und zwanzigste Vorlesung.

Grenze der Fehler, welche man begehen kann, wenn man die in den vorhergehenden Vorlesungen auseinandergesetzte Methode zur numerischen Berechnung der particulären Integrale einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung anwendet.

---

§. 167. Wenn die Function y der Differenzialgleichung $dy = f(x,y)dx$ genügen und für $x = x_0$ den besondern Werth y_0 annehmen muß, und man verlangt nicht das allgemeine Integral, sondern einen particulären Werth von y, z. B. den, welcher $x = X$ entspricht; so ist dieser Werth sehr wenig von der Größe Y verschieden, welche durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\ y_2 - y_1 &= (x_2 - x_1 f(x_1, y_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y - y_{n-1} &= (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

bestimmt wird, wofern man den Elementen der Differenz $X - x_0$, d. h. den Größen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $X - x_{n-1}$ sehr kleine Zahlenwerthe beilegt und außerdem hat:

$$X = M(x_0, x_0 + a),$$

indem die Größe a so gewählt ist, daß die in der vorhergehenden Vorlesung ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werden. Da man ferner, um von der Größe Y zu dem gesuchten Werthe von y überzugehen, die Differenzen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... nur in unendlich kleine Elemente zu zerlegen braucht; so ist klar, daß der Fehler, welchen man begeht, wenn man Y für diesen Werth von y nimmt durch einen Ausdruck von der Form:

$$\pm \Theta K \varepsilon (X - x_0)$$

bestimmt wird (§. 161). Dieser Fehler ist folglich kleiner, als $KH\varepsilon$, wo H den Zahlenwerth von $X - x_0$, K die Exponentialgröße e^{CH} und ε eine durch Gleichungen von der Form:

$$\pm \varepsilon_m = f[x_m + \vartheta(x_{m+1} - x_m),\ y_m \pm \Theta A(x_{m+1} - x_m)] - f(x_m, y_m)$$

bestimmte Mittelgröße zwischen den Zahlen ε_0, ε_1, ..., ε_{n-1} bezeichnet. Nun wollen wir annehmen, daß jedes der Elemente der Differenz $X - x_0$ zwischen den Grenzen $\pm h$ liegt, wo h eine positive Größe ist; so übertreffen die Zahlen ε_0, ε_1, ..., ε_{n-1} niemals den größten Zahlenwerth, welchen die Größe:

$$f[x \pm \vartheta h,\ y \pm \Theta A h] - f(x,y)$$

annehmen kann, wenn man x und $x \pm \vartheta h$ zwiſchen den Grenzen x_0, X, ferner y und $y \pm \Theta A h$ zwiſchen den Grenzen y_0, $y_0 \pm \Theta A a$ und endlich ϑ, Θ zwiſchen den Grenzen 0 und 1 ſich ändern läßt. Bezeichnet man alſo dieſen größten Werth mit D, ſo bleibt ε immer kleiner, als D und der begangene Fehler kleiner, als KHD.

Wir wollen noch bemerken, daß man dem Producte ϑh das Zeichen $+$, oder $-$ geben muß, jenachdem die Differenz $X - x_0$ poſitiv, oder negativ iſt, und daß das doppelte Zeichen auf $+$, oder $-$ reducirt werden muß, jenachdem die Größe a die erſte, oder die zweite der Gleichungen:

$$f(x_0 + \vartheta a,\ y_0 + \Theta A a) = M(0, A),$$
$$f(x_0 + \vartheta a,\ y_0 - \Theta A a) = M(0 - A)$$

verificirt.

§. 168. Es läßt ſich leicht für alle zwiſchen den Grenzen:

$$x_0,\ x_0 + a,\ y_0 - Aa,\ y_0 + Aa$$

liegenden Werthe der Veränderlichen x, y, für welche die Function:

$$\varphi(x, y) = \frac{df(x, y)}{dx},$$

ſo wie die Functionen $f(x, y)$, $\chi(x, y)$ endlich und ſtetig bleiben, eine größere Zahl als D angeben. Denn wir wollen unter dieſer Vorausſetzung mit B, C zwei Zahlen bezeichnen, welche den größten Zahlenwerthen der Functionen $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$, wenn x und y zwiſchen den erwähnten Grenzen ſich ändern, gleich, oder größer als dieſe Werthe ſind; ſo hat die Ableitung der Function:

$$f(x \pm \vartheta h,\ y \pm \Theta A h) - f(x, y)$$

in Beziehung auf h, nämlich:

$$\pm \vartheta \varphi(x \pm \vartheta h,\ y \pm \Theta A h) \pm \Theta A \chi(x \pm \vartheta h,\ y \pm \Theta A h)$$

offenbar einen kleinern Zahlenwerth, als die Summe $B + AC$, und daſſelbe gilt von jedem Ausdrucke, in welchen ſich dieſe Ableitung verwandelt, wenn man die Zahl h durch einen kleinern Coefficienten, als die Einheit multiplicirt. Nun iſt aber vermöge der Gleichung:

$$\frac{F(h) - f(0)}{h} = F'(\vartheta h)$$

das Verhältniß:

$$\frac{f(x \pm \vartheta h, y \pm \Theta A h) - f(x, y)}{h}$$

einem Ausdrucke dieſer Art gleich; folglich iſt der größte Zahlenwerth dieſes Verhältniſſes oder der Bruch $\frac{D}{h}$ ſelbſt kleiner, als die Summe $B + AC$, und die Zahl D kann folglich nicht größer ſein, als das Product $(B + AC)h$. Die Grenze des begangenen Fehlers iſt alſo:

$(B+AC)KHh$ oder $(B+AC)He^{CH}h$.

Nimmt man wieder an, daß die Größe a einer der beiden Gleichungen:

$$f(x_0+\vartheta a,\ y_0+\Theta A a)=M(0,A),$$
$$f(x_0+\vartheta a,\ y_0-\Theta A) \ =M(0-A)$$

genügt, ſo kann man für B und C die größten Zahlenwerthe nehmen, welche die Functionen $\varphi(x, y)$ und $\chi(x, y)$ annehmen, wenn ſich x zwiſchen den Grenzen x_0, x_0+a und y zwiſchen den Grenzen y_0, y_0+Aa, oder y_0, y_0-Aa ändert.

Wenn die Function $\varphi(x, y)$ für $x=x_0$ unendlich würde, ſo würde auch die Größe B unendlich, und man könnte den begangenen Fehler vermittelſt des vorhergehenden Ausdruckes nicht mehr beſtimmen, wie klein die Differenz $X-x_0$ auch ſein mag. Allein in dieſem Falle läßt ſich durch das folgende Verfahren gewöhnlich leicht eine größere Zahl als D beſtimmen.

Wenn man in dem Ausdrucke:

$$\pm\vartheta\varphi(x\pm\vartheta h,\ y\pm\Theta Ah)\pm\Theta A\chi(x\pm\vartheta h,\ y\pm\Theta Ah)$$

t für h ſetzt, dann mit dt multiplicirt und zwiſchen den Grenzen $t=0$, $t=h$ integrirt; ſo iſt das Integral:

$$\int_0^h[\pm\vartheta\varphi(x\pm\vartheta t,\ y\pm\Theta At)\pm\Theta A\chi(x\pm\vartheta t,\ y\pm\Theta At]dt$$

genau gleich:

$$f(x\pm\vartheta h,\ y\pm\Theta Ah)-f(x,y),$$

wo ϑ und Θ mit dem Zeichen $+$, oder mit dem Zeichen $-$ genommen werden, jenachdem die eine, oder die andere der bereits erwähnten Bedingungen erfüllt wird. Es bezeichne nun $f(t)$ die unter dem Integralzeichen ſtehende Function und T eine andere Function von t, welche zwiſchen den Grenzen $t=0$, $t=h$ ſtets poſitiv und größer, als der Zahlenwerth von $f(t)$ bleibt. Da die beiden Binome $T-f(t)$, $T+f(t)$ zwiſchen dieſen Grenzen immer poſitive Werthe haben, ſo gilt daſſelbe auch von den beiden Integralen:

$$\int_0^h[T-f(t)]dt=\int_0^h T\,dt-\int_0^h f(t)\,dt,$$
$$\int_0^h[T+f(t)]\,dt=\int_0^h T dt+\int_0^h f(t)\,dt,$$

und folglich hat der Ausdruck $\int_0^h f(t)\,dt$ einen kleinern Zahlenwerth, als die poſitive Größe $\int_0^h T dt$. Man kann alſo für die Zahl D das Integral $\int_0^h T dt$ ſubſtituiren, und die Beſtimmung dieſer Zahl iſt auf die der Function T zurückgeführt.

§. 169. Wenn die beiden Functionen $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$ für die zwiſchen den Grenzen:

$$x_0,\ x+a,\ y_0-Aa,\ y_0+Aa$$

liegenden Werthe der Veränderlichen x, y immer endliche und kleinere Werthe, als die Zahlen B, C behalten, ſo überſteigt der Zahlenwerth von $f(t)$ die Summe $B+AC$ nicht, und wenn man dieſe Summe für die Function T ſubſtituirt; ſo wird das Integral $\int_0^h T dt$ auf den Ausdruck $(B+AC)h$ reducirt.

Wenn die Function $\varphi(x, y)$ für $x=x_0$ unendlich wird, ſo kann man für die Function T weder die Summe $B+AC$, noch eine conſtante Größe ſetzen. Es ſei z. B.:

$$f(x,y)=f_1(x,y)+(x-x_0)^\mu f_2(x,y),$$

wo μ eine kleinere Zahl als die Einheit bezeichnet, und $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ ſeien zwei neue Functionen, welche, ſo wie ihre Ableitungen der erſten Ordnung, für $x=x_0$ endliche Werthe behalten. Ferner ſeien $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $\chi_1(x, y)$, $\chi_2(x, y)$ die Ableitungen der Functionen $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ in Beziehung auf die beiden Veränderlichen x, y, und A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 Zahlen, welche den größten Zahlenwerthen, welche dieſe Functionen zwiſchen den Grenzen:

$$x=x_0,\ x=x_0+a;\ y=y_0-Aa,\ y=y_0+Aa$$

annehmen können, gleich, oder größer als dieſelben ſind; ſo hat man:

$$\varphi(x,y)=\varphi_1(x,y)+(x-x_0)^\mu\varphi_2(x,y)+\frac{\mu}{(x-x_0)^{1-\mu}}f_2(x,y),$$

$$\chi(x,y)=\chi_1(x,y)+(x-x_0)^\mu\chi_2(x,y),$$

$$f(t)=\pm\vartheta\varphi_1(x\pm\vartheta t,\ y\pm\Theta At)\pm\Theta A\chi_1(x\pm\vartheta t,\ y\pm\Theta At)$$
$$+(x-x_0\pm\vartheta t)^\mu[\pm\vartheta\varphi_2(x\pm\vartheta t, y\pm\Theta At)\pm\Theta A\chi_2(x\pm\vartheta t, y\pm\Theta At)]$$
$$\pm\frac{\mu\vartheta}{(x-x_0\pm\vartheta t)^{1-\mu}}f_2(x\pm\vartheta t,\ y\pm\Theta At).$$

Es iſt nun noch eine Function T zu finden, welche beſtändig poſitiv und größer als der Zahlenwerth von $f(t)$ bleibt, wenn ſich t zwiſchen den Grenzen 0 und h, ferner ϑ und Θ zwiſchen den Grenzen 0 und 1, dann x und $\pm\vartheta t$ zwiſchen den Grenzen x_0, X und endlich y und $y\pm\Theta At$ zwiſchen den Grenzen y_0-Aa, $y+Aa$ ändern, indem man vor die Zahl ϑ das Zeichen der Differenz $X-x_0$ ſetzt, und folglich $x-x_0$ und $\pm\vartheta t$ als zwei Größen von einerlei Zeichen betrachtet. Nun iſt aber leicht einzuſehen, daß man eine Function von t erhält, welche alle dieſe Bedingungen erfüllt, wenn man in dem Werthe von $f(t)$ die Polynome:

$$\pm\vartheta\varphi_1(x\pm\vartheta t,\ y\pm\Theta At)\pm\Theta A\chi_1(x\pm\vartheta t,\ y\pm\Theta At),$$
$$\pm\vartheta\varphi_2(x\pm\vartheta t,\ y\pm\Theta At)\pm\Theta A\chi_2(x\pm\vartheta t,\ y\pm\Theta At)$$

durch die beiden Summen:

$$B_1 + A_1 C,\ B_2 + A_2 C,$$

die Function:

$$f_2(x \pm \vartheta t,\ y \pm \Theta \Delta t)$$

durch A_2, die Potenz $(x - x_0 \pm \vartheta t)^\mu$ durch den Zahlenwerth von $(X - x_0)^\mu$, d. h. durch H^μ und endlich das Verhältniß:

$$\pm \frac{\mu \vartheta}{(x - x_0 \pm \vartheta t)^{1-\mu}}$$

durch den Ausdruck:

$$\frac{\mu \vartheta}{(\vartheta t)^{1-\mu}} = \mu \vartheta^\mu t^{\mu-1},$$

für welchen man das Product $\mu t^{\mu-1}$ subſtituiren kann, erſetzt. Man kann folglich ſetzen:

$$T = B_1 + AC_1 + (B_2 + AC_2) H^\mu + \mu A_2 t^{\mu-1}$$

und alsdann ergiebt ſich:

$$\int_0^h T dt = [B_1 + AC_1 + (B_2 + AC_2) H^\mu] h + A_2 h^\mu.$$

Wenn man geſetzt hätte:

$$f(x, y) = f_1(x, y) + (x - x_0)\, 1(x - x_0)\, f_2(x, y),$$

ſo hätte man gefunden:

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + (x - x_0) 1(x - x_0)\, \varphi_2(x, y) + [1 + 1(x - x_0)]\, f_2(x, y),$$

$$\chi(x, y) = \chi_1(x, y) + (x - x_0)\, 1(x - x_0)\, \chi_2(x, y),$$

und auf dieſelbe Weiſe, wie weiter oben, wäre man für ſehr kleine Werthe von h zu den Gleichungen:

$$T = B_1 + AC_1 + (B_2 + AC_2) H^\mu + A_2 (1 + 1h),$$

$$\int_0^h T dt = [B_1 + AC_1 + (B_2 + AC_2) H^\mu] h + A_2 h 1 h$$

gelangt.

Endlich wollen wir ſetzen:

$$f(x, y) = u f_1(x, y) + v f_2(x, y) + w f_3(x, y) + \text{etc.},$$

wo $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$, ... neue Functionen ſind, welche nebſt ihren Ableitungen der erſten Ordnung für $x = x_0$ endliche Werthe behalten, und u, v, w, ... Functionen der einen Veränderlichen x bezeichnen. Wenn man mit v, v, w die größten Zahlenwerthe bezeichnet, welche die Functionen u, v, w, ... zwiſchen den Grenzen $x = x_0$, $x = X$ annehmen können, mit $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, ... die Werthe von u, v, w, ..., wenn man $x \pm \vartheta t$ für x ſetzt und mit T_1, T_2, T_3, ... poſitive Functionen von t, welche zwiſchen den Grenzen $t = 0$, $t = h$ beſtändig größer ſind, als die

Zahlenwerthe von $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, ...; so findet, wenn man ähnliche Bezeichnungen, wie früher anwendet:

$$T=(B_1+AC_1)U+(B_2+AC_2)V+\ldots+A_1T_1+A_2T_2+\ldots,$$

und folglich:

$$\int_0^h T\,dt=[(B_1+AC_1)U+(B_2+AC_2\ldots)V]h + A_1\int_0^h T_1\,dt+A_2\int_0^h T_2\,dt+\ldots.$$

Wenn man z. B. setzt:

$$u=x^\lambda,\ v=y^\mu,\ w=z^\nu,\ldots,$$

wo λ, μ, ν kleinere Zahlen als die Einheit bezeichnen; so hat man:

$$\int_0^h T\,dt=[(B_1+AC_1)H^\lambda+(B_2+AC_2)H^\mu\ldots]h+A_1h^\lambda+A_2h^\mu+\ldots$$

§. 170. Wir wollen nun annehmen, daß man den $x=X$ entsprechenden Werth von y mit einem gegebenen Grade von Annäherung, z. B. so berechnen will, daß der begangene Fehler kleiner als eine Decimalbrucheinheit der m^{ten} Ordnung, d. h. kleiner als $\left(\frac{1}{10}\right)^m$ ist. Zu diesem Zwecke braucht man der Zahl h nur einen solchen Werth beizulegen, daß der Ausdruck KHD den Werth $\left(\frac{1}{10}\right)^m$ nicht überschreitet, so daß man folglich hat:

$$D<\frac{e^{-CH}}{(10)^m H}$$

und für die Elemente der Differenz $X-x_0$ Größen zu nehmen, deren absolute Werthe kleiner sind, als dieselbe Zahl. In dem Falle, wo es gestattet ist, für die Zahl D den Ausdruck $(B+AC)h$ zu substituiren, genügt man der vorhergehenden Ungleichheit, wenn man setzt:

$$h<\frac{e^{-CH}}{(10)^m(B+AC)H}.$$

§. 171 Zum bessern Verständniß der eben aufgestellten allgemeinen Sätze wollen wir dieselben auf einige Beispiele anwenden, und zuvörderst annehmen, daß die Veränderliche y der Differenzialgleichung:

$$dy=\cos\frac{x+y}{5}\,dx$$

genügen müsse. Da man hat:

$$f(x,y)=\cos\frac{x+y}{5},\ \varphi(x,y)=\chi(x,y)=-\tfrac{1}{5}\sin\frac{x+y}{5},$$

so ist klar, daß die drei Functionen:

$$f(x,y),\ \varphi(x,y),\ \chi(x,y)$$

für beliebige Werthe der Veränderlichen x, y endlich und stetig bleiben. Da ferner die Zahlenwerthe der Function $f(x,y)$ und ihrer Ableitungen immer den beiden Zahlen 1 und $\frac{1}{5}$ gleich, oder größer als dieselben sind, so kann man $A=1$, $B=C=\frac{1}{5}$ nehmen, was für Werthe x_0, X und y_0 auch haben mögen. Um also den bei der Berechnung eines besondern Werthes von y begangenen Fehler kleiner als $\frac{1}{(10)^m}$ zu machen, braucht man h nur so anzunehmen, daß man hat:

$$h < \frac{5}{2\,(10)^m\,H}\,e^{-\frac{H}{5}}.$$

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß die Veränderliche y mit x verschwinden soll, und daß man den $x=1$ entsprechenden Werth von y bis auf $\frac{1}{10}$ genau berechnen will; so hat man in diesem Falle:

$$m=1,\ x_0=0,\ y_0=0,\ X=1,\ X-x_0=H=1,$$

$$h<\tfrac{1}{4}(2{,}71828\ldots)^{-\frac{1}{5}}=0{,}2046\ldots,$$

und man kann behaupten, daß der begangene Fehler kleiner als $\frac{1}{10}$ ist, wenn jedes Element der Differenz $X-x_0$ kleiner als 0,2046.... ist. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn man $X-x_0=1$ in fünf Elemente theilt, wovon jedes $=0{,}2$ ist. Wir wollen daher setzen:

$$x_1=0{,}2,\ x_2=0{,}4,\ x_3=0{,}6,\ x_4=0{,}8,\ldots,$$

so geben die obigen Formeln:

$$y_1=0{,}2,$$

$$\frac{x_1+y_1}{5}=0{,}08\quad=(0{,}0509\ldots)\,\frac{\pi}{2},$$

$$y_2=0{,}2\quad+0{,}2\cos(5^\circ{,}09)=0{,}399\ldots,$$

$$\frac{x_2+y_2}{5}=0{,}1598=(0{,}1017\ldots)\,\frac{\pi}{2},$$

$$y_3=0{,}399\ldots+0{,}2\cos(10^\circ{,}17)=0{,}596\ldots,$$

$$\frac{x_3+y_3}{5}=0{,}2393\ldots=(0{,}1523\ldots)\,\frac{\pi}{2},$$

$$y_4=0{,}596\ldots+0{,}2\cos(15^\circ{,}23)=0{,}791\ldots,$$

$$\frac{x_4+y_4}{5}=0{,}3181\ldots=(0{,}2025\ldots)\,\frac{\pi}{2},$$

$$Y=0{,}791\ldots+0{,}2\cos(20^\circ{,}25)=0{,}980.$$

Der gesuchte Werth von y ist also sehr wenig von der Zahl 0,980.... verschieden, und wenn man denselben dieser Zahl gleich setzt; so ist der begangene Fehler kleiner als $\frac{1}{10}$. Die Richtigkeit dieser Folgerung läßt sich leicht darthun; denn aus der Differenzialgleichung:

$$dy = \cos\frac{x+y}{5}\,dx$$

folgt:

$$dy + dx = 2\cos^2\frac{x+y}{10}\,dx,\quad \frac{dx}{5} = \frac{\frac{x+y}{10}}{\cos^2\frac{x+y}{10}}$$

und wenn man die beiden Theile dieser letzten Gleichung so integrirt, daß y mit x verschwindet; so hat man:

$$\frac{x}{5} = \text{tang}\,\frac{x+y}{10},\quad y = -x + 10\,\text{arc tang}\,\frac{x}{5}.$$

Setzt man nun $x=1$, so findet man:

$$y = 10\,\text{arc tang}\,\tfrac{1}{5} - 1 = 0{,}973952\ldots$$

und folglich wäre der begangene Fehler, wenn man 0,980.... für den Näherungswerth von y nähme, kleiner als $\frac{1}{10}$ und selbst kleiner als $\frac{1}{100}$.

Wenn man die Differenzialgleichung:

$$dy = \frac{dx}{1+x^2+y^2}$$

betrachtet, so hat man:

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2},$$

$$\varphi(x,y) = -\frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2},$$

$$\chi(x,y) = -\frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Da aber 1 und $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ die größten Werthe der Verhältnisse $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ sind, so ist klar, daß von diesen beiden Zahlen die erste immer größer, als der Zahlenwerth der Function $f(x, y)$ und die zweite größer, als die Zahlenwerthe der beiden abgeleiten Functionen $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$ ist, und man kann folglich setzen:

$$A = 1,\quad B = C = \frac{3\sqrt{3}}{8},\quad B + AC = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

was für Werthe übrigens die Größen x_0, X und y_0 auch haben mögen. Hieraus folgt, daß man, um den bei der Berechnung eines besondern Werthes von y begangenen Fehler kleiner als $\frac{1}{(10)^m}$ zu machen, h nur so anzunehmen braucht, daß der Ungleichheit:

$$h < \frac{4\sqrt{3}}{9\,(10)^m\,\mathrm{H}}\, e^{-\frac{3}{8}\mathrm{H}\sqrt{3}}$$

genügt wird.

Es ist zu bemerken, daß die Differenzialgleichung:

$$dy = \frac{dx}{1+x^2+y^2}$$

zu denen gehört, welche sich nicht genau integriren lassen.

Betrachten wir noch die Differenzialgleichung:

$$dy = \operatorname{tang}(x^2+y^2)\,dx\,.$$

und nehmen an, daß die Function y mit x verschwinden muß; so kann man nach der vorhergehenden Methode die besondern Werthe von y berechnen, welche zwischen den Grenzen:

$$y_0 = 0,\quad \mathrm{Y} = \pm 0{,}7519$$

liegenden Werthen von x entsprechen. Die Zahlenwerthe der beiden Functionen:

$$\varphi(x,y) = 2x\,[1+\operatorname{tang}^2(x^2+y^2)]$$

und:

$$\chi(x,y) = 2y\,[1+\operatorname{tang}^2(x^2+y^2)]$$

übersteigen also die Zahlen:

$$\mathrm{B} = 3{,}1157\ldots,\ \text{und}\ \mathrm{C} = 2{,}3847\ldots$$

nicht, und folglich ist der bei der Berechnung eines besondern Werthes von y begangene Fehler kleiner als $\left(\frac{1}{10}\right)^m$, wenn man setzt:

$$h < \frac{0{,}2023\ldots e^{-2{,}3847\ldots\,\mathrm{H}}}{(10)^m\mathrm{H}}\,.$$

Endlich wollen wir noch die Differenzialgleichung:

$$dy = \left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

betrachten und annehmen, daß die Function $y = 1$ werden muß für $x = 0$. Will man nun die positiven Werthen von x entsprechenden Werthe von y berechnen, so ergiebt sich in dieser Voraussetzung aus der Gleichung:

$$f(x_0+\vartheta a,\ y_0+\Theta\mathrm{A}a) = \mathrm{M}\,(0,\mathrm{A})$$

folgende:

$$\vartheta a^{\frac{1}{2}} + (1+\Theta\mathrm{A}a)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{M}\,(0,\mathrm{A}),$$

welcher für jeden Werth von A genügt wird, wenn man die positive Größe a vermittelst der Gleichung:

$$a^{\frac{1}{2}} + (1+\mathrm{A}a)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{A}$$

bestimmt. Wird diese Bedingung erfüllt, so ist klar, daß, wenn

man $X=a$, oder $X<a$ nimmt, der $x=X$ entsprechende Werth von y zwischen den Grenzen 1, $1+Aa$ und der Werth der Function $\chi(x, y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt. Demnach reduciren sich die in der Ungleichheit:

$$[B_1+AC_1+(B_2+AC_2)H^{\mu}]h+Ah^{\mu}<\frac{e^{-CH}}{(10)^{\mu}H}$$

vorkommenden Größen B_1, C_1, B_2, C_2 resp. auf:

$$B_1=0,\ C_1=\tfrac{1}{2},\ B_2=0,\ C_2=0,$$

und aus dieser Ungleichheit ergiebt sich:

$$\tfrac{1}{2}h+h^{\frac{1}{2}}<\frac{e^{-\frac{1}{2}H}}{(10)^m AH},$$

oder was dasselbe ist:

$$(h^{\frac{1}{2}}+1)^2<\frac{2e^{-\frac{1}{2}H}}{(10)^m AH}+1;$$

und folglich:

$$h^{\frac{1}{2}}+1<\left[\frac{2e^{-\frac{1}{2}H}}{(10)^m AH}+1\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$h<2+\frac{2e^{-\frac{1}{2}H}}{(10)^m AH}-2\left[\frac{2e^{-\frac{1}{2}H}}{(10)^m AH}+1\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Wenn man, um die Begriffe zu fixiren, $a=X=H$ setzt, so verwandelt sich die Gleichung:

$$a^{\frac{1}{2}}+(1+Aa)^{\frac{1}{2}}=A$$

in folgende:

$$H^{\frac{1}{2}}+(1+AH)^{\frac{1}{2}}=A,$$

oder:

$$\left[(1+AH)^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}H\right]^{\frac{1}{2}}=1+H^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{4}H^2,$$

und hieraus folgt, wenn man aus beiden Theilen die positiven Wurzeln auszieht:

$$(1+AH)^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{2}H=\left[1+H^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{4}H^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$A=\tfrac{1}{2}H+H^{\frac{1}{2}}+\left(1+H^{\frac{1}{2}}-\tfrac{1}{4}H^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Vermittelst dieses Werthes von A erhält man die Bedingung, welcher die Zahl h genügen muß, damit der bei der Berechnung des $x=X=H$ entsprechenden Werthes von y begangene Fehler die Grenze $(\frac{1}{10})^m$ nicht überschreitet.

§. 172. Die eben auseinandergesetzte Methode gewährt den Vortheil, daß sie zeigt, daß y_n gegen eine feste Grenze convergirt, wenn x ohne Ende zunimmt, und daß es eine Function y giebt,

welche der gegebenen Differenzialgleichung Genüge leistet. Wenn man *a priori* annimmt, daß die Function y existirt, so kann der begangene Fehler auf die Hälfte reducirt werden; denn der x_{n+1} entsprechende Werth von y läßt sich auf folgende Form bringen:

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h + f'(x_n + \vartheta h, y_n \pm \vartheta A h)\frac{\Delta x^2}{2}$$

und der Näherungswerth von y wird nach unserer Methode durch die Gleichung:

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h$$

gegeben, und folglich wird der Werth von y_n, wenn man die Differenz $x_{n+1} - x_n$ in unendlich kleine Elemente zerlegt, um die Größe:

$$f'(x + \vartheta h,\ y \pm \vartheta A h)\frac{h^2}{2}$$

geändert, welche kleiner ist als $(B + AC)\frac{h^2}{2}$, d. h. kleiner als die Hälfte des vorhin angenommenen Werthes. Wenn man also mit e den begangenen Fehler bezeichnet, so kann man im Allgemeinen setzen:

$$e < \frac{B + AC}{2}\left[\frac{(1 + Ch)^2 - 1}{C}\right]h.$$

§. 173. Man kann die Differenzialgleichungen der ersten Ordnung auch noch durch andere Methoden näherungsweise integriren und diese neuen Methoden verdienen sogar den Vorzug, weil sie die Grenzen enger zusammenziehen, zwischen welchen die Werthe der Unbekannten liegen. Wir wollen wieder annehmen, daß die Function y der Differenzialgleichung:

$$dy = f(x, y)\,dx$$

genügen und für $x = x_0$ den besondern Werth y_0 annehmen muß, und man verlangt einen andern besondern Werth von y, nämlich den $x = X$ entsprechenden. Ferner wollen wir annehmen, daß X zwischen den Grenzen x_0, $x_0 + a$ liegt, und endlich mit $y = F(x)$ die unbekannte Function von x bezeichnen, welche die beiden vorhergehenden Bedingungen erfüllt. Diese Function nimmt, wie bereits bemerkt worden, von $x = x_0$ bis $x = X$ immer zu oder ab, ohne daß sie die Grenze $y_0 + Aa$, oder $y_0 - Aa$ überschreiten kann. Da man ferner hat:

$$dF(x) = f[x, F(x)]\,dx,$$

so ergiebt sich daraus durch Integration:

$$F(X) - F(x_0) = \int_{x_0}^{X} f[x, F(x)]\,dx.$$

Das Integral im zweiten Theile dieser letzten Gleichung ist dem Producte aus der Differenz $X - x_0$ und aus einer Mittelgröße zwischen den verschiedenen Werthen, welche die Function $f[x, F(x)]$ annimmt, wenn sich x zwischen den Grenzen x_0, X ändert, oder

aus einer Mittelgröße zwiſchen den verſchiedenen Werthen, welche die Function $f(x, y)$ annimmt, wenn man x zwiſchen den Grenzen x_0, X und y zwiſchen den Grenzen $F(x_0)$, $F(X)$ ſich ändern läßt, gleich, und da dieſe Mittelgröße durch einen Ausdruck von der Form:

$$f[x_0 + \vartheta(X - x_0),\ F(x_0) + \Theta[F(X) - F(x_0)],$$

wo ϑ, Θ zwei kleinere Zahlen als die Einheit bezeichnen, dargeſtellt werden kann; ſo hat man, wenn man y_0 für $F(x_0)$ ſetzt:

$$F(X) - y_0 = (X - x_0) f\{x_0 + \vartheta(X - x_0), y_0 + \Theta[F(X) - F(x_0)]\}.$$

Dieſe Gleichung giebt zwar nicht den genauen Werth der unbekannten Größe $F(X)$, aber ſie giebt das Mittel an die Hand, daß man für die Grenzen y_0, $y_0 \pm A\alpha$ andere, oft ſehr zuſammengezogene Grenzen, zwiſchen welchen dieſe Größe liegt, ſubſtituiren kann. Geſetzt z. B., daß dieſe Function $F(x)$ der Differenzialgleichung:

$$dy = \cos\frac{x+y}{5}\,dx$$

genügen und mit x verſchwinden muß, und man verlangt den $x = 1$ entſprechenden Werth von $F(x)$; ſo hat man:

$$F(1) = \cos\left[\frac{\vartheta + \Theta F(1)}{5}\right].$$

Da die Zahlen ϑ, Θ zwiſchen den Grenzen 0 und 1 bleiben müſſen, ſo ſieht man leicht ein, daß der Werth von $F(1)$ poſitiv iſt und abnimmt, wenn die Zahlen ϑ, Θ zunehmen, und daß derſelbe endlich zwiſchen den durch die Gleichungen:

$$Y = \cos 0,\quad Y = \cos\left(\frac{1+Y}{5}\right)$$

gegebenen Werthen von Y liegt. Die erſte dieſer Gleichungen giebt unmittelbar $F(1) = 1$ und die zweite giebt $Y = 0{,}926$. Die halbe Summe dieſer beiden Werthe, nämlich die Zahl 0,963...., iſt folglich der geſuchte Werth der Unbekannten $F(1)$, wenigſtens bis $\frac{1}{10}$ genau. Wenn man den Werth von $F(X)$ genauer berechnen will, ſo braucht man für die Gleichung:

$$F(X) - y_0 = (X - x_0) f\{x_0 + \vartheta(X - x_0), y_0 + \Theta[F(X) - F(x_0)]\}$$

nur ein Syſtem von Gleichungen von derſelben Form zu ſubſtituiren, und wir wollen nun auf dieſen Gegenſtand etwas näher eingehen.

Wenn man mit $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, $n-1$ verſchiedene und zwiſchen den Grenzen x_0, X liegende Werthe von x bezeichnet, ſo ergiebt ſich aus der Gleichung:

$$dF(x) = f[x, F(x)]\,dx$$

ſucceſſive:

$$F(x_1)-y_0=(x_1-x_0)f\{x_0+\vartheta_0(x_1-x_0),y_0+\Theta_0[F(x_1)-y_0]\},$$

$$F(x_2)-F(x_1)$$
$$=(x_2-x_1)f\{x_1+\vartheta_1(x_2-x_1),F(x_1)+\Theta_1[F(x_2)-F(x_1)]\},$$

. . . . . .

$$F(X)-F(x_{n-1})$$
$$=(X-x_{n-1})f\{x_{n-1}+\vartheta_{n-1}(X-x_{n-1}),F(x_{n-1})+\Theta_{n-1}[F(X)-F(x_{n-1})]\}.$$

Wenn man mit der erſten dieſer Gleichungen, wie mit der Gleichung:

$$F(X)-y_0$$
$$=(X-x_0)f\{x_0+\vartheta(X-x_0),\ y_0+\Theta[F(X)-F(x_0)]\}$$

verfährt, ſo erhält man leicht zwei Grenzen, zwiſchen welchen die Größe $F(x_1)$ liegt, und alsdann ergeben ſich aus der zweiten der vorhergehenden Gleichungen neue Grenzen, zwiſchen welchen die Größe $F(x_2)$ liegt, und wenn man ſo fortfährt; ſo ergeben ſich aus der letzten der obigen Gleichungen zwei Grenzen der geſuchten Größe $F(X)$.

Wenn man dieſe allgemeine Methode auf das bereits angeführte Beiſpiel anwendet und die Differenz $X-x_0=1$ in fünf gleiche Elemente, jedes $=0{,}2$ zerlegt, ſo erhält man:

$$F(0{,}2)=0{,}2.\cos\left[\frac{0{,}2\vartheta_0+\Theta_0F(0{,}2)}{5}\right],$$

$$F(0{,}4)-F(0{,}2)=$$
$$0{,}2.\cos\left\{\frac{0{,}2+F(0{,}2)+0{,}2\vartheta_1+\Theta_1[F(0{,}4)-F(0{,}2)]}{5}\right\},$$

$$F(0{,}6)-F(0{,}4)=$$
$$0{,}2.\cos\left\{\frac{0{,}4+F(0{,}4)+0{,}2\vartheta_2+\Theta_2[F(0{,}6)-F(0{,}4)]}{5}\right\},$$

$$F(0{,}8)-F(0{,}6)=$$
$$0{,}2.\cos\left\{\frac{0{,}6+F(0{,}6)+0{,}2\vartheta_3+\Theta_3[F(0{,}8)-F(0{,}6)]}{5}\right\},$$

$$F(1)-F(0{,}8=$$
$$0{,}2.\cos\left\{\frac{0{,}8+F(0{,}8)+0{,}2.\vartheta_4+\Theta_4[F(1)-F(0{,}8)]}{5}\right\}.$$

Da die Zahlen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \Theta_1, \Theta_2, \ldots$ ſämmtlich kleiner ſind als die Einheit, ſo überzeugt man ſich leicht, daß die durch die vorhergehenden Gleichungen gegebenen Werthe der Größen $F(0{,}2)$, $F(0{,}4)$, $F(0{,}6)$, $F(0{,}8)$, $F(1)$ zwiſchen den durch die folgenden beiden Syſteme von Gleichungen:

$$y_1=0{,}2.\cos(0{,}2), \qquad y_1=0{,}2.\cos\left(\frac{0{,}2+y_1}{5}\right),$$

$$y_2 - y_1 = 0{,}2.\cos\left(\frac{0{,}2+y_1}{5}\right),\quad y_2 - y_1 = 0{,}2.\cos\left(\frac{0{,}4+y_2}{5}\right),$$

$$y_3 - y_2 = 0{,}2.\cos\left(\frac{0{,}4+y_2}{5}\right),\quad y_3 - y_2 = 0{,}2.\cos\left(\frac{0{,}6+y_3}{5}\right),$$

$$y_4 - y_3 = 0{,}2.\cos\left(\frac{0{,}6+y_3}{5}\right),\quad y_4 - y_3 = 0{,}2.\cos\left(\frac{0{,}8+y_4}{5}\right),$$

$$Y - y_4 = 0{,}2\cos\left(\frac{0{,}8+y_4}{5}\right),\quad Y - y_4 = 0{,}2.\cos\left(\frac{1+Y}{5}\right)$$

gegebenen Werthen von y_1, y_2, y_3, y_4, Y liegen. Aus dem ersten Systeme ergiebt sich successive:

$$y_1 = 0{,}2,\quad y_2 = 0{,}39936,\quad y_3 = 0{,}59681,$$
$$y_4 = 0{,}79110,\quad Y = 0{,}98106$$

und aus dem zweiten:

$$y_1 = 0{,}19936,\ y_2 = 0{,}39682,\ y_3 = 0{,}59117,$$
$$y_4 = 0{,}78125,\ Y = 0{,}96598.$$

Wenn man die halbe Summe der Zahlen 0,98106 und 0,96598, nämlich 0,9735, für den Werth der Unbekannten F (1) nimmt, so ist der begangene Fehler kleiner als die halbe Differenz:

$$\frac{0{,}98106 - 0{,}96598}{2} = 0{,}008.$$

§. 174. Wir wollen die Differenzialgleichung:

$$dy = f(x,y)\,dx$$

wieder betrachten und annehmen, daß die Function $f(x, y)$ beständig zu- oder abnimmt, wenn man der Veränderlichen x einen zwischen den Grenzen x_0, X liegenden bestimmten Werth beilegt und y von $y = y_0$ bis $y = y_0 + A\alpha$ sich ändern läßt.

Ferner wollen wir mit $F(x, y) + C$ den Werth des unbestimmten Integrales $\int f(x,y)dx$ bezeichnen, worin die Veränderliche y als eine Constante betrachtet wird, und endlich wollen wir bemerken, daß, wenn drei Functionen u, v, w von x den Bedingungen $v > u$ und $v < w$ für alle zwischen den Grenzen $x = x_0$, $x = X$ liegenden Werthe von x genügen, das zweite der drei Integrale $\int u dx$, $\int v dx$, $\int w dx$ einen Mittelwerth zwischen den Werthen des ersten und dritten bekommt. Da die Function $f[x, F(X)]$ zwischen den genannten Grenzen beständig kleiner als der eine der Ausdrücke:

$$f[x, F(X)],\ f[x, F(x_0)]$$

und größer als der andere ist; so ist der Werth des Integrales:

$$\int_{x_0}^{X} f[x, F(x)dx]$$

eine Mittelgröße zwischen den Werthen der Ausdrücke:

$$\int_{x_0}^{X} f[x, F(X)]dx = F[X, F(X)] - F[x_0, F(X)],$$

$$\int_{x_0}^{X} f[x, F(x_0)]dx = F[X, F(x_0)] - F[x_0, F(x_0)]$$

und kann folglich durch einen Ausdruck von der Form:

$$\int_{x_0}^{X} f\{x, F(x_0) + \vartheta[F(X) - F(x_0)]\}dx$$

$$= F\{X, F(x_0) + \vartheta[F(X) - F(x_0)]\} - F\{x_0, F(x_0) + \Theta[F(X) - F(x_0)]\}$$

dargestellt werden. Man kann also für die Gleichung:

$$F(X) - y_0 = (X - x_0) f\{x_0 + \vartheta(X - x_0),\ y_0 + \Theta[F(X) - y_0]\}$$

die folgende:

$$(a) \quad \begin{cases} F(X) - F(x_0) = F\{X, F(x_0) + \Theta[F(X) - F(x_0)]\} \\ \qquad\qquad - F\{x_0, F(x_0) + \Theta[F(X) - F(x_0)]\} \end{cases}$$

substituiren, und ebenso fände man:

$$(b) \quad \begin{cases} F(x_1) - F(x_0) = F\{x_1, F(x_0) + \Theta_1[F(x_1) - F(x_0)]\} \\ \qquad\qquad - F\{x_0, F(x_0) + \Theta_1[F(x_1) - F(x_0)]\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F(X) - F(x_{n-1}) = F\{X, F(x_{n-1}) + \Theta_{n-1}[F(X) - F(x_{n-1})]\} \\ \qquad\qquad - F\{x_{n-1}, F(x_{n-1}) + \Theta_{n-1}[F(X) - F(x_{n-1})]\}. \end{cases}$$

Vermittelst dieser Gleichungen kann man oft sehr enge Grenzen bestimmen, zwischen welchen der Werth von F (X) liegt, und um die Begriffe zu fixiren, wollen wir wieder die Differenzialgleichung:

$$dy = \cos\left(\frac{x+y}{5}\right)dx$$

betrachten; so haben wir in diesem Falle:

$$f(x, y) = \cos\left(\frac{x+y}{5}\right),$$

$$\int \cos\left(\frac{x+y}{5}\right)dx = 5\sin\left(\frac{x+y}{5}\right) + C.$$

Man kann folglich setzen:

$$F(x, y) = 5\sin\left(\frac{x+y}{5}\right)$$

und vermöge der Gleichung (a) hat man:

$$F(1) = 5\sin\frac{1 + \Theta F(1)}{5} - 5\sin\frac{\Theta F(1)}{5},$$

oder was auf dasselbe hinausläuft:

$$F(1) = 10\sin\tfrac{1}{10}\cos\frac{1 + 2\Theta F(1)}{10}.$$

Da aber die Zahl Θ immer kleiner als die Einheit bleiben muß, so sieht man leicht ein, daß der durch die vorhergehende Gleichung bestimmte Werth von F (1) desto kleiner wird, je größer diese Zahl wird und zwischen den durch die Gleichungen:

$$Y = 10 \sin \tfrac{1}{10}, \quad Y = \sin \tfrac{1}{10} \cos\left(\frac{+2Y}{10}\right)$$

gegebenen Werthen von Y, d. h. zwischen den Werthen 0,9984,.... und 0,9564... liegt. Wenn man die halbe Summe dieser beiden Werthe, nämlich 0,977, für den Werth der Unbekannten F (1) nimmt, so ist der begangene Fehler kleiner, als die halbe Differenz:

$$\frac{0{,}998 - 0{,}956}{2} = 0{,}021.$$

Wenn man, statt F (X) oder F (1) durch eine einzige Gleichung direct zu berechnen, die mittlern Werthe F (0,2), F (0,4),.... anwenden wollte, so ergäbe sich aus den Gleichungen (*b*):

$$F(0{,}2) = 10 \sin(0{,}02) \cos\left[\frac{0{,}2 + 2\Theta_0 F(0{,}2)}{10}\right],$$

$$F(0{,}4) - F(0{,}2) = 10 \sin(0{,}02) \cos\left\{\frac{0{,}6 + 2F(0{,}2) + 2\Theta_1 [F(0{,}4) - F(0{,}2)]}{10}\right\},$$

$$F(0{,}6) - F(0{,}4) = 10 \sin(0{,}02) \cos\left\{\frac{1 + 2F(0{,}4) + 2\Theta_2 [F(0{,}6) - F(0{,}4)]}{10}\right\},$$

$$F(0{,}8) - F(0{,}6) = 10 \sin(0{,}02) \cos\left\{\frac{1{,}4 + 2F(0{,}6) + 2\Theta_3 [F(0{,}8) - F(0{,}4)]}{10}\right\},$$

$$F(1) - F(0{,}8) = 10 \sin(0{,}02) \cos\left\{\frac{1{,}8 + 2F(0{,}8) + 2\Theta_4 [F(1) - F(0{,}8)]}{10}\right\},$$

und man überzeugt sich leicht, daß die durch diese Gleichungen bestimmten Werthe von:

$$F(0{,}2),\ F(0{,}4),\ F(0{,}6),\ F(0{,}8),\ F(1)$$

zunehmen, während die Zahlen $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ abnehmen, und folglich zwischen den durch die beiden Systeme von Gleichungen:

$$y_1 = 10 \sin(0{,}02) \cos(0{,}02), \qquad y_1 = 10 \sin(0{,}02) \cos(0{,}02 + 0{,}2y_1),$$

$$y_2 - y_1 = 10 \sin(0{,}02) \cos(0{,}06 + 0{,}2y_1), \qquad y_2 - y_1 = 10 \sin(0{,}02) \cos(0{,}06 + 0{,}2y_2),$$

$$y_3 - y_2 = 10 \sin(0{,}02) \cos(0{,}10 + 0{,}2y_2), \qquad y_3 - y_2 = 10 \sin(0{,}02) \cos(0{,}10 + 0{,}2y_3),$$

$$y_1 - y_0 = 10 \sin(0{,}02) \cos(0{,}14 + 0{,}2y_0),$$
$$y_2 - y_1 = 10 \sin(0{,}02) \cos(0{,}14 + 0{,}2y_1),$$
$$Y - y_1 = 10 \sin(0{,}02) \cos(0{,}18 + 0{,}2y_2),$$
$$Y - y_2 = 10 \sin(0{,}02) \cos(0{,}18 + 0{,}2Y)$$

bestimmten Werthen von y_1, y_2, y_3, y_4, Y liegen.

Das erste System giebt:

$$y_1 = 0{,}19994, \ldots, \quad y_2 = 0{,}39892, \ldots, \quad y_3 = 0{,}59568 \ldots,$$
$$y_4 = 0{,}78899, \ldots, \quad Y = 0{,}97765, \ldots,$$

das zweite:

$$y_1 = 0{,}19962, \ldots, \quad y_2 = 0{,}39766, \ldots, \quad y_3 = 0{,}59289, \ldots,$$
$$y_4 = 0{,}78413, \ldots, \quad Y = 0{,}97029, \ldots$$

und wenn man die halbe Summe der Werthe von Y nimmt; so erhält man die Zahl 0,9739.... für den Näherungswerth von $F(1)$ mit der Gewißheit, daß der begangene Fehler die halbe Differenz:

$$\frac{0{,}97765 - 0{,}97029}{2} = 0{,}0036$$

nicht überschreitet. Durch die Anwendung der neuen Formeln sind die Fehlergrenzen beträchlich zusammengezogen; denn diese Grenze war anfangs $= \frac{1}{10}$ und ist successive auf 0,008, 0,0036.... reducirt. Um von den letzten Formeln eine neue Anwendung zu geben wollen wir die Differenzialgleichung:

$$dy = (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})\, dx$$

betrachten und annehmen, daß man, indem die Unbekannte $y = F(x)$ mit x verschwinden muß, den $x = 1$ entsprechenden Werth von y verlangt.

Da die Ableitung:

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + [F(x)]^{\frac{1}{2}}$$

positiv ist, so lange sie einen reellen Werth behält, so kann man behaupten, daß die Function $F(x)$ mit x beständig zunimmt, und eben so ist einleuchtend, daß die Function $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$ zunimmt, wenn man y zunehmen läßt, ohne x zu verändern. Dieses vorausgesetzt, giebt die Gleichung (a):

$$F(1) = \tfrac{2}{3} + [\Theta F(1)]^{\frac{1}{2}},$$

oder was auf dasselbe hinausläuft:

$$\{[\Theta F(1)]^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\Theta\}^2 = \tfrac{2}{3}\Theta + \tfrac{1}{4}\Theta^2.$$

Zieht man nun aus beiden Theilen dieser Gleichung die positiven Wurzeln und bemerkt, daß die Größe $\sqrt{\frac{\Theta^2}{4} + \frac{2}{3}\Theta} > \frac{1}{2}\Theta$ nicht $= \frac{1}{2}\Theta - [\Theta F(1)]^{\frac{1}{2}}$ werden kann; so findet man:

$$[\Theta F(1)]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Theta = \sqrt{\frac{\Theta^2}{4} + \frac{2}{3}\Theta},$$

$$F(1) = \frac{\Theta}{2} + \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{\Theta^2}{4} + \frac{2\Theta}{3}}.$$

Da nun die Zahl Θ zwiſchen den Grenzen 0 und 1 bleiben muß, ſo muß der aus der vorhergehenden Gleichung abgeleitete Werth von F (1) zwiſchen den Grenzen:

$$\frac{2}{3} = 0{,}666 \text{ und } \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{3}} = \frac{7}{6} + \sqrt{\frac{11}{12}} = 2{,}1240\ldots$$

bleiben. Um die Grenzen von F (1) mehr zuſammenzuziehen, braucht man nur die Gleichungen (*b*) für die Gleichung (*a*) zu ſubſtituiren. Wenn man, um die Begriffe zu fixiren, die Differenz $X - x_0 = 1$ in 10 gleiche Elemente, jedes = 0,1 zerlegt, ſo ergeben ſich aus den Gleichungen (*b*) die Werthe der Größen:

$$F(0{,}1),\ F(0{,}2),\ F(0{,}3),\ldots,\ F(0{,}9),\ F(1)$$

und man ſieht leicht ein, daß ſie zwiſchen den durch die Gleichungen:

$$y_1 = \tfrac{2}{3}(0{,}1)^{\frac{3}{2}},\quad y_2 - y_1 = \tfrac{2}{3}[(0{,}2)^{\frac{3}{2}} - (0{,}1)^{\frac{3}{2}}] + 0{,}1\sqrt{y_1},\ldots,$$

$$Y - y_9 = \tfrac{2}{3}[1 - (0{,}9)^{\frac{3}{2}}] + 0{,}1\sqrt{y_9},$$

$$y_1 = 0{,}005 + \tfrac{2}{3}[(0{,}1)^{\frac{3}{2}}] + 0{,}1\sqrt{0{,}0025 + \tfrac{2}{3}(0{,}1)},$$

$$y_2 - y_1 = 0{,}005 + \tfrac{2}{3}[(0{,}2)^{\frac{3}{2}} - (0{,}1)^{\frac{3}{2}}]$$

$$+ 0{,}1\sqrt{0{,}0025 + y_1 + \tfrac{2}{3}[(0{,}2)^{\frac{3}{2}} - (0{,}1)^{\frac{3}{2}}]},$$

. . . . . .

$$Y - y_9 = 0{,}005 + \tfrac{2}{3}[1 - (0{,}9)^{\frac{3}{2}}]$$

$$+ 0{,}1\sqrt{0{,}0025 + y_9 + \tfrac{2}{3}[1 - (0{,}9)^{\frac{3}{2}}]}$$

gegebenen Werthen von $y_1, y_2, \ldots, y_9, Y$, d. h. zwiſchen den Werthen:

$y_1 = 0{,}02108$, $y_2 = 0{,}07413$, $y_3 = 0{,}15127$, $y_4 = 0{,}14297$,
$y_5 = 0{,}36624$, $y_6 = 0{,}50089$, $y_7 = 0{,}65226$, $y_8 = 0{,}80961$,
$y_9 = 0{,}99175$, $Y = 1{,}18879$,

und:

$y_1 = 0{,}04143$, $y_2 = 0{,}17368$, $y_3 = 0{,}20935$, $y_4 = 0{,}32551$,
$y_5 = 0{,}46041$, $y_6 = 0{,}61275$, $y_7 = 0{,}78176$, $y_8 = 0{,}96667$,
$y_9 = 1{,}16688$, $Y = 1{,}37687$

liegen. Wenn man die halbe Summe der vorhergehenden Werthe von Y, nämlich 1,28...., für den Näherungswerth von F (1) nimmt, ſo iſt der begangene Fehler kleiner, als die halbe Differenz 0,09. Bei der Anwendung der Gleichungen (*b*) iſt alſo die Zerlegung der Differenz $X - x_0$ in 10 gleiche Elemente hinreichend geweſen, um eins der particulären Integrale der Differenzialgleichung:

$$dy = (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})dx,$$

deren allgemeines Integral ſich durch keine der bekannten Methoden unter endlicher Form erhalten läßt, wenigſtens bis auf $\frac{1}{10}$ genau zu beſtimmen.

Neun und zwanzigste Vorlesung.

Bestimmung aller particulären, oder singulären Integrale, welche einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung angehören können. — Eigenschaften einiger dieser Integrale.

---

§. 176. So oft die beiden Functionen:

$$f(x,y) \text{ und } \chi(x,y) = D_y f(x,y)$$

in der Nähe der besondern Werthe $x = x_0$, $y = y_0$ endlich und stetig bleiben, geben die in den frühern Vorlesungen auseinandergesetzten Methoden einen Werth von y als Function von x, nämlich $y = F(x)$, welcher, wenn diese Function zwischen gewissen Grenzen, wovon die eine kleiner und die andere größer als x_0 ist, stetig bleibt, der doppelten Bedingung genügt, daß er die Differenzialgleichung $dy = f(x,y)\,dx$ verificirt und sich für $x = x_0$ auf y_0 reducirt. Dieser Werth von y ist ein particuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung und in der gemachten Voraussetzung zugleich die einzige stetige Function von x, welche die beiden ausgesprochenen Bedingungen zugleich erfüllen kann. Denn wenn eine andere Function $F(x) + \varphi(x)$ dieselben Eigenschaften besäße, so hätte man nicht blos:

$$F'(x) = f[x, F(x)], \quad F(x_0) = y_0,$$

sondern auch:

$$F(x_0) + \varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi(x_0) = 0,$$
$$F'(x) + \varphi'(x) = f[x, F(x) + \varphi(x)]$$
$$= f[x, F(x)] + \varphi(x)\chi[x, F(x) + \vartheta\varphi(x)],$$

wo ϑ eine kleinere Zahl als die Einheit bezeichnet, und folglich:

$$1 = \frac{\varphi(x)}{\psi'(x)}\chi[x, F(x) + \vartheta\varphi(x)], \quad \varphi(x_0) = 0.$$

Wenn man ferner $x = x_0 + i$ setzt, und der Größe i einen unendlich kleinen Werth giebt, oder was dasselbe ist, wenn man x gegen die Grenze x_0 convergiren läßt; so bekommt der Bruch:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} = \frac{\varphi(x_0 + i)}{\varphi'(x_0 + i)},$$

wie sein Zähler, Werthe, welche nahezu Null sind, während die Function:

$$\chi[x, F(x)+\vartheta\varphi(x)]$$

gegen die Grenze $\chi(x_0, y_0)$ convergirt. Man hätte folglich:

$$1=0\times\chi(x_0, y_0),$$

oder:

$$\chi(x_0, y_0)=\infty,$$

was gegen die Voraussetzung wäre.

§. 177. Aber dennoch kann man sich auch unter dieser Voraussetzung verschiedene Functionen von x denken, welche zur Erfüllung der ausgesprochenen Bedingungen gleich geeignet sind und in der Nähe des besondern Werthes $x=x_0$ zusammenfallen, aber für gewisse merklich von x_0 verschiedene Werthe von x divergiren. Es kann sogar geschehen, daß mehrere dieser Functionen für alle Werthe von x stetig bleiben. Wenn z. B. die Veränderliche y der Differenzialgleichung:

$$(x+1)\,dy-(y+1)\,dx=0$$

genügen und zugleich mit x verschwinden muß, so erfüllen die beiden Functionen:

$$y=x,\ y=\tfrac{1}{2}[x-1+\sqrt{(x+1)^2}]$$

die eine, wie die andere diese beiden Bedingungen, und da die Wurzelgröße $\sqrt{(x+1)^2}$ in allen Fällen als eine positive Größe ausdrückend, betrachtet wird; so ist klar, daß der zweite Werth von y mit dem ersten übereinstimmt, so lange $x+1$ als positiv betrachtet wird und sich auf $y=-1$ reducirt, wenn $x+1$ negativ wird.

Wenn man annimmt, daß die als Function von x betrachtete Veränderliche y sich für gewisse Werthe von x plötzlich ändern kann, so kann man sie leicht successive mit mehreren particulären Integralen zusammenfallen oder übereinstimmen lassen. Denn es seien:

$$y=F_0(x),\ y=F_1(x),\ldots,\ y=F_m(x)$$

mehrere solcher Integrale, so braucht man, wenn y von $x=-\infty$ bis $x=x_1$ mit dem ersten, von $x=x_1$ bis $x=x_2$ mit dem zweiten,..... und endlich von $x=x_m$ bis $x=+\infty$ mit dem letzten übereinstimmen oder zusammenfallen soll, nur zu setzen:

$$y=\frac{F_0(x)+F_m(x)}{2}+\frac{F_1(x)-F(x_0)}{2}\,\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2}}+\ldots$$
$$+\frac{F_m(x)F_{m-1}(x)}{2}\,\frac{x-x_m}{\sqrt{(x-x_m)^2}}.$$

Man könnte auch annehmen, daß einige der Functionen $F_0(x)$, $F_1(x)$,.... particuläre und die übrigen singuläre Integrale der Differenzialgleichung:

$$dy = f(x, y)\,dx$$

ausdrücken, in welchem Falle der vorhergehende Werth von y succeſſive mit dieſen beiden Arten von Integralen zuſammenfiele oder übereinſtimmte. Wenn z. B. die Differenzialgleichung:

$$dy = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

gegeben wäre, ſo ſieht man leicht ein, daß die Function:

$$y = \tfrac{1}{2}(x + \sqrt{x^2})$$

für alle poſitiven Werthe von x mit dem particulären Integrale $y = x$, und für alle negative Werthe von x mit dem ſingulären Integrale $y = 0$ übereinſtimmt.

Wenn die Functionen $F_0(x)$, $F_1(x)$, ... particuläre Integrale ausdrücken, ſo muß die Function:

$$y = \frac{F_0(x) + F_m(x)}{2} + \frac{F_1(x) - F_0(x)}{2} \cdot \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2}} + \ldots$$

als in dem allgemeinen Integrale enthalten, angeſehen werden, woraus ſie abgeleitet wird, wenn man der willkührlichen Conſtante einen ausgedehntern Werth beilegt. Denn es ſei:

$$y = F(x, C)$$

das allgemeine Integral der Differenzialgleichung $dy = f(x, y)\,dx$ und $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_m$ ſeien die beſondern Werthe der willkührlichen Conſtante C, welche dieſes allgemeine Integral mit den Functionen $y = F_0(x)$, $y = F_1(x)$, ... zuſammenfallen machen; ſo braucht man, um die Gleichung $y = F(x, C)$ mit der folgenden:

$$y = \frac{F_1(x) + F_m(x)}{2} + \frac{F_1(x) - F_0(x)}{2} \cdot \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2}} + \ldots$$

übereinſtimmen zu machen, nur zu ſetzen:

$$C = \frac{C_0 + C_m}{2} + \frac{C_1 - C_0}{2} \cdot \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2}} + \ldots \frac{C_m - C_{m-1}}{2} \cdot \frac{x - x_m}{\sqrt{(x - x_m)^2}}.$$

§. 178. Es ſei nun $y = F(x)$ irgend eine Function von x, welche der Differenzialgleichung $dy = f(x, y)\,dx$ Genüge leiſtet. Wenn jede der Functionen:

$$f[x, F(x)], \quad \chi[x, F(x)]$$

für alle möglichen Werthe, oder wenigſtens für alle zwiſchen gewiſſen Grenzen liegenden Werthe von x, endlich und ſtetig bleibt; ſo kann man nach Belieben irgend einen dieſer Werthe für den mit x_0 bezeichneten nehmen, und folglich ſtimmt $y = F(x)$ wenigſtens für die zwiſchen gewiſſen Grenzen liegenden Werthe von x mit einem der bereits betrachteten particulären Integrale überein. Folglich könnte $y = F(x)$ kein ſinguläres, oder particuläres Integral ſein, welches immer von den vorhin betrachteten verſchieden wäre, ausgenommen in dem Falle, wo eine der beiden Functionen:

$$F'(x)=f[x,F(x)],\quad \chi[x,F(x)]$$

nicht mehr für alle möglichen Werthe der Veränderlichen x endlich und ſtetig bleibt. Dieſe Bedingung kann aber nur in dem Falle erfüllt werden, wo dieſe Functionen beſtändig unendlich, oder unbeſtimmt werden, und da die Function $F'(x)=f[x,F(x)]$ nicht fortwährend unendlich ſein kann, ohne daß daſſelbe mit $F(x)$ der Fall iſt; ſo folgt, daß die Function $F(x)$, wenn das Integral $y=F(x)$ immer von den in den letzten Vorleſungen betrachteten verſchieden und nicht für jeden Werth von x die Function $F(x)=\pm\infty$ iſt, für alle Werthe von x eine der Bedingungen:

$$f(x,y)=\tfrac{0}{0},\ \chi[x,F(x)]=\tfrac{0}{0},\ \chi[x,F(x)]=\tfrac{1}{0},$$

oder daß das Integral $y=F(x)$ eine der Gleichungen:

$$f(x,y)=\tfrac{0}{0},\ \chi(x,y)=\tfrac{0}{0},\ \frac{1}{\chi(x,y)}=0$$

erfüllt.

Wenn das Integral $F(x)$ nur für die zwiſchen gewiſſen Grenzen liegenden Werthe von x von allen in den letzten Vorleſungen betrachteten Integralen völlig verſchieden ſein müßte; ſo könnte man ebenfalls noch behaupten, daß dieſes Integral einer dieſer drei Gleichungen genügt, aber blos für Werthe von x, welche zwiſchen den erwähnten Grenzen liegen. Wenn man dieſe allgemeinen Principien auf die beiden Differenzialgleichungen:

$$dy=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}dy,\ dy=y1ydx$$

anwendet, ſo findet man ſucceſſive:

$$f(x,y)=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}},\ \chi(x,y)=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}},$$

$$f(x,y)=y1y,\ \chi(x,y)=1+1y.$$

Die vier vorhergehenden Functionen werden für keinen Werth der als eine Function von x betrachteten Veränderlichen y unbeſtimmt; aber die zweite und vierte werden unendlich, und folglich wird die Gleichung $\frac{1}{\chi(x,y)}=0$ erfüllt, wenn man dieſer Veränderlichen den Werth $y=0$ beilegt, welcher ein ſinguläres Integral der Differenzialgleichung $dy=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}dx$ und ein particuläres Integral der Differenzialgleichung $dy=y1.ydx$ iſt. Wir wollen ferner ſetzen:

$$dy=\frac{y^2dx}{\sin\frac{1}{y}},$$

ſo werden in dieſer Vorausſetzung die Bedingungsgleichungen:

$$\frac{y^2}{\sin\frac{1}{y}}=\frac{0}{0},\quad \frac{2y\sin\frac{1}{y}+\cos\frac{1}{y}}{\sin^2\frac{1}{y}}=\frac{0}{0},\quad \frac{\sin^2\frac{1}{y}}{2y\sin\frac{1}{y}+\cos\frac{1}{y}}=0,$$

wovon die beiden erſten nur dann erfüllt werden können, wenn $\frac{1}{y}=\pm\infty$ oder $y=0$ iſt. Setzt man übrigens:

$$y=\pm\frac{1}{n\pi+\frac{c}{n^2\pi^2}},$$

wo n irgend eine ganze Zahl und c eine unbeſtimmte Conſtante bezeichnet, ſo hat man für beträchtliche Werthe von n nahezu:

$$\frac{y^2}{\sin\frac{1}{y}}=\frac{1}{n^2\pi^2\sin\frac{c}{n^2\pi^2}}=\frac{1}{c},$$

und folglich giebt der $n=\infty$ entſprechende Werth von y, nämlich $y=0$, für das Verhältniß $\frac{y^2}{\sin\frac{1}{y}}$ wirklich einen unbeſtimmten Werth $\frac{1}{c}$. Eben ſo leicht ließe ſich zeigen, daß dieſer Werth $y=0$ der Gleichung:

$$\frac{2y\sin\frac{1}{y}+\cos\frac{1}{y}}{\sin^2\frac{1}{y}}=\frac{0}{0}$$

genügt, und daß derſelbe als particuläres Integral auch der Gleichung:

$$dy=\frac{y^2dx}{\sin\frac{1}{y}}$$

genügt, deren allgemeines Integral folgendes iſt:

$$x+C=\cos\frac{1}{y}\text{ oder }y=\frac{\pm1}{2n\pi\pm\arccos(x-C)},$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

Was die Gleichung:

$$\frac{\sin^2\frac{1}{y}}{2y\sin\frac{1}{y}+\cos\frac{1}{y}}=0$$

anlangt, ſo ergiebt ſich daraus:

$$\sin\frac{1}{y} = 0,\ \frac{1}{y} = \pm n\pi,\ y = \pm\frac{1}{n\pi},$$

und die aus dieser letzten Gleichung abgeleiteten Werthe von y sind singuläre Integrale der Differenzialgleichung $dy = \frac{y^2 dx}{\sin\frac{1}{y}}$, mit Ausnahme des Werthes $y = 0$, welcher $n = \infty$ entspricht.

Wenn man die Differenzialgleichung:

$$dy = \frac{y^2 dx}{y^2\sin\frac{1}{y} - \cos\frac{1}{y}}$$

betrachtet hätte, so wäre die Gleichung $f(x, y) = \frac{0}{0}$ in folgende übergegangen:

$$\frac{y^2}{y^2\sin\frac{1}{y} - \cos\frac{1}{y}} = \frac{0}{0}$$

welcher ebenfalls durch den als Grenze eines Ausdruckes von der Form:

$$y = \frac{\pm 1}{(n+\frac{1}{2})\pi + \frac{c}{n^2\pi^2}}$$

betrachteten Werth $y = 0$ genügt wird; aber in dem gegenwärtigen Falle ist der Werth $y = 0$ ein singuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung, deren allgemeines Integral $y\sin\frac{1}{y} = x + C$ ist.

§. 179. Nach den verschiedenen, in den vorhergehenden Vorlesungen betrachteten particulären Integralen, ergiebt sich die Gleichung $y = 0$ nach der auf der Anwendung der Gleichungen:

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0 y_0), \ldots \text{ etc.}$$

beruhenden Methode. Denn wenn man im Allgemeinen annimmt, daß die Function $f(x, y)$ bei jedem Werthe von x für $y = 0$ verschwindet, so ergiebt sich aus diesen Gleichungen, wenn man $y_0 = 0$ setzt:

$$y_1 = y_0 = 0,\ y_2 = y_1 = 0, \ldots\ Y = y_{n-2} = 0$$

und wenn man alsdann y für Y setzt; so erhält man das gesuchte Integral $y = 0$. Wir wollen noch bemerken, daß dieses Integral in der Gleichung $y = \frac{0}{0}$ enthalten ist, auf welche man kommt, wenn man immer auf dieselbe Weise verfährt, wenn $y = 0$ die Function $f(x, y)$ unbestimmt macht.

Es ist wohl zu bemerken, daß die durch $\chi(x, y)$ ausgedrückte Function genau der Differenzialquotient $\frac{dy'}{dy}$ ist, wenn man y' als eine durch die Gleichung:

$$y' = f(x, y)$$

bestimmte Function von x und y betrachtet. Aus dieser Bemerkung und dem Vorhergehenden ergiebt sich das von andern Geometern ausgesprochene Factum, daß eins der Merkmale der singulären Auflösungen oder Integrale darin bestehe, den Differenzialquotienten $\frac{dy'}{dy}$ unendlich, oder unbestimmt zu machen.

Endlich wollen wir noch bemerken, daß man, wenn $y = 0$ ein singuläres Integral der Differenzialgleichung:

$$dy = f(x, y)\, dx$$

und ein anderer Werth von y, welcher mit $x - x_0$ verschwindet, ohne jedoch beständig Null zu sein, ein particuläres Integral derselben Gleichung ist, diese beiden Werthe von y aus folgenden Gleichungen ableiten kann:

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0),$$
$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) f(x_1, y_1),$$
etc.,

nämlich den ersten Werth, wenn man $y_0 = 0$ setzt und den zweiten Werth, wenn man für y_0 eine unendlich kleine Größe nimmt.

§. 180. Wenn man nicht mehr die Differenzialgleichung:

$$dy = f(x, y)\, dx,$$

sondern die folgende:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

zu integriren hätte, so brauchte man nur den Werth von y' als Function von x aus der Gleichung $f(x, y, y') = 0$ abzuleiten, um die Function $\chi(x, y)$ zu erhalten. Wenn man ferner mit:

$$\Phi(x, y, y'), \quad X(x, y, y'), \quad \Psi(x, y, y')$$

die drei partiellen Ableitungen von $f(x, y, y')$ in Beziehung auf die drei Veränderlichen x, y, y' bezeichnet, so leisten die aus der Gleichung $f(x, y, y') = 0$ abgeleiteten Werthe von y' und $\frac{dy'}{dx}$ offenbar der Gleichung:

$$X(x, y, y') + \Psi(x, y, y') \frac{dy'}{dy} = 0,$$

oder:

$$\frac{dy'}{dy} = -\frac{X(x, y, y')}{\Psi(x, y, y')}$$

Genüge. Wenn man also von der Differenzialgleichung $dy = f(x, y)dx$ zu der Differenzialgleichung:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

übergeht, so muß man für die Gleichungen:

$$\chi(x,y)=\frac{0}{0},\ \frac{1}{\chi(x,y)}=0$$

die folgenden:

$$\frac{\Psi(x,y,y')}{X(x,y,y')}=\frac{0}{0},\quad \frac{\Psi(x,y,y')}{X(x,y,y')}=0$$

setzen, worin man y' als eine durch die Gleichung:

$$f(x,y,y')=0$$

bestimmte Function der Veränderlichen x, y betrachten muß. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß sich diese letzte Gleichung auf folgende reducirt:

$$y=xy'+f(y'),$$

so hat man:

$$\frac{dy'}{dy}=\frac{1}{x+f'(y)},$$

die Bedingung $\frac{dy'}{dy}=\infty$ wird:

$$x+f'(y')=0$$

und die Elimination von y' zwischen dieser Gleichung und der Gleichung:

$$xy'+f(y')=y$$

giebt die singulären Integrale der gegebenen Differenzialgleichung.

§. 181. Nach dem eben Gesagten braucht man, um die singulären Integrale der Differenzialgleichung:

$$dy=f(x,y)\,dx$$

zu erhalten, nur die Werthe von y als Functionen von x zu suchen, welche die Eigenschaft haben, eine der Functionen $f(x,y)$, $\chi(x,y)$ unbestimmt zu machen, oder der Gleichung $\frac{1}{\chi(x,y)}=0$ und der Differenzialgleichung:

$$dy=f(x,y)\,dx$$

zu genügen. Da ferner die Werthe von y als Functionen von x, welche diese doppelte Bedingung erfüllen, singuläre, oder particuläre Integrale sein können; so ist noch ein Mittel zur Unterscheidung dieser beiden Arten von Integralen ausfindig zu machen. Diese Unterscheidung bietet in dem Falle, wo das allgemeine Integral bekannt ist, keine Schwierigkeit dar, und in dem entgegengesetzten Falle läßt sich diese Unterscheidung vermittelst der folgenden Lehrsätze bewerkstelligen.

Lehrsatz 1. Um zu entscheiden, ob ein Werth $y=F(x)$ ein particuläres, oder ein singuläres Integral der Differenzialgleichung:

$$dy = f(x,y)\,dx$$

ist, braucht man nur zu untersuchen, ob $z=0$ ein particuläres, oder ein singuläres Integral der Differenzialgleichung:

$$dz = \{f[x,F(x)+z] - f[x,F(x)]\}\,dx$$

ist. Denn da $y=F(x)$ nach der Voraussetzung der Differenzialgleichung:

$$dy = f(x,y)\,dx$$

genügen muß, so hat man:

$$d.F(x) = f[x,F(x)]\,dx.$$

Ferner sei $F(x,y) = C$ das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung, so erhält man, wenn man in derselben:

$$y = F(x)+z$$

setzt und die Gleichung:

$$dF(x) = f[x,F(x)]\,dx$$

berücksichtigt, die Differenzialgleichung:

$$dz = \{f[x,F(x)+z] - f[x,F(x)]\}\,dx,$$

welcher man genügt, wenn man $z=0$ setzt, und deren allgemeines Integral folgendes ist:

$$F[x,F(x)+z] = C.$$

Nun ist aber klar, daß $y=F(x)$ der Gleichung:

$$F(x,y) = C$$

genügt, wenn $z=0$ der Gleichung:

$$F[x,F(x)+z] = C$$

Genüge leistet, d. h. wenn sich die Function $F[x,F(x)+z]$ selbst auf eine Constante reducirt. Mit andern Worten: $y=F(x)$ ist ein particuläres Integral der Gleichung (1), wenn $z=0$ ein particuläres Integral der Gleichung:

$$dz = \{f[x,F(x)+z] - f[x,F(x)]\}\,dx$$

ist, und umgekehrt. Folglich etc.

Zusatz. Da es gleichgültig ist, ob man die unbekannte Function von x, welche der letzten Gleichung genügt mit z, oder mit y bezeichnet; so folgt offenbar aus dem vorhergehenden Lehrsatze, daß man zur Bestimmung der Beschaffenheit des Integrales $y=F(x)$ einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung zwischen den Veränderlichen x,y nur die Beschaffenheit des Integrales $y=0$ einer andern Differenzialgleichung der ersten Ordnung zwischen denselben Veränderlichen zu bestimmen braucht. Die Untersuchung kann also immer auf den Fall zurückgeführt werden, wo man identisch $F(x)=0$ hat, und in diesem letzten

Falle kann die Unterscheidung der particulären und singulären Integrale unmittelbar mit Hülfe der folgenden Lehrsätze geschehen.

Lehrsatz 2. Es seien α und β zwei unendlich kleine Größen, wovon die zweite so gewählt ist, daß die Function $f(x, y)$ zwischen den Grenzen $y = \alpha$, $y = \beta$ stets dasselbe Zeichen behält, wenn der Werth $y = 0$ der Differenzialgleichung:

$$dy = f(x,y)\,dx$$

als singuläres Integral genügt; so ist das zwischen denselben Grenzen in Beziehung auf die Veränderliche y genommene bestimmte Integral:

$$\int_\alpha^\beta \frac{dy}{f(x,y)}$$

selbst eine unendlich kleine Größe.

Beweis. Wir wollen durch:

$$F(x,y) = C$$

wieder das allgemeine Integral der Differenzialgleichung:

$$dy = f(x,y)\,dx$$

bezeichnen, und es seien $\Phi(x, y)$, $X(x, y)$ die beiden partiellen Ableitungen der Funktion $F(x, y)$ in Beziehung auf die beiden Veränderlichen x, y; so ergiebt sich aus der bekannten Gleichung:

$$\frac{\frac{du}{dx}}{M} = \frac{\frac{du}{dy}}{N},$$

wenn man darin $F(x, y)$ für u, 1 für N und $-f(x, y)$ für M setzt:

$$X(x,y) = -\frac{\Phi(x,y)}{f(x,y)}.$$

Da diese letzte Gleichung identisch ist, wenn man beide Theile derselben zwischen den Grenzen $y = \alpha$, $y = \beta$ in Beziehung auf die Veränderliche y integrirt, so erhält man:

$$F(x,\beta) - F(x,\alpha) = -\int_\alpha^\beta \Phi(x,y)\,\frac{dy}{f(x,y)},$$

und wenn ϑ eine kleinere Zahl als die Einheit bezeichnet; so hat man:

$$\int_\alpha^\beta \Phi(x,y)\frac{dy}{f(x,y)} = \Phi[x, \alpha + \vartheta(\beta - \alpha)]\int_\alpha^\beta \frac{dy}{f(x,y)},$$

und folglich:

$$\int_\alpha^\beta \frac{dy}{f(x,y)} = \frac{F(x,\alpha) - F(x,\beta)}{\Phi[x, \alpha + \vartheta(\beta - \alpha)]}.$$

Da ferner $y = 0$ nach der Voraussetzung ein singuläres Integral der Differenzialgleichung:

$$dy = f(x,y)\,dx$$

ist, so kann dieser Werth von y der Gleichung $F(x,y) = C$ nicht genügen, d. h. der Ausdruck $F(x,0)$ kann keinen endlichen und constanten Werth bekommen, sondern hat beständig einen unendlichen Werth. Folglich muß $F(x,0)$ nothwendig eine endliche Function der Veränderlichen x sein, und ihre Ableitung:

$$\Psi(x,0) = \frac{dF(0,x)}{dx}$$

reducirt sich ebenfalls auf eine endliche Function von x, oder, wenn die Function $F(x,0)$ eine lineare ist, auf eine endliche und von Null verschiedene Constante. Folglich verschwindet das Verhältniß:

$$\frac{F(x,\alpha) - F(x,\beta)}{\Phi[x, \alpha + \vartheta(\beta - \alpha)]}$$

für $\beta = \alpha = 0$, woraus folgt, wenn die Functionen $F(x,y)$, $\Phi(x,y)$ in der Nähe des besondern Werthes $y = 0$ stetig sind, daß das fragliche Verhältniß und das damit gleichbedeutende bestimmte Integral $\int_\alpha^\beta \frac{dy}{f(x,y)}$ mit den Größen α, β zu gleicher Zeit unendlich klein werden.

Lehrsatz 3. Wenn der Werth $y = 0$ der Differenzialgleichung:

$$dy = f(x,y)\,dx$$

genügt und das bestimmte Integral $\int_\alpha^\beta \frac{dy}{f(x,y)}$ einen unendlich kleinen Werth bekommt, so ist $y = 0$ ein singuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

Beweis. Denn wir wollen annehmen, daß dieses Integral einen unendlich kleinen Werth habe, so kann das bestimmte Integral $\int_\alpha^y \frac{dy}{f(x,y)}$, welches aus dem ersten abgeleitet wird, wenn man y für β substituirt, nur eine endliche und bestimmte Function der Veränderlichen x, y sein, und dasselbe gilt von dem bestimmten Integrale $\int_0^y \frac{dy}{f(x,y)}$, welches man erhält, wenn man für die unendlich kleine Größe α ihre Grenze Null setzt. Nun sei:

$$\int_0^y \frac{dy}{f(x,y)} = f(x,y),$$

ferner sei ξ ein besonderer Werth von x und $y = F(x,C)$ das allgemeine Integral der Differenzialgleichung $dy = f(x,y)\,dx$; so hat man identisch:

$$dF(x,C) = f[x, F(x,C)]\,dx.$$

Wegen:

$$\int_0^y \frac{dy}{f(x,y)} = \mathrm{f}(x, y)$$

ist ferner:

$$\int_0^y \frac{dy}{f(\xi, y)} = \mathrm{f}(\xi, y), \quad df(\xi, y) = \frac{dy}{f(\xi, y)},$$

$$df[\xi, \mathrm{F}(x, C)] = \frac{d\mathrm{F}(x, C)}{f[\xi, \mathrm{F}(x, C)]},$$

und folglich:

$$df[\xi, \mathrm{F}(x, C)] = \frac{f[x, \mathrm{F}(x, C)]}{f[\xi, \mathrm{F}(x, C)]}\, dx.$$

Aus dieser letzten Gleichung ergiebt sich, wenn h einen beliebigen Zuwachs von x und ϑ eine kleinere Zahl als die Einheit bezeichnet:

$$\mathrm{f}[\xi, \mathrm{F}(x+h, C)] - \mathrm{f}[\xi, \mathrm{F}(x, C)] = h\, \frac{f[x+\vartheta h, \mathrm{F}(x+\vartheta h, C)]}{f[\xi, \mathrm{F}(x+\vartheta h, C)]},$$

und wenn man $\xi = x + \vartheta h$ setzt; so findet man für beliebige Werthe der Größen x, h und C:

$$\mathrm{f}[x+\vartheta h, \mathrm{F}(x, +\vartheta h, C)] - \mathrm{f}[x+\vartheta h, \mathrm{F}(x, C)] = h.$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß $y=0$ in der gemachten Voraussetzung ein singuläres Integral ist. Denn wenn man dieses Integral aus der Gleichung $y = \mathrm{F}(x, C)$ dadurch ableiten könnte, daß man der Constante C einen besondern Werth c beilegt; so brauchte man nur $C = c$ zu setzen, um die letzte der vorhergehenden Gleichungen auf folgende:

$$h = \mathrm{f}(x+\vartheta h, 0) - \mathrm{f}(x+\vartheta h, 0) = 0$$

zu reduciren, welche, wenn der Werth von h willkührlich bleiben soll, nur insofern statt finden kann, als sich ihr zweiter Theil auf $\frac{0}{0}$, statt auf 0, reducirt, welches letztere immer geschieht, wenn $\mathrm{f}(x, y)$ eine endliche Function bezeichnet, während das erstere nothwendig statt findet, wenn die Function:

$$\mathrm{f}(x, y) = \int_0^y \frac{dy}{f(x, y)}$$

unbestimmt, oder unendlich wird. Der Werth $y=0$ genügt zwar der Differenzialgleichung $dy = f(x,y)\,dx$ nur in dem Falle, wo die Function $f(x, 0)$ einen Werth $= 0$, oder einen unbestimmten Werth bekommt, und da alsdann der zweite Theil der Gleichung:

$$\mathrm{f}[\xi, \mathrm{F}(x+h, C)] - \mathrm{f}[\xi, \mathrm{F}(x, C)] = h\, \frac{f[x+\vartheta h, \mathrm{F}(x+\vartheta h, C)]}{f[\xi, \mathrm{F}(x+\vartheta h, C)]}$$

sich auf $\frac{0}{0}$ reducirt; so scheint es beim ersten Anblicke, daß man die Gleichung:

$$f[x+\vartheta h, F(x+\vartheta h, C)]-f[x+\vartheta h, F(x, C)]=h$$

nicht auf ein particuläres Integral von der Form:

$$y=F(x, c)=0$$

anwenden dürfte. Um sich jedoch zu überzeugen, daß diese Ausdehnung zulässig ist, braucht man nur zu bemerken, daß diese Gleichung, welche für alle von c verschiedene Werthe von C stattfindet, auch noch stattfindet, wenn C gegen die Grenze c convergirt und die Differenz $C-c$ unendlich klein wird, woraus man schließen darf, daß diese Gleichung auch noch statt findet, wenn die Differenz $C-c$ unendlich klein wird, woraus folgt, daß diese Gleichung auch noch statt findet, wenn die Differenz $C-c$ in aller Strenge $=0$ wird.

§. 182. Aus den Lehrsätzen 2 und 3 folgt, daß man, um zu entscheiden, ob der Werth $y=0$ als singuläres, oder als particuläres Integral der Differenzialgleichung:

$$dy=f(x, y)\,dx$$

genügt, nur zu untersuchen braucht, ob der Werth des bestimmten Integrales $\int_\alpha^\beta \frac{dy}{f(x, y)}$, indem x als eine Constante betrachtet wird, eine unendlich kleine Größe ist, oder nicht, wo α und β übrigens, wie auch bereits bemerkt worden, zwei unendlich kleine Werthe von y von solcher Beschaffenheit sind, daß die Function $f(x, y)$ in dem Intervalle $\beta-\alpha$ das Zeichen nicht ändert.

Wenn man z. B. die bereits in der vorhergehenden Vorlesung behandelten Differenzialgleichungen:

$$dy=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}dx,\quad dy=y\,\mathrm{l}y\,dx$$

betrachtet, so findet man, daß sich das bestimmte Integral $\int_\alpha^\beta \frac{dy}{f(y, x)}$ für die erste auf die unendlich kleine Größe:

$$\int_\alpha^\beta \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}dy=2x^{\frac{1}{2}}(\beta^{\frac{1}{2}}-\alpha^{\frac{1}{2}})$$

und für die zweite auf den unbestimmten Ausdruck:

$$\int_\alpha^\beta \frac{dy}{y\,\mathrm{l}y}=\mathrm{l}\frac{\mathrm{l}\beta}{\mathrm{l}\alpha}$$

reducirt. Mithin ist $y=0$ ein singuläres Integral der ersten und ein particuläres Integral der zweiten dieser Gleichungen, wie wir bereits aus der Betrachtung der allgemeinen Integrale dieser Differenzialgleichungen gesehen haben.

Betrachten wir nun eine Differenzialgleichung, deren allgemeines Integral nicht unter endlicher Form erhalten werden kann, z. B. die Differenzialgleichung:

$$dy=(y+\sin y)(x+\mathrm{l}y)\,dx,$$

so ist:

$$\int_\alpha^\beta = \frac{dy}{f(x,y)} \int_\alpha^\beta \frac{dy}{(x+\mathrm{l}y)(y+\sin y)}$$
$$= \int_\alpha^\beta \frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{l}y}{x}\right)\left(1+\frac{\sin y}{y}\right)} \frac{dy}{y\,\mathrm{l}y}.$$

Soll die unter dem Integralzeichen stehende Function zwischen den unendlich kleinen Grenzen $y=\alpha$, $y=\beta$ das Zeichen nicht ändern, so ist erforderlich, aber auch hinreichend, daß diese Grenzen zwei Größen von demselben Zeichen sind. Wir wollen annehmen, daß diese Bedingung erfüllt wird, so haben wir nach einer bekannten Formel:

$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{\left(1+\frac{x}{\mathrm{l}y}\right)\left(1+\frac{\sin y}{y}\right)} \frac{dy}{y\,\mathrm{l}y} = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{\mathrm{l}y}\right)\left(1+\frac{y}{\sin y}\right)} \int_\alpha^\beta \frac{dy}{y\,\mathrm{l}y}$$
$$= \frac{\mathrm{l}\frac{\mathrm{l}\beta}{\mathrm{l}\alpha}}{\left(1+\frac{x}{\mathrm{l}y}\right)\left(1+\frac{\sin y}{y}\right)},$$

wo y einen zwischen den Grenzen α, β und folglich sehr nahe an Null liegenden Werth von y bezeichnet. Nun ist aber nahezu:

$$1+\frac{x}{\mathrm{l}y}=1+\frac{x}{1.0}=1, \quad 1+\frac{\sin y}{y}=1+1=2$$

und folglich reducirt sich das bestimmte Integral nahezu auf den Ausdruck $\frac{1}{2}\mathrm{l}.\frac{\mathrm{l}\beta}{\mathrm{l}\alpha}$, und da dieser Ausdruck für unendlich kleine Werthe von α,β unbestimmt ist; so ist $y=0$ ein particuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung.

Wenn man mit der Differenzialgleichung:

$$dz=\{f[x,F(x)+z]-f[x,F(x)]\}\,dx$$

eben so verfährt, wie mit der Differenzialgleichung:

$$dy=f(x,y)\,dx,$$

so ergiebt sich unter Berücksichtigung des ersten Lehrsatzes unmittelbar folgender:

Lehrsatz 4. Um zu entscheiden, ob der Werth $y=F(x)$ der Differenzialgleichung:

$$dy=f(x,y)\,dx$$

als singuläres, oder als particuläres Integral genügt, braucht man nur zu untersuchen, ob das bestimmte Integral:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{f[x,F(x)+z]-f[x,F(x)]}$$

eine unendlich kleine Größe ist, oder nicht, indem x als eine Constante betrachtet wird und α, β zwei unendlich kleine Grenzen von z bezeichnen, zwischen welchen die unter dem Integralzeichen stehende Function ihr Zeichen nicht ändert.

Zusatz 1. Offenbar kann man in diesem Lehrsatze für das obige Integral das gleichbedeutende Integral:

$$\int_{F(x)+\alpha}^{F(x)+\beta} \frac{dy}{f(x,y)-f[x,F(x)]}$$

substituiren.

Zusatz 2. Da das Verhältniß:

$$\frac{1}{f[x,F(x)+z]-f[x,F(x)]}$$

als das Product der beiden Factoren:

$$\frac{z}{f[x,F(x)+z]-f[x,F(x)]}, \quad \frac{1}{z}$$

betrachtet werden kann, und das singuläre Integral $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{z} = 1.\frac{\alpha}{\beta}$ ist; so kann man für das obige Integral den Ausdruck:

$$\frac{\zeta}{f[x,F(x)+\zeta)]-f[x,F(x)]} 1\frac{\beta}{\alpha}$$

setzen, wo ζ einen zwischen den Grenzen α, β liegenden unendlich kleinen Werth von z bezeichnet. Da aber die Größe $1.\frac{\beta}{\alpha}$ für unendlich kleine Werthe von α und β unbestimmt ist, so kann dieser Ausdruck nur in so fern unendlich klein werden, als das Verhältniß:

$$\frac{\zeta}{f[x,F(x)+\zeta]-f[x,F(x)]}$$

für $\zeta = 0$ unendlich klein, Null, oder unbestimmt wird. Da ferner beide Glieder dieses Verhältnisses mit ζ verschwinden, so ist der $\zeta = 0$ entsprechende wahre Werth desselben dem Werthe des Bruches:

$$\frac{1}{\chi[x,F(x)+\zeta]}$$

für $\zeta = 0$ d. h., der Größe:

$$\frac{1}{\chi[x,F(x)]}$$

gleich. Der Werth $y = F(x)$ kann also der Differenzialgleichung:

$$dy = f(x,y)\,dx$$

nach Lehrſatz 4 als ſinguläres Integral nur in dem Falle genügen, wo der Ausdruck $\frac{1}{\chi[x,(F(x)]} = 0$, oder unbeſtimmt iſt, d. h., wenn der Werth $y = F(x)$ einer der Bedingungen:

$$\chi(x,y) = \infty, \quad \frac{1}{\chi(x,y)} = 0$$

genügt. Dieſe beiden Gleichungen ſind alſo die einzigen, welche ſinguläre Integrale der gegebenen Differenzialgleichung geben können, und es iſt bei der Beſtimmung dieſer Integrale überflüſſig, die Werthe von y in Betracht zu ziehen, welche blos die Function $f(x,y)$ unbeſtimmt machen können.

Dreißigste Vorlesung.

Integration der Differenzialgleichungen der ersten Ordnung, worin die Ableitung y' auf ganze, oder gebrochene, positive, oder negative Potenzen erhoben, vorkommt. — Anwendung auf die Bestimmung der Gleichung einer Curve, wenn man die Relation zwischen dem Curvenbogen s und den Coordinaten x, y kennt.

---

§. 183. Es geschieht oft, daß die Differenziale dx, dy oder die Ableitung $y' = \frac{dy}{dx}$ in einer Differenzialgleichung der ersten Ordnung zu ganzen, oder gebrochenen Potenzen erhoben, vorkommen. Wenn alle Exponenten dieser Potenzen ganze Zahlen sind, so ist die allgemeine Form der Differenzialgleichung der ersten Ordnung mit zwei Veränderlichen x, y folgende:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + F_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + F_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots F_{n-1}\frac{dy}{dx} + F_n = 0,$$

wo $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}, F_n$ Functionen von x und y bezeichnen. Man kann diese Gleichung in einigen besondern Fällen integriren, und wir wollen zunächst annehmen, daß sie sich in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$ auflösen läßt, und mit $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ihre n Wurzeln bezeichnen; so kann man für diese Gleichung die folgenden n Differenzialgleichungen der ersten Ordnung:

$$dy - f_1 dx = 0,\ dy - f_2 dx = 0, \ldots,\ dy - f_n dx = 0$$

substituiren, welche man vermittelst der bekannten Methoden integriren kann. Da die gegebene Differenzialgleichung mit dem Producte:

$$\left(\frac{dy}{dx} - f_1\right)\left(\frac{dy}{dx} - f_2\right)\cdots\left(\frac{dy}{dx} - f_{n-1}\right)\left(\frac{dy}{dx} - f_n\right)$$

gleichbedeutend ist, so wird sie durch jedes der Integrale der n Differenzialgleichungen des ersten Grades verificirt. Nun seien:

$$\varphi_1(x, y, C_1),\ \varphi_2(x, y, C_2), \ldots,\ \varphi_n(x, y, C_n)$$

diese n Integrale, so enthält die Gleichung:

$$\varphi_1(x,y,C_1)\,\varphi_2(x,y,C_2)\ldots\varphi_n(x,y,C_n)=0$$

alle Auflösungen der gegebenen Differenzialgleichung. Die Allgemeinheit dieses Integrales wird nicht vermindert, wenn man alle willkührlichen Constanten mit demselben Buchstaben C bezeichnet, oder wenn man dasselbe auf folgende Form bringt:

$$\varphi_1(x,y,C)\,\varphi_2(x,y,C)\ldots\varphi_n(x,yC)=0,$$

weil, wenn man jeden der Factoren einzeln $=0$ setzt und der Constante C alle möglichen Zahlenwerthe beilegt, man nothwendig alle particulären Integrale wieder erhält, welche jeder Factor des allgemeinen Integrales geben kann.

Beispiel 1. Es sei:

$$\frac{dy^2}{dx^2}-a^2=0$$

die gegebene Differenzialgleichung, so ist:

$$f_1=a,\ f_2=-a,\ \varphi_1(x,y,C_1)=y-ax+C_1,$$
$$\varphi_2(x,y,C_2)=y+ax+C_2$$

und das allgemeine Integral ist:

$$(y-ax+C_1)(y+ax+C_2)=0,$$

oder:

$$(y+C)^2-a^2x^2=0.$$

Beispiel 2. Die gegebene Differenzialgleichung sei:

$$\frac{dy^2}{dx^2}-ax=0,$$

so ist:

$$f_1=\sqrt{ax},\ f_2=-\sqrt{ax},$$
$$\varphi_1=y-\tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+C_1,\ \varphi_2=y+\tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+C_2$$

und das allgemeine Integral ist:

$$(y-\tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+C_1)(y+\tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+C)=0,$$

oder:

$$(y+C)^2-\tfrac{4}{9}ax^3=0.$$

Beispiel 3. Die gegebene Differenzialgleichung sei:

$$\frac{dy^2}{dx^2}+2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=1,$$

so erhält man, wenn man diese Gleichung auflöst, die beiden homogenen Differenzialgleichungen:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}-\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}=0,$$
$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}=0,$$

welche sich leicht durch bekannte Methoden integriren lassen.

§. 184. Wenn sich die gegebene Differenzialgleichung nicht in Beziehung auf $\frac{dy}{dx}$, aber nach y oder x auflösen läßt, so kommt man auf Differenzialgleichungen von einer der beiden Formen:

$$y = F(x, y'), \quad x = F(y, y')$$

und in beiden Fällen gelangt man durch Differenzirung zu einer Differenzialgleichung, welche in Beziehung auf die Veränderlichen x, y' oder y, y' von der ersten Ordnung ist, und wenn sie sich integriren läßt; so braucht man nur y' zwischen dem erhaltenen Integrale und der gegebenen Gleichung zu eliminiren, um das gesuchte Integral zu erhalten:

Beispiel 1. Es sei:

$$y = xy' + z^n f(y')$$

die gegebene Differenzialgleichung, so erhält man durch Differenzirung:

$$y'dx = y'dx + xdy' + nx^{n-1} f(y')\,dx + x^n df(y'),$$

oder:

$$xdy' + nf(y')\,x^{n-1}dx + x^n df(y') = 0.$$

Setzt man:

$$x^n f(y') = \varphi(y'),$$

so ist:

$$xdy' = \left[\frac{\varphi(y')}{f(y')}\right]^{\frac{1}{n}} dy',$$

$$nf(y')\,x^{n-1}dx = \frac{f(y')\,d\varphi(y') - \varphi(y')\,df(y')}{f(y')},$$

$$x^n df(y') = \frac{\varphi(y')\,df(y')}{f(y')}$$

und folglich:

$$\left[\frac{\varphi(y')}{f(y')}\right]^{\frac{1}{n}} dy' + d\varphi(y') = 0; \quad \frac{dy'}{[f(y')]^{\frac{1}{n}}} + \frac{d\varphi(y')}{[\varphi(y')]^{\frac{1}{n}}} = 0.$$

Beispiel 2. Es sei:

$$y = xy' + ax^2y'^3 + bx^3y'^3 + \text{etc.} = 0$$

die gegebene Differenzialgleichung, so ergiebt sich durch Differenzirung:

$$xdy' + 2axy'^2dx + 2ax^2y'dy' + 3bx^2y'^3dx + 3bx^3y'^2dy' + \text{etc.} = 0$$

und wenn man:

$$xy' = u, \text{ also } x = \frac{u}{y'}, \quad dx = \frac{y'du - udy'}{y'^2}$$

setzt:

$$\frac{dy'}{y'} + 2adu + 3budu + \text{etc.} = 0,$$

$$\text{l}\,y' + 2au + \tfrac{3}{2}bu^2 + \ldots = C.$$

§. 185. Auch die Differenzialgleichung:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + F_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + F_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots F_{n-1}\frac{dy}{dx} + F_n = 0$$

läßt sich leicht integriren, wenn sie in Beziehung auf x und y homogen ist; denn setzt man alsdann $y = tx$ und $xdt = zdx$, so hat man:

$$dy = tdx + xdt = (t+z)\,dx$$

und die gegebene Differenzialgleichung verwandelt sich in folgende:

$$(t+z)^n + T_1(t+z)^{n-1} + T_2(t+z)^{n-2} + \ldots T_{n-1}(t+z) + T_n = 0,$$

wo $T_1, T_2, \ldots, T_n$ Functionen der einen Veränderlichen t bezeichnen. Diese letzte Gleichung giebt eine gewisse Anzahl Werthe von z, welche man in die Differenzialgleichung der ersten Ordnung $xdt = zdx$ oder $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{z}$ substituirt, um daraus durch Integration den Ausdruck für x als Function von t, und folglich vermittelst der Gleichung $y = tx$ die verschiedenen Werthe von y oder die verschiedenen Integrale der gegebenen Differenzialgleichung abzuleiten.

Beispiel. Es sei:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} - \frac{x}{2y} = 0$$

die gegebene Differenzialgleichung, so ist:

$$n=3,\ T_1 = -\tfrac{1}{2},\ T_2 = \frac{1}{t},\ T_3 = -\frac{1}{2t}$$

und man hat:

$$(t+z)^3 - \tfrac{1}{2}(t+z)^2 + \frac{1}{t}(t+z) - \frac{1}{2t} = 0,$$

oder:

$$[2(t+z)-1]\,\frac{1+t(t+z)^2}{2t} = 0,$$

woraus folgt:

$$2(t+z)-1 = 0,\quad 1+t(t+z)^2 = 0,$$

$$z = \tfrac{1}{2} - t,\quad z = -t \pm \left(-\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\frac{1}{2}-t},\quad \frac{dx}{x} = \frac{dt}{-t+\left(-\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}},\quad \frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t+\left(-\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

und man hat nur noch diese drei Gleichungen zu integriren und

endlich $\frac{y}{x}$ für t zu substituiren, um drei Integrale der gegebenen Differenzialgleichung zu erhalten. Man könnte auch in der homogenen Differenzialgleichung $y = lx$ setzen, wodurch y und x verschwänden, und die resultirende Gleichung gäbe den Werth von $\frac{dy}{dx} = y'$ als Function von t. Da ferner $dy = tdx + xdt = y'dx$ ist, so hat man auch die Gleichung:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{y' - t},$$

worin die Veränderlichen getrennt sind, weil y durch eine Function von t ausgedrückt wird, und woraus sich ergiebt:

$$lx = \int \frac{dt}{y' - t} = -l(y' - t) + \int \frac{dy'}{y' - t}.$$

Man wendet das eine, oder das andere der beiden Integrale:

$$\int \frac{dt}{y' - t}, \quad \int \frac{dy'}{y' - t}$$

an, jenachdem man leichter y' als Function von t, oder umgekehrt t als Function von y' erhalten kann. Wenn sich das Integral $\int \frac{dt}{y' - t}$ durch Logarithmen finden läßt, oder wenn man hat:

$$\int \frac{dt}{y' - t} = lu,$$

so ist:

$$lx = lC + lu, \quad x = Cu, \quad y = Ctu$$

und y wird durch eine algebraische Function von x ausgedrückt.

Beispiel 1. Es sei:

$$ydx - x\sqrt{dy^2 + dx^2} = 0,$$

oder:

$$y - x\sqrt{1 + y'^2} = 0$$

die gegebene Differenzialgleichung, so hat man, wenn man $y = tx$ setzt:

$$t = \sqrt{y'^2 + 1}$$

und:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t - y'}, \quad lx = -l(t - y') - \int \frac{dy'}{\sqrt{y'^2 + 1} - y'}$$

$$= -l(t - y') - \int dy' (y' + \sqrt{1 + y'^2}),$$

$$lx = C - \tfrac{1}{2} l(\sqrt{1 + y'^2} - y') - \tfrac{1}{2} y' \sqrt{1 + y'^2} - \tfrac{1}{2} y'^2,$$

$$y = tx = x\sqrt{1 + y'^2}.$$

Beiſpiel 2. Es ſei:

$$ydx - xdy = nx\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

ſo findet man:

$$t = \frac{y}{x},\quad \frac{(-nt + \sqrt{t^2+1-n^2})}{C(1-n^2)} = \left(\frac{-t+\sqrt{t^2+1-n^2}}{(1-n)}\right)^{\frac{1}{n}},$$

für: $$n = 1,\quad y^2 + x^2 = 2Cx;$$

für: $$n = 1,\quad x_n = 0,\quad x^2 + y^2 + 2Cx = 0.$$

§. 186. Vermittelſt des Vorhergehenden laſſen ſich verſchiedene intereſſante Aufgaben löſen, wovon wir einige Beiſpiele anführen wollen.

Aufgabe 1. Die Gleichung einer Curve von ſolcher Beſchaffenheit zu finden, daß der Bogen s derſelben als Function von x und y durch die Relation:

$$s^2 = 2xy$$

ausgedrückt wird, woraus folgt:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{xdy + ydx}{\sqrt{2xy}},$$

und wenn man ſetzt:

$$y' = \frac{dy}{dx},\quad y = tx,$$

ſo hat man:

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{y'+t}{\sqrt{2t}},\quad t = \sqrt{2t(1+y'^2)} - y',$$
$$t = 1 - y' + y'^2 + (1-y')\sqrt{1+y'^2},$$
$$y' - t = -(1-y')(1-y'+\sqrt{1+y'^2});$$

folglich:

$$\int\frac{dy'}{y'-t} = \int\frac{dy'}{2y'(1-y')}(1-y'-\sqrt{1+y'^2}) = -\tfrac{1}{2}1y' - \tfrac{1}{2}\int\frac{dy'\sqrt{1+y'^2}}{y'(1-y')}.$$

Wenn man aber ſetzt:

$$y' = \frac{1-u^2}{2u},$$

ſo hat man:

$$\int\frac{dy'\sqrt{1+y'^2}}{y'(1-y')} = -\int\frac{du(1+u^2)^2}{u(1-u^2)(u^2+2u-1)} = \int\frac{du}{u} - 2\int\frac{du}{1-u^2}$$
$$-4\int\frac{du}{(u+1)^2-2} = 1u - 1\frac{1+u}{1-u} + \sqrt{2}1\frac{\sqrt{2}+1+u}{\sqrt{2}-1-u}$$

und folglich:

$$\int\frac{dy'}{y'-t}=\frac{1}{2}\,l\,y'-\frac{1}{2}\,l\,u+\frac{1}{2}\,l\,\frac{1+u}{1-u}-\frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{\sqrt{2}+1+u}{\sqrt{2}-1-u}$$

$$=l\,\frac{1+u}{2u}-\frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{\sqrt{2}+1+u}{\sqrt{2}-1-u}.$$

Außerdem ist:

$$y'-t=\frac{(1+u)(1-2u-u^2)}{2u}=\frac{(1+u)[2-(1+u)^2]}{2u},$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{y'-t},$$

und folglich:

$$\frac{dy'}{y'-t}-\frac{dx}{x}=\frac{dy'}{y'-t}-\frac{dt}{y'-t}=\frac{d\,(y'-t)}{y'-t},$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy'}{y'-t}-\frac{d\,(y'-t)}{y'-t},$$

$$lx=C'+\int\frac{dy'}{y'-t}-l(y'-t).$$

Man findet also, wenn man substituirt:

$$lx=C'-l(1+u)+lu-l[2-(1+u)^2]$$
$$+l\,\frac{1+u}{u}-\frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{\sqrt{2}+1+u}{\sqrt{2}-1-u}$$
$$=lC-l[2-(1+u)^2-\frac{1}{\sqrt{2}}\,l\,\frac{\sqrt{2}+1+u}{\sqrt{2}-1-u},$$

und wenn man die Gleichungen:

$$t=\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\,(1+u)^2,\quad 1+u=\sqrt{\frac{2y}{x}}$$

berücksichtigt:

$$x=\frac{Cx}{x-y}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

$$x-y=C\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=C(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1},$$

welches die gesuchte Gleichung ist.

Einfacher gelangt man zu derselben, wenn man auf folgende Weise verfährt. Es ist nämlich:

$$t+y'=\sqrt{2t(1+y'^2)},\quad t^2+2ty'+y'^2=2t+2ty'^2,$$

folglich:

$$y' = \frac{t+(1-t)\sqrt{2t}}{2t-1}, \quad y'-t = \frac{(1-t)\sqrt{2t}}{\sqrt{2t-1}},$$

$$lx = \int \frac{dt}{y'-t} = \int \frac{dt\sqrt{2t-1}}{(1-t)\sqrt{2t}} = C - l(1-t) - \int \frac{dt}{(1-t)\sqrt{2t}}.$$

Setzt man $t = v^2$, so kommt:

$$\int \frac{dt}{(1-t)\sqrt{2t}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{2dv}{1-v^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} l \frac{1+v}{1-v},$$

folglich:

$$lx = lC - l(1-t) - \frac{1}{\sqrt{2}} l \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}$$

und wegen $t = \frac{y}{x}$:

$$x = \frac{Cx}{x-y} \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \text{ etc.}$$

Dieses Integrationsverfahren ist immer anwendbar, wenn der Bogen s durch eine homogene Function der Veränderlichen x und y ausgedrückt wird. Denn setzt man $y = tx$, $s = ux$ und substituirt diese Werthe in die homogene Gleichung $\varphi(x, y, s) = 0$, so wird x eliminirt und es bleibt eine Gleichung zwischen t und u, vermittelst welcher man u durch t ausdrücken kann. Außerdem hat man:

$$dy = y'dx, \quad ydx = tdx + xdt,$$
$$ds = dx\sqrt{1+y'^2} = udx + xdu,$$

folglich:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{y'-t} = \frac{du}{\sqrt{1+y'^2}-u}.$$

Da u durch eine Function von t ausgedrückt wird, so wollen wir $du = vdt$ setzen, so kommt:

$$\sqrt{1+y'^2} = u + y'v - vt,$$
$$1+y'^2 = (u-vt)^2 + 2vy'(u-vt) + v^2y'^2,$$
$$y' = \frac{v(u-vt)+\sqrt{(u-vt)^2-1+v^2}}{1-v^2},$$
$$y'-t = \frac{vu-t+\sqrt{(u-vt)^2-1+v^2}}{1-v^2},$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{dt(1-v^2)}{vu-t+v\sqrt{(u-vt)^2-1+v^2}}$$
$$= \frac{dt[vu-t-\sqrt{(u-vt)^2-1+v^2}]}{1+t^2-u^2}.$$

Da aber u und v durch Functionen von t ausgedrückt werden, so ist der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung auf die Form $F(t)\,dt$ zurückgeführt, woraus sich der Werth von x als Function von t ergiebt, und wenn man alsdann die Relation $vdt = du$ berücksichtigt; so findet man:

$$lx = lC - l\sqrt{1+t^2-u^2} - \int \frac{dt\sqrt{(u-vt)^2-1+v^2}}{1+t^2-u^2}.$$

Substituirt man in diese letzte Gleichung für u seinen Werth $\frac{y}{x}$, so erhält man die Gleichung der gesuchten Curve, und diese Gleichung ist jedesmal eine algebraische, wenn sich das Integral des zweiten Theiles durch Logarithmen ausdrücken läßt.

Wenn man die Differenzialgleichung:

$$ds = Sdx = f(y', t, u)\,dx$$

hätte, so wäre noch dasselbe Verfahren anwendbar. In diesem Falle könnte man aus der Gleichung:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{y'-t} = \frac{du}{\sqrt{1+y'^2}-u} = \frac{du}{S-u}$$

den Werth von y' als Function von t und u, oder blos als Function von t ableiten, weil u selbst durch t ausgedrückt wird, und das Integral des zweiten Theiles der Gleichung:

$$lx = \int \frac{dt}{y'-t}$$

wäre eine einfache Quadratur.

Beispiel 1. Es sei:

$$s = ax + by,$$

so hat man, wenn man:

$$y = tx, \quad s = ux$$

setzt:

$$u = a + bt, \quad v = \frac{du}{dt} = b, \quad u - vt = a,$$

$$lx = lC - l\sqrt{1+t^2-(a+bt)^2} - \int \frac{dt\sqrt{a^2+b^2-1}}{1+t^2-(a+bt)^2}.$$

Nun ist aber:

$$-\int \frac{dt\sqrt{a^2+b^2-1}}{1-a^2-2abt+(1-b^2)t^2} =$$

$$\int \frac{(b^2-1)\,dt\sqrt{a+b^2-1}}{[t(b^2-1)+ab-\sqrt{a^2+b^2-1}]\,[t(b^2-1)+ab+\sqrt{a^2+b^2-1}]}$$

$$= \tfrac{1}{2} l \frac{(b^2-1)t+ab-\sqrt{a^2+b^2-1}}{(b^2-1)t+ab+\sqrt{a^2+b^2-1}},$$

und wenn man für t seinen Werth $\frac{y}{x}$ substituirt; so erhält man das gesuchte Integral:

$$\frac{a^2+y^2-(ax+by)^2}{C^2} = \frac{(b^2-1)y+abx-x\sqrt{a^2+b^2-1}}{(b^2-1)y+abx+x\sqrt{a^2+b^2-1}}$$

Wenn man aber setzt:

$$(b^2-1)y+abx-x\sqrt{a^2+b^2-1}=\mathrm{M},$$
$$(b^2-1)y+abx+x\sqrt{a^2+b^2-1}=\mathrm{N},$$

so kommt:

$$\mathrm{MN}=(b^2-1)[(ax+by)^2-x^2-y^2].$$

Bezeichnet also C' eine neue Constante, so hat man:

$$\frac{\mathrm{MN}}{C'^2}=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}},$$

und folglich entweder $\mathrm{M}=0$, oder $\mathrm{N}=C'$. Das allgemeine Integral ist also:

$$(b^2-1)y+abx\pm x\sqrt{a^2+b^2-1}=C$$

und drückt eine gerade Linie aus.

Beispiel 2. Es sei:

$$s^2 = x^2 + y^2,$$

so muß man, da:

$$u=\sqrt{1+t^2},\quad v=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad 1+t^2-u^2=0$$

ist, zu den nicht transformirten Formeln zurückgehen. Nun ist aber:

$$u-vt=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad v^2-1=-\frac{1}{1-t^2},\quad vu-t=0,$$

folglich:

$$y'-t=0,\quad \text{oder } \frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0,$$

und mithin:

$$y = Cx.$$

Beispiel 3. Es sei:

$$s^2 = y^2 + mx^2,$$

so ist:

$$u=\sqrt{t^2+m},\quad v=\frac{t}{\sqrt{t^2+m}},$$

$$1+t^2-u^2=1-m,\quad u-vt=\frac{m}{\sqrt{t^2+m}},$$

$$v^2-1=\frac{-m}{t^2+m}$$

und:

$$lx = lC - l\sqrt{m-1} - \frac{1}{m-1}\int \frac{dt\sqrt{m^2-m}}{\sqrt{t^2+m}}$$

$$= lC + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m-1}} l[t+\sqrt{t^2+m}],$$

$$\frac{x}{C} = \left(\frac{y+\sqrt{y^2+mx^2}}{x}\right)^{\sqrt{\frac{m}{m-1}}}.$$

Wenn man hat:

$$\frac{m}{m-1} = n^2, \text{ oder } m = \frac{n^2}{n^2-1},$$

und folglich:

$$s^2 = y^2 + \frac{n^2}{n^2-1}\, x^2,$$

so ist die Gleichung der Curve algebraisch und von der Form:

$$x^{n+1} = c\left(y^2 + \sqrt{y^2 + \frac{n^2x^2}{n^2-1}}\right)^n, \text{ oder } y = \frac{(n^2-1)x^{\frac{2}{n}} - n^2c^{\frac{2}{n}}}{2(n^2-1)c^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1-n}{n}}}.$$

Wenn $n = \frac{1}{\mu}$ wäre, so hätte man zu gleicher Zeit:

$$y = \frac{c^{2\mu} + (\mu^2-1)x^{2\mu}}{2(\mu^2-1)c^{\mu}x^{\mu-1}}, \quad s = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{\mu^2-1}}.$$

Beispiel 4. Es sei:

$$y = \frac{c^4+3x^4}{6c^2x}, \text{ so ist } s = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{3}}.$$

Ein und dreißigste Vorlesung.

Integration einiger der merkwürdigsten besondern Differenzialgleichungen der ersten Ordnung. — Riccati's Gleichung, etc.

---

§. 187. Die Differenzialgleichung der ersten Ordnung:

$$dy = (ay^2 + bx^m)dx,$$

welche unter dem Namen der Riccatischen Gleichung bekannt ist, ist der Gegenstand der Untersuchungen vieler Geometer gewesen, welche eine große Anzahl von Fällen gefunden haben, in denen die Integration möglich wird, d. h. in welchen sich das allgemeine Integral durch algebraische, exponentielle und logarithmische Functionen, so wie durch unbestimmte Integrale ausdrücken läßt, oder auf eine Gleichung zurückgeführt werden kann, worin die Veränderlichen getrennt sind.

Der einfachste Fall ist der, wo $m=0$ ist; denn alsdann hat man unmittelbar:

$$dx = \frac{dy}{b + ay^2}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{ba}} \operatorname{arc\ tang} \frac{y\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + C.$$

Setzt man $y = z^n$, so ist $dy = nz^{n-1}dz$, und wenn man in die Riccatische Gleichung substituirt:

$$nz^{n-1}dz = az^{2n}dx + bx^m dx.$$

Diese transformirte Gleichung ist homogen, und folglich integrabel, wenn man hat:

$$n - 1 = 2n = m, \text{ oder } n = -1, \ m = -2$$

und verwandelt sich in:

$$x^2dz + bz^2dx + ax^2dx = 0.$$

Nachdem wir diese beiden besondern Fälle betrachtet haben, wollen wir zu der allgemeinen Bestimmung der Fälle der Integrabilität übergehen, und um auf dem kürzesten Wege zum Ziele zu gelangen, setzen:

$$y = -\left(\frac{1}{ax} + \frac{z}{x^2}\right),$$

folglich:

$$dy = \frac{dx}{ax^2} - \frac{dz}{x^2} + \frac{2zdx}{x^3},\quad y^2 = \frac{1}{a^2x^2} + \frac{2z}{ax^3} + \frac{z^2}{x^4}.$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in die Gleichung:

$$dy - (ay^2 + bx^m)dx = 0,$$

ſo erhält man nach verrichteten Reductionen:

$$x^2dz = -bx^{m+4}dx - az^2dx,$$

oder wenn man $x = \frac{1}{u}$ ſetzt:

$$dz = (az^2 + bu^{-m-4})du.$$

Wenn nun die Riccatiſche Gleichung in dem oben angegebenen Sinne für einen gewiſſen Werth μ von m integrabel iſt, ſo iſt ſie es auch noch, wenn man $m = -\mu - 4$ ſetzt; denn ſubſtituirt man dieſen Werth für m in die transformirte Gleichung:

$$dz = (az^2 + bu^{-m-4})du,$$

ſo verwandelt ſie ſich in folgende:

$$dz = (az^2 + bu^{\mu})du,$$

worin ſich die Veränderlichen nach der Vorausſetzung trennen laſſen. Nun haben wir aber geſehen, daß die Riccatiſche Gleichung integrabel iſt, wenn $m = 0$ iſt, und ſie iſt es folglich auch, wenn $m = -4$ iſt.

Wir wollen die Gleichung:

$$dy = (ay^2 + bx^m)dx,$$

wieder betrachten, und $y = -\frac{1}{z}$, folglich $dy = \frac{dz}{z^2}$ ſetzen; ſo kommt:

$$dz = bz^2x^m dx + adx,$$

und wenn man

$$x^{m+1} = u,\ \text{alſo}\ x^m dx = \frac{du}{m+1}$$

ſetzt:

$$dz = \frac{b}{m+1}z^2du + \frac{a}{m+1}u^{-\frac{m}{m+1}}du.$$

Wenn alſo die Riccatiſche Gleichung für einen Werth $m = \mu$ integrabel iſt, ſo iſt ſie es auch für $m = -\frac{\mu}{\mu+1}$; denn wenn man dieſen Werth in den Exponenten $-\frac{m}{m+1}$ ſubſtituirt, ſo reducirt ſich derſelbe auf μ. Nun haben wir aber bewieſen, daß die Riccatiſche Gleichung für $m = -4$ integrabel iſt, und folglich iſt ſie es auch für $m = \frac{4}{-4+1} = -\frac{4}{3}$. Da ſie ferner für $m = -\frac{4}{3}$ integrabel iſt, ſo iſt ſie es auch für $m = \frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3}$, und folg-

lich auch für $m = -\frac{-\frac{8}{5}}{-\frac{8}{5}+1} = -\frac{8}{3}$. Wenn man diese Rechnung, welche auf dem Satze beruht, daß die Riccatische Gleichung, wenn sie für $m=\mu$ integrabel ist, auch für $m=\mu-4$ und für $m=\frac{-\mu}{\mu+1}$ integrabel ist, weiter fortsetzt; so ergiebt sich, daß die Riccatische Gleichung integrabel ist, wenn der Exponent der Veränderlichen x einem Gliede der unendlichen Reihe:

$$(a)\quad 0, -2, -4, -\tfrac{4}{3}, -\tfrac{8}{5}, -\tfrac{8}{5}, -\tfrac{12}{5}, -\tfrac{12}{7}, -\tfrac{16}{7}, \ldots,$$

deren allgemeines Glied von dem dritten Gliede an durch $\frac{n-4}{2n \mp 1}$ ausgedrückt wird, gleich ist. Wenn man successive $n=0$ und $n=\infty$ setzt, so giebt dieses allgemeine Glied die beiden ersten Glieder 0 und -2.

§. 188. Als besondern Fall wollen wir die Differenzialgleichung:

$$dy = y^2 dx + 2x^{-\frac{8}{5}} dx$$

betrachten, so ist der Exponent von x, nämlich $-\frac{8}{5}$ das fünfte Glied der vorhergehenden Reihe, und wir sind sicher, daß die gegebene Gleichung integrabel ist. Da ferner der Exponent $-\frac{8}{5}$ in der fraglichen Reihe ein Glied von ungeradem Range bildet so wollen wir die gegebene Gleichung mit:

$$dz = (az^2 + bu^{-m-4})du$$

vergleichen, wodurch sich ergiebt:

$$b=2,\ m+4=\tfrac{8}{5},\ m=-\tfrac{4}{5},\ a=1,$$

und wenn man in die Gleichung:

$$dy = (ay^2 + bx^m)dx$$

substituirt; so kommt:

$$dy_1 = y_1^2\, dx_1 + 2x_1^{-\frac{4}{3}}\, dx_1.$$

Vergleicht man diese letzte Gleichung mit der transformirten:

$$dx = \frac{b}{m+1} z^2 du + \frac{a}{m+1} u^{-\frac{m}{m+1}} du,$$

so findet man:

$$\frac{a}{m+1} = 2, \frac{b}{m+1} = 1, \frac{m}{m+1} = \frac{4}{3},$$

folglich:

$$a=-6,\ b=-3,\ m=-4,$$

und wenn man wieder in die Gleichung:

$$dy = (ay^2 + bx^m)dx$$

ſubſtituirt; ſo erhält man die Gleichung:

$$dy_2 = -6y_2^2\,dx_2 - x_2^{-4}dx_2,$$

welche man wieder mit:

$$dz = (az^2 + bu^{-m-4})du$$

vergleichen muß, wodurch man erhält:

$$a = -6,\ b = -3,\ m = 0,$$

Subſtituirt man in die Gleichung:

$$dy = (ay^2 + bx^m)dx,$$

ſo bekommt man die Gleichung:

$$dy_3 = -3\,dx_3 - 6y_3^2\,dx_3, \text{ oder } \tfrac{1}{3}\frac{dy_3}{1+2y_3^2} = -dx_3,$$

deren Integral folgendes iſt:

$$x_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \text{ arc tang } y_3\sqrt{2} + C.$$

Aber wenn man von den Werthen von x_3, y_3 zu denen von x, y übergeht, ſo findet man:

$$x_3 = \frac{1}{x^2},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{x_1}},\ x_1 = \frac{1}{x},$$

$$y_3 = \frac{\sqrt[3]{x}\,[1 - 6y_2\sqrt[3]{x}]}{6},$$

$$y_2 = -\frac{1}{y_1},\ y_1 = -x(1+xy),$$

folglich:

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{x}},\quad y_3 = \frac{\sqrt[3]{x^2} + y\sqrt[3]{x^5} - 6}{6(1+xy)\sqrt[3]{x}},$$

und wenn man dieſe Werthe von x_3, y_3 ſubſtituirt; ſo erhält man endlich für das geſuchte Integral:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ arc tang } \frac{\sqrt[3]{x^2} + y\sqrt[3]{x^5} - 6}{3\sqrt[3]{2}\,(1+xy)\sqrt[3]{x}} + C.$$

Aus dieſem Beiſpiele erhellet zur Genüge, wie man in jedem beſondern Falle verfahren muß. Wenn nämlich der Exponent von x in der gegebenen Gleichung einem Gliede der Reihe (a) von einem ungeraden Range gleich iſt, ſo muß man ſie zunächſt mit der Gleichung:

$$dz = (az^2 + bu^{-m-4})du$$

vergleichen, um die Werthe der Conſtanten a, b zu beſtimmen, welche man alsdann in die Gleichung:

$$dy = (ay^2 + bx^m)dx$$

ſubſtituirt. Auf dieſe Weiſe erhält man eine neue Gleichung, welche man mit der folgenden:

$$dz = \frac{b}{m+1} z^2 du + \frac{a}{m+1} u^{-\frac{m}{m+1}} du$$

vergleichen muß, und wenn man die neuen Werthe der Conſtanten in die Gleichung:

$$dy = (ay^2 + bx^m)dx$$

ſubſtituirt; ſo erhält man eine neue transformirte Gleichung, welche man mit:

$$dz = (az^2 + bu^{-m-4})du$$

vergleicht, u. ſ. f., bis man auf eine Gleichung kommt, worin der Exponent von x endlich $= 0$ geworden iſt, und alsdann hat man blos noch die Differenzialgleichung:

$$dx = \frac{dy}{a + by^2},$$

worin die Veränderlichen getrennt ſind, zu integriren.

Wenn der Exponent von x in der gegebenen Gleichung ein Glied von gerade m Range der Reihe (a) wäre, ſo müßte man ſie zuerſt mit der Gleichung:

$$dz = \frac{b}{m+1} z^2 du + \frac{a}{m+1} u^{-\frac{m}{m+1}} du$$

vergleichen und dann wie vorhin die Operation weiter fortſetzen. —

§. 189. Die Fälle der Integrabilität oder die, worin die Veränderlichen der Riccatiſchen Gleichung getrennt werden können, ſind ſehr beſchränkt; man hat ſie durch beſondere Kunſtgriffe erhalten und aus der angewandten Methode geht nicht hervor, daß ſie die allein möglichen ſind. Liouville hat zuerſt durch eine genaue Analyſe gezeigt, daß ſie in der That die allein zuläſſigen ſind, wenn man y blos durch algebraiſche, exponentielle und logarithmiſche Functionen von x und durch unbeſtimmte Integrationen in Beziehung auf die Veränderliche x ausdrücken will; aber es iſt nicht möglich, hier auch nur einen Begriff von dem von Liouville eingeſchlagenen Ganze zu geben. Dieſelbe Methode hat Liouville in ſeinen gelehrten Abhandlungen über die Claſſification der Functionen zur Auflöſung einer großen Anzahl bis dahin unerreichbar geweſener Aufgaben geführt.

Jede Differenzialgleichung von der Form:

$$dy = by^2 x^n dx + ax^m dx,$$

worin n eine beliebige von der Einheit verſchiedene Zahl bezeichnet, läßt ſich auf die Riccatiſche Differenzialgleichung zurückführen. Denn ſetzt man $x^n dx = dz$, ſo iſt:

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} = z,\ x = [(n+1)z]^{\frac{1}{n+1}},$$

$$dx = \frac{z^{-\frac{n}{n+1}}dz}{\sqrt[n+1]{(n+1)^n}},\ x^m = \sqrt[n+1]{[(n+1)z]^m},$$

und wenn man dieſe Werthe ſubſtituirt; ſo erhält man unmittelbar die transformirte Gleichung:

$$dy = a(n+1)^{\frac{m-n}{n+1}} z^{\frac{m-n}{n+1}} dz + by^2 dz.$$

Man kann auch die viergliedrige Differenzialgleichung:

$$dy = ay^2 dx + byx^m dx + cx^n dx$$

auf die Riccatiſche zurückzuführen ſuchen. Setzt man zu dem Zwecke $y = z + \alpha x^r$, wo α und r zwei unbeſtimmte Conſtanten ſind; ſo ergiebt ſich:

$$dy = dz + r\alpha x^{r-1} dx,$$

$$dz = -r\alpha x^{r-1} dx + az^2 dx + 2az\alpha x^r dx + a\alpha^2 x^{2r} dx + bzx^n dx + b\alpha x^{n+r} dx + cx^n dx.$$

Das erſte, vierte und ſechste Glied im zweiten Theile dieſer letzten Gleichung kann man homogen machen, wenn man ſetzt:

$$r - 1 = 2r = r + n, \text{ oder } r = -1,\ n = -1,$$

und alsdann hat man die Gleichung:

$$dz = (a\alpha^2 + b\alpha + \alpha)x^{-2} dx + (2a\alpha + b)zx^{-1} dx + az^2 dx + cx^n dx.$$

Die beiden erſten Glieder im zweiten Theile dieſer Gleichung verſchwinden und die transformirte Gleichung ſtimmt mit der Riccatiſchen überein, wenn man hat:

$$a\alpha^2 + b\alpha + \alpha = 0,\ 2a\alpha + b = 0,$$

folglich:

$$\alpha = \frac{-1-b}{a},\ \alpha = -\frac{b}{2a},\ b + 1 = \frac{b}{2},\ b = -2$$

und hieraus folgt, daß ſich die viergliedrigen Gleichungen von der Form:

$$dy = ay^2 dx - \frac{2ydx}{x} + cx^n dx$$

auf die Riccatiſche Gleichung zurückführen laſſen.

Wenn man in der Differenzialgleichung:

$$dy = ay^2 x^m dx + byx^n dx + cx^p dx$$

ſetzt:

$$x^m dx = dz, \text{ folglich } x^{m+1} = (m+1)z,$$

$$x^n dx = (m+1)^{\frac{n-m}{m+1}} z^{\frac{n-m}{m+1}} dz,$$

$$x^p dx = (p+1)^{\frac{p-m}{m+1}} x^{\frac{p-m}{m+1}} dx,$$

so wird sie auf die Form:

$$dy = ay^2 dz + c(p+1)^{\frac{p-m}{m+1}} z^{\frac{p-m}{m+1}} dz + by(m+1)^{\frac{n-m}{m+1}} z^{\frac{n-m}{m+1}} dz$$

zurückgeführt, welche ihrerseits auf die Riccatische Differenzialgleichung zurückgeführt werden kann, wenn man hat:

$$b(m+1)^{\frac{n-m}{m+1}} = -2, \frac{n-m}{m+1} = -1$$

oder:

$$m = -\frac{b+2}{2}, n = -1,$$

und wenn folglich die gegebene Gleichung folgende ist:

$$dy = ay^2 x^{-\frac{b+2}{2}} dx + byx^{-1} dx + cx^m dx;$$

denn diese letzte Gleichung wird auf die Riccatische zurückgeführt, wenn man setzt:

$$\frac{dx}{x^{\frac{b+2}{2}}} = dz, \; y = u + \frac{1}{az}.$$

Wenn man endlich in der Riccatischen Gleichung setzt:

$$y = -\frac{1}{az}\frac{dz}{dx}, \; ab = -A,$$

so verwandelt sie sich in folgende:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = Axx^m,$$

welche sich ihrerseits in:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{2n}{t}\frac{dz}{dt} = Bz, \text{ und } \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{n(n-1)}{t^2}u = Bu$$

verwandelt, wenn man setzt:

$$x^{\frac{m}{2}+1} = t, \; n = \frac{m}{2(m+2)}, \; B = \frac{A}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}, \; u = t^n z.$$

Später werden wir zeigen, wie man ein particuläres und zuweilen auch das allgemeine Integral der linearen Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$\frac{d^2z}{dx^2} = Az\,x^m$$

und der Riccatiſchen Gleichung, welche ſich daraus ergiebt, wenn man ſetzt:

$$z = e^{\int y dx}$$

vermittelſt einer einfachen Quadratur erhalten kann.

§. 190. Jacobi hat in Crelle's Journal der Mathematik das allgemeine Integral der Differenzialgleichung:

$$(A+A'x+A''y)\,(xdy-ydx) - (B+B'x+B''y)\,dy + (C+C'x+C''y)\,dx = 0$$

angegeben, von welcher die Differenzialgleichung:

$$ydx(c+nx) - dy(y+a+bx+nx^2) = 0,$$

oder: $$nx(xdy-ydx) - (a+bx+y)dy + cydx = 0,$$

welche Euler im erſten Bande ſeiner Integralrechnung ſehr elegant behandelt hat, ein beſonderer Fall iſt. Wir glauben, hier die von Jacobi angewandte Methode, welche ebenſo fruchtbar als ſinnreich iſt, näher erörtern zu müſſen. Wenn man ſetzt:

$$u = \frac{a'+b'x+c'y}{a+bx+cy},\quad v = \frac{a''+b''x+c''y}{a+bx+cy}$$

und der Kürze wegen:

$$\alpha = b'c'' - b''c',\quad \alpha' = b''c - bc'',\quad \alpha'' = bc' - b'c,$$
$$\beta = c'a'' - c''a',\quad \beta' = c''a - ca'',\quad \beta'' = ca' - c'a,$$
$$\gamma = a'b'' - a''b',\quad \gamma' = a''b - ab'',\quad \gamma'' = ab' - a'b,$$
$$\delta = a(b'c'' - b''c') + b(c'a'' - c''a') + c(a'b'' - a''b'),$$

ſo findet man:

$$a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0,\quad a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = 0,\quad a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = \delta,$$
$$a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = 0,\quad a''\alpha' + b''\beta' + c''\gamma' = 0,\quad a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' = 0;$$

$$z^2du = +\alpha''(xdy - ydx) - \beta''dy + \gamma''dx,$$
$$z^2dv = -\alpha'(xdy - ydx) + b'dy - \gamma'dx$$

und wenn man für x, y, dx, dy ihre Werthe als Functionen von u, v, du, dv in die gegebene Gleichung ſubſtituirt; ſo verwandelt ſie ſich in folgende:

$$Mdu + Ndv = 0,$$

oder wenn man für du, dv ihre Werthe ſetzt:

$$(\alpha''M - \alpha'N)\,(xdy - ydx) - (\beta''M - \beta'N)\,dy + (\gamma''M - \gamma'N)\,dx = 0.$$

Wir wollen dieſe letzte durch z multiplicirte Gleichung mit der gegebenen vergleichen und eine unbeſtimmte Größe S' ſo annehmen, daß man hat:

$$z(\alpha'M-\alpha'N)+S' = A+A'x+A''y,$$
$$z(\beta'M-\beta'N)+S'x = B+B'x+B''y,$$
$$z(\gamma'M-\gamma'N)+S'y = C+C'x+C''y$$

und wenn man die zwiſchen den Coefficienten $a, a', a'', \ldots$; $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ etc. ſtattfindenden Gleichungen berückſichtigt, ſo ergiebt ſich aus dieſen letzten Gleichungen:

$$S'(a+bx+cy) =$$
$$Aa+Bb+Cc+(A'a+B'b+C'c)x+(A''a+B''b+C''c)y,$$
$$-\partial zN+S'(a'+b'x+c'y) =$$
$$Aa'+Bb'+Cc'+(A'a'+B'b'+C'c')x+(A''a'+B''b'+C''c')y,$$
$$-\partial zM+S'(a''+b''x+c''y) =$$
$$Aa''+Bb''+Cc''+(A'a''+B'b''+C'c'')x+(A''a''+B''b''+C''c'')y.$$

Nun genügt man aber dieſen drei Gleichungen, wenn man hat:

$$-\partial N=(S''-S')u, \qquad \partial M=(S'''-S')v,$$
$$(A-S')a+Bb+Cc=0, \quad A'a+(B'-S')b+C'c=0$$
$$A''a+B''b+(C''-S')C=0,$$
$$(A-S'')a'+Bb'+Cc'=0, \quad A'a'+(B'-S'')b'+C'c'=0,$$
$$A''a'+B''b'+(C''-S'')C'=0,$$
$$(A-S''')a''+Bb''+Cc''=0, \quad A'a''+(B'-S''')b''+C'c''=0,$$
$$A''a''+B''b''+(C''-S''')C''=0,$$

und damit dieſen letzten Gleichungen Genüge geſchieht, braucht man offenbar nur, nachdem man für S', S'', S''' die drei Wurzeln der Gleichung:

$$(A-S)(B'-S)(C''-S)-B''C'(A-S)-CA''(B'-S)-A'B(C''-S)$$
$$+A'B''C+A''BC'=0$$

genommen hat, die Werthe der Verhältniſſe $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b'}{a'}$, $\frac{c'}{a'}$, ... zu beſtimmen, was immer ſehr leicht iſt. Alsdann verwandelt ſich die Differenzialgleichung $Mdu+Ndv=0$, welche mit der gegebenen identiſch iſt, in folgende:

$$(S'''-S')vdu-(S''-S')udv=0$$

und hat zum allgemeinen Integrale:

$$u^{S'''-S'}v^{S'-S''}=C,$$

oder:

$$(a+bx+cy)^{S''-S'''}(a'+b'x+c'y)^{S'''-S'}\times$$
$$(a''+b''x+c''y)^{S'-S''}=C.$$

Auf diese Weise gelangt man zu dem folgenden Satze:

Wenn die Differenzialgleichung:

$$(A+A'x+A''y)(xdy-ydx)-(B+B'x+B''y)dy + (C+C'x+C''y)dx=0$$

gegeben ist, und man löst die Gleichung des dritten Grades:

$$(A-S)(B'-S)(C''-S)-B''C'(A-S)- CA''(B'-S)-A'B(C''-S)+A'B''C+A''BC')=0$$

auf, bezeichnet die drei Wurzeln derselben mit S', S'', S''' und setzt der Kürze wegen:

$$B'C''-B''C'=D,\ C'A''-C''A'=D',\ A'B''-A''B'=D'',$$
$$B'+C''=E;$$

so ist das gesuchte allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung:

$$[D-ES'+S'^2+(D'+A'S')x+(D''+A''S')y]^{S''-S'''}$$
$$\times[D-ES''+S''^2+(D'+A'S'')x+(D''+A''S'')y]^{S'-S'''}$$
$$\times[D-ES'''+S'''^2+(D'+A'S''')x+(D''+A''S''')y]^{S'-S''}=C.$$

Anmerkung. Da die Bedingungsgleichungen blos die Werthe der Verhältnisse:

$$\frac{b}{a'},\ \frac{c}{a'},\ \frac{b'}{a'},\ \frac{c'}{a'},\cdots\ \frac{b''}{a'''},\ \frac{c''}{a''}$$

geben, so bleiben drei der neun Größen a, b, c,.... willkührlich und die Transformation kann auf unendlich viele Arten bewerkstelligt werden. Die Jacobische Methode ist von der Eulerschen ganz verschieden; denn Euler setzt, um die Veränderlichen in der Differenzialgleichung:

$$ydx(c+nx)-dy(y+a+bx+nx^2)=0$$

zu trennen:

$$z=\frac{y(c+nx)}{y+a+bx+nx^2}$$

und gelangt so zu der transformirten Gleichung:

$$\frac{dz}{z[na+c^2-bc+(b-2c)z+z^2]}=\frac{dx}{(c+nx)(a+bx+nx^2)},$$

welche sich durch bekannte Methoden integriren läßt. Euler folgerte aus seiner Analyse, daß der Factor:

$$\frac{1}{ny^3+(2na-bc)y^2+n(b-2c)xy^2+(na+c^2-bc)(a+bx+nx)y^2}$$

den ersten Theil seiner Differenzialgleichung zu einem genauen Differenziale macht.

§. 191. Als letztes Beispiel wollen wir noch die Differenzialgleichung:

(A) $$\frac{dx}{\sqrt{a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4}}=\frac{dy}{\sqrt{a_0y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4}}$$

betrachten, worin die Veränderlichen getrennt ſind, und deren allgemeines Integral eine algebraiſche Function iſt, während ſich die Integrale der beiden Theile dieſer Gleichung, einzeln genommen, bis jetzt nicht durch bekannte algebraiſche, logarithmiſche, trigonometriſche, etc. Functionen haben genau ausdrücken laſſen. Wir wollen ſetzen:

$$\sqrt{a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4}=\sqrt{u},$$
$$\sqrt{a_0y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4}=\sqrt{v}$$
$$dx=dz\sqrt{u},\ dy=dz\sqrt{v}$$

und z als eine unabhängige Veränderliche betrachten; ſo kommt:

$$du=(4a_0x^3+3a_1x^2+2a_2x+a_3)\,dx,$$
$$dv=(4a_0y^3+3a_1y^2+2a_2y+a_3)\,dy,$$
$$u=\frac{dx^2}{dz^2},\ v=\frac{dy^2}{dz^2},\ du=\frac{2dxd^2x}{dz^2},\ dv=\frac{2dyd^2y}{dz^2},$$

$$\frac{2d^2x}{dz^2}=4a_0x^3+3a_1x^2+2a_2x+a_3,\ \frac{2d^2y}{dz^2}=4a_0y^3+3a_1y^2+2a_2y+a_3,$$

$$\frac{dx^2-dy^2}{dz^2}=u-v$$
$$=a_0(x^4-y^4)+a_1(x^3-y^3)+a_2(x^2-y^2)+a_3(x-y),$$
$$\frac{d^2x+d^2y}{dz^2}=\frac{d(dx+dy)}{dz^2}=$$
$$2a_0(x^3+y^3)+\frac{3a_1}{2}(x^2+y^2)+a_2(x+y)+a_3.$$

Ferner wollen wir $x-y=s$, $x+y=t$, und folglich:

$$dx-dy=ds,\ dx+dy=dt$$

ſetzen, ſo verwandeln ſich die beiden letzten Gleichungen in:

$$\frac{dsdt}{sdz^2}=\frac{a_0}{2}(t^3+s^2t)+\frac{a_1}{4}(3t^2+s^2)+a_2t+a_3,$$
$$\frac{d^2t}{dz^2}=\frac{a_0}{2}(t^3+3s^2t)+\frac{3a_1}{4}(t^2+s^2)+a_2t+a_3.$$

Zieht man ſie von einander ab und multiplicirt die Differenz durch $\frac{2dt}{s^2}$, ſo erhält man:

$$\frac{1}{dz^2}\left(\frac{2dt}{s^2}\frac{d^2t}{s^2}-\frac{2dsdt^2}{s^3}\right)=\frac{1}{dz^2}d\frac{dt^2}{s^2}=2a_0tdt+a_1dt$$

und folglich, wenn man integrirt:

$$\frac{1}{dz^2}\frac{dt^2}{s^2}=a_0t^2+a_1t+C,\ \frac{dt}{dz}=s\sqrt{a_0t^2+a_1t+C}.$$

Man hat nun blos noch in dieſe letzte Gleichung für s, t, $\frac{dt}{dz}$ ihre Werthe:

$$x-y,\ x+y,\ \frac{dx}{dz}+\frac{dy}{ds}=\sqrt{u}+\sqrt{v}$$

zu ſubſtituiren, um das geſuchte allgemeine Integral:

$$\sqrt{a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4}+\sqrt{a_0y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4}$$
$$=(x-y)\sqrt{a_0(x+y)^2+a_1(x+y)+C}$$

zu erhalten.

Wenn die Differenzialgleichungen:

$$\frac{dx}{\sqrt{A_0x^6+A_1x^4+A_2x^2+A_3}}=\frac{dy}{\sqrt{A_0y^6+A_1y^4+A_2y^2+A_3}},$$

$$\frac{dx}{x\sqrt{A_0x^{2n}+A_1x^n+A_2}}=\frac{dy}{y\sqrt{A_0y^{2n}+A_1y^n+A_2}}$$

gegeben wären, ſo ſetzte man für die erſte:

$$x^2=\xi,\ y^2=\eta,\ \text{alſo}\ dx=\frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}},\ dy=\frac{d\eta}{2\sqrt{\eta}}$$

und für die zweite:

$$x^n=\xi,\ y^n=\eta,\ \text{alſo}\ dx=\frac{1}{n}\xi^{\frac{1-n}{n}}d\xi,\ dy=\frac{1}{n}\eta^{\frac{1-n}{n}}d\eta,$$

wodurch ſie unmittelbar auf die bereits integrirte Gleichung, oder auf den Werth dieſer Gleichung, wenn $a_4=0$ iſt, zurückgeführt werden. Auf dieſe Weiſe findet man, daß das Integral der zweiten der gegebenen Gleichungen folgendes iſt:

$$x^n\sqrt{A_0x^{2n}+A_1x^n+A_2}+y^n\sqrt{A_0y^{2n}+A_1y^n+A_2}$$
$$=(x^n-y^n)\sqrt{A_0(x^n+y^n)^2+A_1(x^n+y^n)+C}.$$

Die Methode, welche uns auf das Integral der Gleichung (A) geführt hat, iſt nicht auf die allgemeinere Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}}=\frac{dy}{\sqrt{a_0y^n+a_1y^{n-1}+\ldots+a_n}}$$

anwendbar; denn wenn $n>4$ iſt, ſo enthält die:

$$\frac{1}{dz^2}d\frac{dt^2}{s^2}=2a_0tdt+a_1dt$$

entſprechende Hülfsgleichung in ihrem zweiten Theile Glieder mit der Veränderlichen s und kann im Allgemeinen nur dann integrirt werden, wenn man die Coefficienten der höhern Potenzen von x und y als die vierte gleich Null ſetzt.

Richelot hat in Crelle's Journal eine Methode angegeben, welche von der unſrigen etwas verſchieden iſt. Er ſetzt nämlich:

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=f(x),$$

wodurch sich die gegebene Gleichung in folgende verwandelt:

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$$

und man kann annehmen, daß x, y zwei Functionen einer neuen Veränderlichen z sind, welche durch die Gleichungen:

$$\frac{dx}{dz}=\sqrt{f(x)},\quad \frac{dy}{dz}=\sqrt{f(y)}$$

bestimmt wird. Ferner wollen wir setzen:

$$x+y=t,\quad x-y=s,$$

so ergiebt sich:

$$\frac{dt}{dz}=\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)},\quad \frac{ds}{dz}=\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(y)},$$

$$\frac{d^2t}{dz^2}=\tfrac{1}{2}[f'(x)+f'(y)],$$

$$s\frac{d^2t}{dz^2}-\frac{ds}{dz}\frac{dt}{dz}=\tfrac{1}{2}[f'(x)+f'(y)](x-y)-[f(x)-f(y)].$$

Aber wenn man setzt:

$$\tfrac{1}{2}[f'(x)+f'(y)](x-y)-[f(x)-f(y)]=\mathrm{F}(x),$$

so erhält man:

$$\mathrm{F}'(x)=\tfrac{1}{2}(x-y)f''(x)-\tfrac{1}{2}[f'(x)-f'(y)],$$
$$\mathrm{F}''(x)=\tfrac{1}{2}(x-y)f'''(x),$$

und da die Function $\mathrm{F}(x)$, sowohl als ihre erste und zweite Ableitung für $x=y$ verschwindet; so ist sie durch $(x-y)^3$ theilbar, und da sie außerdem höchstens vom vierten Grade ist, so hat man:

$$\mathrm{F}(x)=(x-y)^3(\alpha x+\beta y+\gamma).$$

Vergleicht man diesen neuen Ausdruck von $\mathrm{F}(x)$ mit dem ersten, so findet man:

$$\alpha=\beta=a_0,\quad \gamma=\tfrac{1}{2}a_1$$

und folglich:

$$\mathrm{F}(x)=(x-y)^3[a_0(x+y)+\tfrac{1}{2}a_1]=s^3(a_0t+\tfrac{1}{2}a_1),$$
$$s\frac{d^2t}{dz^2}-\frac{ds}{dz}\frac{dt}{dz}=s^3(a_0t+\tfrac{1}{2}a_1)$$

oder:

$$2\frac{\mathrm{D}_z t}{s}d\frac{\mathrm{D}_z t}{s}=2a_0t\,dt+a_1dt.$$

Die unmittelbare Integration giebt alsdann:

$$\left(\frac{\mathrm{D}_z t}{s}\right)-a_0t^2+a_1t=C$$

und endlich:

$$\left[\frac{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}{x-y}\right]^2 - a_0(x+y)^2 - a_1(x+y) = C,$$

welches das bereits gefundene Integral ist.

Wenn man in der Differenzialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$$

$\frac{1}{x}$ für x und $\frac{1}{y}$ für y substituirt, und außerdem setzt:

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = f(x),$$

so verwandelt sie sich in folgende:

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}},$$

und ihr Integral ist:

$$\left[\frac{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}{x-y}\right]^2 - a_4(x+y)^2 - a_3(x+y) = C.$$

Da sich ferner diese letzte Gleichung durch eine neue Transformation von x in $\frac{1}{x}$ und von y in $\frac{1}{y}$ in folgende verwandelt:

$$\left[\frac{x^2\sqrt{f(y)}+y^2\sqrt{f(x)}}{xy(x-y)}\right]^2 - a_4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2 - a_3\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y}\right) = C,$$

so erhält man das Integral der Differenzialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$$

unter einer zweiten Form. Diese beiden Integrale müssen identisch sein, weil eine Differenzialgleichung nur ein vollständiges oder allgemeines Integral haben kann; und in der That erhält man eine identische Gleichung $0=0$, wenn man diese beiden Integrale von einander abzieht und für $f(x)$, $f(y)$ ihre Werthe substituirt.

§. 192. Cauchy ist in seinen Vorlesungen an der polytechnischen Schule zu Paris auf eine ganz andere Weise zu dem Integrale der Differenzialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$$

gelangt. Er betrachtet nämlich zuerst den besondern Fall:

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0x^4+a_2x^2+1}} = \frac{dy}{\sqrt{a_0y^4+a_2y^2+1}}$$

und untersucht dann, ob eine in Beziehung auf x und y symmetrische Gleichung des vierten Grades:

$$A_1x^2y^2 + A_2(x^2+y^2) + 2A_3xy - 1 = u = 0$$

der gegebenen Differenzialgleichung nicht genügen kann. Zu dem Zwecke wollen wir bemerken, daß sich u auf die beiden Formen:

$$u=(A_1x^2+A_2)y^2+2A_3xy+(A_2x^2-1)=Xy^2+2X_1y+X_2,$$

$$u=(A_1y^2+A_2)x^2+2A_3yx+(A_2y^2-1)=Yx^2+2Y_1x+Y_2$$

bringen läßt, woraus folgt:

$$\frac{du}{dx}=2(Yx+Y_1),\quad \frac{du}{dy}=2(Xy+X_1),\quad \frac{dy}{Yx+Y_1}=\frac{dx}{Xy+X_1}.$$

Aus der Gleichung:

$$u=Yx^2+2Y_1x+Y_2=0$$

ergiebt sich ferner:

$$Y^2x^2+2YY_1x+Y_1^2=Y_1^2-YY_2,$$

oder:

$$Yx+Y_1=\sqrt{Y_1^2-YY_2}$$

und ebenso findet man:

$$Xy+X_1=\sqrt{X_1^2+XX_2}.$$

Die Gleichung $u=0$ zieht also die folgende:

$$\frac{dx}{\sqrt{X_1^2-XX_2}}=\frac{dy}{\sqrt{Y_1^2-YY_2}}$$

nach sich, welche man mit der gegebenen identificirt, wenn man setzt:

$$A_3^2-A_2^2+A_1=a_2A_2,\quad A_1=-a_0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich die Werthe zweier der drei Coefficienten A_3, A_2, A_1, wovon der dritte unbestimmt bleibt und die Constante des gesuchten allgemeinen Integrales ist.

Wenn die Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4}}=\frac{dy}{\sqrt{a_0y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4}}$$

gegeben wäre, so setzte man:

$$u=0=(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)y^2+2(\alpha'x^2+2\beta'x+\gamma')y+\alpha''x^2+2\beta''x+\gamma''$$

$$=(\alpha y^2+2\alpha'y+\alpha'')x^2+2(\beta y^2+2\beta'y+\beta'')x+\gamma y^2+2\gamma'y+\gamma''$$

und $\beta=\alpha'$, $\gamma'=\beta''$, $\gamma=\alpha''$, damit, wenn u eine in Beziehung auf x und y symmetrische Function ist, die Anzahl der Constanten auf 6 reducirt wird. Alsdann hat man:

$$u=Xy^2+2X_1y+X_2=Yx^2+2Y_1x+Y_2$$

und folglich:

$$\frac{du}{dx} = 2(Yx + Y_1), \quad \frac{du}{dy} = 2(Xy + X_1),$$

$$X^2y^2 + 2X_1Xy + X_1^2 = X_1^2 + XX_2,$$

$$Xy + X_1 = \sqrt{X_1^2 - XX_2}, \quad Yx + Y_1 = \sqrt{Y_1^2 - YY_2},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{X_1^2 - XX_2}} = \frac{dy}{\sqrt{Y_1^2 - YY_2}},$$

und man braucht alsdann blos noch das Polynom des vierten Grades $X_1^2 - XX_2$ mit:

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

zu identificiren, damit $u = 0$ der gegebenen Gleichung genügt. Eine der 6 Constanten bleibt unbestimmt, und $u = 0$ ist das gesuchte allgemeine Integral.

Die Integration der Ausdrücke von der Form:

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4}}$$

ist besonders in den letzten Jahren der Gegenstand der Untersuchungen der größten Geometer gewesen, und wir müssen die Analyse dieser Arbeiten, sowie die vollständige Theorie der elliptischen Functionen in einen besondern Anhang verweisen.

Zwei und dreißigſte Vorleſung.

Integration der totalen Differenzialgleichungen mit einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen.

---

§. 193. Die allgemeinſte Form dieſer Gleichungen iſt, wenn die Differenziale von der erſten Ordnung ſind:

$$M dx + N dy + P dz + Q dr + \text{etc.} = 0.$$

Betrachten wir zunächſt den Fall, wo dieſe Gleichung nur drei Veränderliche enthält und ſich auf:

$$M dx + N dy + P dz = 0$$

reducirt, ſo kann es geſchehen, daß man in dem erſten Theile derſelben das genaue Differenzial einer gewiſſen Function $u = F(x, y, z)$ erkennt, ſo daß ſich die gegebene Gleichung auf die Form:

$$du = df(x, y, z) = 0$$

bringen läßt, und in dieſem Falle iſt klar, daß das allgemeine Integral derſelben folgendes iſt:

$$u = f(x, y, z) = C.$$

Aber der Ausdruck $M dx + N dy + P dz$ kann das genaue Differenzial einer Function $u = F(x, y, z)$ ſein, ohne daß man unmittelbar erkennen kann, welches dieſe Function iſt. Gleichwohl iſt die Integration in dieſem Falle leicht und ſicher, weil man die Function u immer beſtimmen kann. Denn wenn man identiſch hat:

$$M dx + N dy + P dz = \varphi(x, y, z)\, dx + \chi(x, y, z)\, dy + \psi(x, y, z)\, dz$$

$$= du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz,$$

ſo muß man auch haben:

$$M = \frac{du}{dx} = \varphi(x, y, z), \quad N = \frac{du}{dy} = \chi(x, y z),$$

$$P = \frac{du}{dz} = \psi(x, y, z),$$

und folglich:

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx},\quad \frac{dN}{dz}=\frac{dP}{dy},\quad \frac{dP}{dx}=\frac{dM}{dz}.$$

Sobald aber diese Bedingungen erfüllt werden, kann man die Function u leicht auf folgende Weise berechnen.

Da M oder $\varphi(x, y, z)$ die Ableitung von u in Beziehung auf x ist, so muß man haben:

$$u=\int_{x_0}^{x}\varphi(x,y,z)\,dx+v,$$

wo v blos eine Function der beiden Veränderlichen y, z bezeichnet. Hieraus folgt:

$$\frac{du}{dy}=\int_{x_0}^{x}\frac{d\varphi(x,y,z)}{dy}\,dx+\frac{dv}{dy}=\int_{x_0}^{x}\frac{d\chi(x,y,z)}{dx}\,dx+\frac{dv}{dy}$$

$$=\chi(x,y,z)-\chi(x_0,y,z)+\frac{dv}{dy}.$$

Aber da $\frac{du}{dy}=\chi(x,y,z)$ ist, so muß man haben:

$$\frac{dv}{dy}-\chi(x_0,y,z)=0,\quad v=\int_{y_0}^{y}\chi(x_0,y,z)\,dy+w,$$

wo w eine Function von x allein bezeichnet. Man hat folglich:

$$u=\int_{x_0}^{x}\varphi(x,y,z)\,dx+\int_{y_0}^{y}\chi(x_0,y,z)\,dy+w,$$

und wenn man in Beziehung auf z differenzirt:

$$\frac{du}{dz}=\int_{x_0}^{x}\frac{d\varphi(x,y,z)}{dz}\,dx+\int_{y_0}^{y}\frac{d\chi(x_0,y,z)}{dz}\,dy+\frac{dw}{dz}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{d\varphi(x,y,z)}{dz}=\frac{d\psi(x,y,z)}{dx},\quad \frac{d\chi(x_0,y,z)}{dz}=\frac{d\psi(x_0,y,z)}{dy},$$

folglich:

$$\frac{du}{dz}=\int_{x_0}^{x}\frac{d\psi(x,y,z)}{dx}\,dx+\int_{y_0}^{y}\frac{d\psi(x_0,y,z)}{dy}\,dy+\frac{dw}{dz},$$

und wenn man die Integration verrichtet und reducirt:

$$\frac{du}{dz}=\psi(x,y,z)-\psi(x_0,y,z)+\frac{dw}{dz}.$$

Es ist aber $\frac{du}{dz}=\psi(x,y,z)$, folglich:

$$\frac{dw}{dz}=\psi(x_0,y_0,z),\quad w=\int_{z_0}^{z}\psi(x_0,y_0,z)\,dz+C,$$

und mithin:

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y, z)\, dx + \int_{y_0}^{y} \chi(x_0, y, z)\, dy + \int_{z_0}^{z} \psi(x_0, y_0, z)\, dz + C,$$

welches das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung:

$$M dx + N dy + P dz = 0$$

ist.

Beispiel 1. Die gegebene Differenzialgleichung sei:

$$(y+z)\, dx + (x+z)\, dy + (x+y)\, dz,$$

so ist das Integral derselben:

$$xy dx + xz dy + xy dz = C.$$

Beispiel 2. Die gegebene Differenzialgleichung sei:

$$(2y^2 + 4ax^2z^2)\, x dx + \left(\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} + 3y + 2x^2\right) y dy + \left(4z^2 + 2ax^2 + \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\right) z dz,$$

so ist:

$$\varphi = (2y^2 + 4ax^2z^2)\, x, \quad \chi = \left(\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}} + 3y + 2x^2\right) y,$$

$$\psi = \left(4z^2 + 2ax^2 + \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\right) z;$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = 4xy = \frac{d\chi}{dx}, \quad \frac{d\chi}{dz} = -\frac{yz}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{d\psi}{dy},$$

$$\frac{d\psi}{dy} = 4ax^2z = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Die erforderlichen Bedingungen werden also erfüllt, und da:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x, y, z)\, dx = x^2y^2 + ax^4z^2 - x_0^2y^2 - ax_0^4z^2,$$

$$\int_{y_0}^{y} \chi(x_0, y, z)\, dy = y^3 + \sqrt{y^2+z^2} + x_0^2y^2 - y_0^3 - \sqrt{y_0^2+z^2} - x_0^2y_0^2,$$

$$\int_{z_0}^{z} \psi(x_0, y_0, z)\, dz = z^4 + ax^4z^2 + \sqrt{y_0^2+z^2} - z_0^4 - ax_0^4z_0^2 - \sqrt{y_0^2+z_0^2},$$

ist, so ist das gesuchte allgemeine Integral:

$$u = x^2y^2 + ax^4z^2 + y^3 + z^4 + \sqrt{y^2+z^2} + C.$$

§. 194. Wenn man, um den ersten Theil der Differenzialgleichung:

$$M dx + N dy + P dz = 0$$

zu einem genauen Differenziale zu machen, denſelben blos mit einem bekannten Factor zu multipliciren braucht, oder mit andern Worten, wenn man identiſch hat:

$$v(\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy+\mathrm{P}dz)=du;$$

ſo kann man die gegebene Differenzialgleichung auf die Form $\frac{1}{v}du=0$ bringen, und man genügt derſelben, ſowohl, wenn man $du=0$ oder $u=C$, als wenn man $\frac{1}{v}=0$ ſetzt. Die Gleichung $u=C$ iſt das allgemeine Integral und die aus der Gleichung $\frac{1}{v}=0$ abgeleiteten Werthe von z, als Functionen von x, y, ſind particuläre, oder ſinguläre Integrale.

Aber der Ausdruck:

$$v(\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy+\mathrm{P}dz)$$

kann kein genaues Differenzial ſein, ohne daß man hat:

$$\mathrm{D}_y.v\mathrm{M}=\mathrm{D}_x.v\mathrm{N},\quad \mathrm{D}_x.v\mathrm{N}=\mathrm{D}_y.v\mathrm{P},\quad \mathrm{D}_x.v\mathrm{P}=\mathrm{D}_z.v\mathrm{M},$$

oder wenn man entwickelt:

$$\begin{aligned}
v(\mathrm{D}_y\mathrm{M}-\mathrm{D}_x\mathrm{N})&=\mathrm{N}\mathrm{D}_xv-\mathrm{M}\mathrm{D}_yv,\\
v(\mathrm{D}_x\mathrm{N}-\mathrm{D}_y\mathrm{P})&=\mathrm{P}\mathrm{D}_yv-\mathrm{N}\mathrm{D}_xv,\\
v(\mathrm{D}_x\mathrm{P}-\mathrm{D}_z\mathrm{M})&=\mathrm{M}\mathrm{D}_zv-\mathrm{P}\mathrm{D}_xv.
\end{aligned}$$

Wenn man die erſte dieſer Gleichungen mit P, die zweite mit M, die dritte mit N multiplicirt und die Producte zuſammenaddirt; ſo verſchwindet v und man erhält die Bedingungsgleichung:

$$(a)\quad \mathrm{P}(\mathrm{D}_x\mathrm{N}-\mathrm{D}_y\mathrm{M})+\mathrm{N}(\mathrm{D}_z\mathrm{M}-\mathrm{D}_x\mathrm{P})+\mathrm{M}(\mathrm{D}_y\mathrm{P}-\mathrm{D}_z\mathrm{N})=0,$$

welche nothwendig erfüllt werden muß, wenn der Factor, welcher den erſten Theil der gegebenen Differenzialgleichung integrabel macht, wirklich exiſtirt.

§. 195. Umgekehrt, wenn dieſe Bedingung erfüllt wird, ſo iſt die gegebene Differenzialgleichung wirklich integrabel, d. h. ihre Integration iſt auf die einer Gleichung mit zwei Veränderlichen zurückgeführt. Denn bringt man die Gleichung:

$$\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy+\mathrm{P}dz=0$$

auf die Form:

$$dz=-\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}}dy-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}dx$$

und denkt ſich den Werth von z als Function von x, y in die Functionen M, N, P ſubſtituirt; ſo ſind $-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}$, $-\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}}$ die Ableitungen von z in Beziehung auf x, y. Wenn man folglich zunächſt die allgemeinſte Function von z ſucht, welche der Bedingung genügt,

daß ihre Ableitung in Beziehung auf y gleich $-\frac{N}{P}$ ist, indem x als eine Constante betrachtet wird; so ist der gesuchte Werth von z in der auf diese Weise bestimmten Function enthalten und letzterer braucht nur noch der zweiten Bedingung zu genügen, $-\frac{M}{P}$ zur partiellen Ableitung in Beziehung auf x zu haben, oder der gegebenen Gleichung zu genügen. Man muß daher zuerst das Integral der Gleichung:

$$dz = -\frac{N}{P}\,dy, \text{ oder } dz + \frac{N}{P}\,dy = 0$$

suchen. Dieses Integral existirt in dem Falle, wo die Functionen M, N, P, wie wir hier voraussetzen, stetig sind. Nun bezeichne φ den Factor, welcher $dz + \frac{N}{P}\,dy$ zu einem genauen Differenziale macht, w die Function, deren Differenzial $\left(dz + \frac{N}{P}\,dy\right)\varphi$ ist, und χ eine Function von x; so ist $w = \chi$ das gesuchte Integral, und man muß χ so bestimmen, daß die Gleichung:

$$\frac{dw}{dx}\,dx + \frac{dw}{dy}\,dy + \frac{dw}{dz}\,dz - \frac{d\chi}{dx}\,dx = 0$$

oder:

$$\left(dz + \frac{N}{P}\,dy\right)\varphi + \frac{dw}{dx}\,dx - \frac{d\chi}{dx}\,dx = 0$$

mit der, wenn man will, mit einem gewissen Factor, z. B. mit $\frac{\varphi}{P}$, multiplicirten gegebenen Differenzialgleichung identisch wird. Die Vergleichung der beiden Gleichungen:

$$\left(dz + \frac{N}{P}\,dy\right)\varphi + \frac{dw}{dx}\,dx - \frac{d\chi}{dx}\,dx = 0,$$

$$\left(dz + \frac{N}{P}\,dy + \frac{M}{P}\,dx\right)\varphi = 0$$

giebt aber:

$$\frac{d\chi}{dx} = \frac{dw}{dx} - \varphi\frac{M}{P}.$$

Diese letzte Gleichung ist aber offenbar integrabel, und folglich auch die gegebene Gleichung, wenn, indem man für z seinen aus der Gleichung $w = \chi$ abgeleiteten Werth substituirt, y verschwindet; denn alsdann enthält die vorhergehende Differenzialgleichung nur noch die beiden Veränderlichen x und χ. Die Bedingung der Integrabilität der gegebenen Differenzialgleichung reducirt sich also darauf, daß das Differenzial des Ausdruckes:

$$\frac{dw}{dx} - \varphi\frac{M}{P}$$

in Beziehung auf y, worin man y als eine durch die Gleichung $w=\chi$ bestimmte Function von z betrachtet, identisch $=0$ ist, so daß man hat:

$$D_y\left(\frac{dw}{dx}-\varphi\frac{M}{P}\right)=0.$$

Wenn man aber diese Bedingungsgleichung entwickelt, so findet man:

$$\frac{d^2w}{dxdy}+\frac{d^2w}{dxdz}\cdot\frac{dz}{dy}-\varphi\left(D_y\frac{M}{P}+D_z\frac{M}{P}\cdot\frac{dz}{dy}\right)$$
$$-\frac{M}{P}\left(\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\right)=0,$$

und vermöge der Gleichungen:

$$\left(dz+\frac{N}{P}dy\right)\varphi=0,\quad w=\chi,$$

wovon die erste ein genaues Differenzial und die zweite das Integral der ersten ist, hat man:

$$\frac{dw}{dy}=\varphi\frac{N}{P},\quad\frac{dw}{dz}=\varphi,\quad\frac{dz}{dy}=-\frac{N}{P},\quad\frac{d\varphi}{dy}=\frac{d.\varphi\frac{N}{P}}{dz},$$

folglich:

$$\frac{d^2w}{dxdy}=D_x\varphi\frac{N}{P}=\frac{N}{P}\frac{d\varphi}{dx}+\varphi D_x\frac{N}{P}$$
$$\frac{d^2w}{dxdz}\cdot\frac{dz}{dy}=-\frac{N}{P}\cdot\frac{d\varphi}{dx},\quad\frac{d\varphi}{dy}=\frac{N}{P}\frac{d\varphi}{dz}+\varphi D_z\frac{N}{P}.$$

Wenn man diese Werthe substituirt, so verwandelt sich die vorhergehende Bedingungsgleichung in folgende:

$$D_x\frac{N}{P}-D_y\frac{M}{P}+\frac{N}{P}D_z\frac{M}{P}-\frac{M}{P}D_z\frac{N}{P}=0,$$

oder:

$$P(D_xN-D_yM)+N(D_zM-D_xP)+M(D_yP-D_zN).$$

Nun ist aber diese letzte Gleichung nichts anders, als die bereits gefundene Bedingungsgleichung (a), und wenn sie erfüllt wird, so ist folglich die gegebene Differenzialgleichung:

$$Mdx+Ndy+Pdz=0$$

integrabel, und ihre Integration läßt sich auf die successive Integration zweier Differenzialgleichungen mit zwei Veränderlichen zurückführen.

§. 296. Wenn man bemerkt, daß die drei Veränderlichen x,y,z nur durch eine Gleichung mit einander verbunden sind, so können blos zwei derselben x,y als unabhängig betrachtet werden, und die Bedingungsgleichung (a) kann successive die folgenden Formen annehmen:

$$\frac{dy}{dy}\frac{M}{P} = \frac{dx}{dx}\frac{N}{P},$$

$$\frac{NdM - MdN}{dz} + \frac{MdP - PdM}{dy} + \frac{PdN - NdP}{dx} = 0;$$

$$\frac{d.l\frac{N}{M}}{Pdx} + \frac{d.l\frac{M}{P}}{Ndy} + \frac{d.l\frac{P}{N}}{Mdx} = 0,$$

$$\frac{\frac{dM}{M} - \frac{dN}{N}}{Pdz} + \frac{\frac{dP}{P} - \frac{dM}{M}}{Ndy} + \frac{\frac{dN}{N} - \frac{dP}{P}}{Mdx} = 0,$$

und wenn man setzt:

$$A = \frac{dP}{dy} - \frac{dN}{dz}, \quad B = \frac{dP}{dx} - \frac{dM}{dz}, \quad C = \frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy},$$

so ist:

$$AM + BN + CP = 0.$$

Wir wollen diese Methode auf einige Beispiele anwenden.

Beispiel 1. Es sei:

$$ydx - xdy - \frac{y^2}{z}dz = 0,$$

so ist:

$$M = y, \quad N = -x, \quad P = -\frac{y^2}{z}$$

und der Bedingungsgleichung (a) wird genügt. Setzt man x constant, und folglich $dx = 0$, so hat man:

$$-xdy - \frac{y^2}{z}dz = 0, \quad -x\frac{dy}{y^2} - \frac{dz}{z} = 0, \quad \frac{x}{y} - lz = \chi.$$

Differenzirt man und vergleicht mit der durch y dividirten gegebenen Gleichung, so findet man:

$$y^2 d\chi = 0, \quad \chi = C$$

und das Integral dieser gegebenen Gleichung ist folglich:

$$\frac{x}{y} - lz = C.$$

Beispiel 2. Es sei:

$$(y^2 + yz)dx + (xz + z^2)dy + (y^2 - xy)dz = 0,$$

so ist:

$$M = y^2 + yz, \quad N = xz + z^2, \quad P = y^2 - xy$$

und die Bedingungsgleichung wird erfüllt. Betrachtet man z als constant, so hat man zu integriren:

$$(y^2 + yz)dx + (xz + z^2)dy = 0,$$

oder:

$$\frac{dx}{xz+z^2}+\frac{dy}{y^2+yz}=0,$$

oder:

$$\frac{dx}{z(x+z)}+\frac{dy}{zy}-\frac{dy}{z(y+z)}=0,$$

und endlich:

$$\frac{dx}{x+z}+\frac{dy}{y}-\frac{dy}{y+z}=0.$$

Das Integral dieſer letzten Gleichung iſt:

$$\frac{xy+zy}{y+z}=\chi.$$

Differenzirt man daſſelbe in Beziehung auf x, y, z und vergleicht mit der gegebenen Differenzialgleichung, ſo findet man:

$$\frac{(y^2+yz)\,dx+(xz+z^2)\,dy+(y^2-xy)\,dz}{(y+z)^2}=d\chi=0,$$

und folglich $\chi = C$. Das geſuchte Integral iſt alſo endlich:

$$\frac{xy+zy}{y+z}=C.$$

Wenn man y zuerſt als conſtant betrachtet hätte, ſo hätte man erhalten:

$$\frac{dx}{y^2-xy}+\frac{dz}{y+yz}=0,$$

oder:

$$\frac{dx}{y-x}+\frac{dz}{y+z}=0,\quad \frac{y+z}{y-x}=\chi,$$

$$\frac{(y+z)\,dx-(x+z)\,dy+(y-x)\,dz}{(y-x)^2}=d\chi,$$

$$\frac{(y^2+yz)\,dx-(xy+yz)\,dy+(y^2-xy)\,dz}{y(y-x)^2}=d\chi,$$

$$d\chi=-\frac{(xy+yz)\,dy+(xz+z^2)\,dy}{y(y-x)^2}=-\frac{(x+z)(y+z)\,dy}{y(y-x)^2},$$

und wenn man z vermittelſt der Gleichung $\frac{y+z}{y-x}=\chi$ eliminirt; ſo findet man:

$$d\chi=-\frac{\chi(\chi-1)}{y}\,dy,\quad \frac{d\chi}{\chi(\chi-1)}=-\frac{dy}{y},$$

$$\frac{d\chi}{\chi-1}-\frac{d\chi}{\chi}=-\frac{dy}{y},\quad \frac{\chi-1}{\chi}=\frac{C}{y},\quad \chi=\frac{y}{y-C}$$

Das gesuchte Integral ist folglich:

$$\frac{y+z}{y-x}=\frac{y}{y-C} \text{ oder } \frac{xy+yz}{y+z}=C.$$

Beispiel 3. Es sei:

$$dx(ay-bz)+dy(cz-ax)+dz(bx-cy)=0,$$

so hat man:

$$M=ay-bz,\quad N=cz-ax,\quad P=bx-cy,$$

$$A=2c,\quad B=2b,\quad C=2a,\quad AM+BN+CP=0$$

und wenn man z als constant betrachtet; so erhält man:

$$\frac{dx}{cz-ax}+\frac{dy}{ay-bz}=0,\ \frac{1}{a}\frac{ay-bz}{cz-ax}=\chi.$$

Differenzirt man diese letzte Gleichung, so findet man:

$$\frac{dx(ay-bz)+dy(cz-ax)+dz(bx-cy)}{(cz-ax)^2}=d\chi,$$

und wenn man mit der gegebenen Gleichung vergleicht:

$$d\chi=0,\quad \chi=C.$$

Das gesuchte Integral ist folglich:

$$\frac{ay-bz}{cz-ax}=C, \text{ oder } ay+Cax-(b+Cc)z=0.$$

Wenn man dasselbe auf die Form:

$$mx+ny+pz=0$$

brächte, so müßte man haben:

$$mc+nb+pa=0.$$

Der Factor $\frac{1}{(cz-ax)^2}$ macht den ersten Theil zu einem genauen Differenziale $d\chi$, und dasselbe gilt von den Factoren:

$$\frac{1}{(ay-bx)^2},\ \frac{1}{(bx-cy)^2}, \text{ etc.}$$

Beispiel 4. Es sei:

$$dx(y^2+yz+z^2)+dy(z^2+zx+x^2)+dz(x^2+xy+y^2)=0$$

die gegebene Differenzialgleichung, so hat man:

$$M=y^2+yz+z^2,\quad N=z^2+zx+x^2,\quad P=x^2+xy+y^2,$$

$$A=2z+x-x-2y=2(z-y),\quad B=(2x+y-y-2z)=2(x-z),$$

$$C=(2y+z-z-2x)=2(y-x),$$

$$AM+BN+CP=2(z^3-y^3)+2(x^3-z^3)+2(y^3-x^3)=0.$$

Betrachtet man z als constant, so kommt:

$$\frac{dx}{x^2+xz+z^2}+\frac{dy}{y^2+zy+z^2}=0,$$

und wenn man integrirt:

$$\frac{2}{z\sqrt{3}}\text{ arc tang}\frac{x\sqrt{3}}{2z+x}+\frac{2}{z\sqrt{3}}\text{ arc tang}\frac{y\sqrt{3}}{2z+y}$$
$$=\frac{2}{z\sqrt{3}}\text{ arc tang}\frac{(xz+yz+xy)\sqrt{3}}{2z^2+xz+yz-xy}=f(z).$$

Setzt man:

$$\frac{zx+yz+xy}{2z^2+xz+yz-xy}=\chi$$

und differenzirt, so erhält man:

$$\frac{\left[\begin{matrix}2zdx(y^2+yz+z^2)+2zdy(z^2+zx+x^2)\\-2xdz(z^2+yz+y^2)-2ydz(z^2+zx+x^2)\end{matrix}\right]}{(2z^2+zx+yz-xy)^2}=d\chi,$$

und wenn man bemerkt, daß die gegebene Gleichung giebt:

$$dx(y^2+yz+z^2)+dy(z^2+zx+x^2)=-dz(x^2+xy+y^2);$$

so erhält man, wenn man substituirt:

$$\frac{-2zdz(x^2+xy+y^2)-2xdz(z^2+yz+y^2)-2ydz(z^2+zx+x^2)}{(2z^2+zx+yz-xy)^2}=d\chi$$

oder:

$$\frac{-2dz(x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+x^2y+xy^2+3xyz)}{(2z^2+zx+yz-xy)^2}$$
$$=\frac{-2dz(x+y+z)(xy+zx+yz)}{(2z^2+zx+yz-xy)^2}=d\chi.$$

Da aber:

$$\chi=\frac{xy+zx+yz}{2z^2+zx+yz-xy}$$

ist, so muß man haben:

$$-\frac{d\chi}{\chi^2}=\frac{2dz(x+y+z)}{xy+zx+yz}.$$

Aus der Gleichung, welche χ giebt, folgt:

$$1+\chi=\frac{2z^2+2zx+2xy}{2z^2+zx+yz-xy},\quad\frac{1+\chi}{\chi}=\frac{2z(x+y+z)}{xy+zx+yz},$$

und mithin:

$$-\frac{d\chi}{\chi^2}=\frac{2dz(x+y+z)}{xy+zx+xy}=dz\,\frac{1+\chi}{\chi^2},$$

also:

$$\frac{-d\chi}{\chi(1+\chi)}=-\frac{d\chi}{\chi}+\frac{d\chi}{1+\chi}=\frac{dz}{z},$$
$$1\,\frac{1+\chi}{\chi}+1C=1z,\ \frac{z}{C}=\frac{1+\chi}{\chi},\ \chi=\frac{C}{z-C}.$$

Das gesuchte Integral ist folglich:

$$\frac{xy+zx+yz}{2z^2+zx+zy-xy} = \frac{C}{z-C}$$

oder:

$$xy+zx+yz = C(x+y+z).$$

Man sieht unmittelbar, daß man durch Differenzirung der Gleichung:

$$\frac{xy+zx+yz}{x+y+z} = C$$

die gegebene Differenzialgleichung wieder erhält, deren erster Theil folglich ein genaues Differenzial wird, wenn man denselben mit einem der beiden Factoren:

$$\frac{1}{(x+y+z)^2}, \quad \frac{1}{(xy+zx+zy)^2}$$

multiplicirt.

Dieses Beispiel zeigt, daß die Berechnung der Function χ zuweilen ziemlich schwierig ist, und in dem gegenwärtigen Falle wäre man auf folgende Weise schneller zum Ziele gelangt. Aus der Gleichung:

$$\frac{xy+zx+yz}{2z^2+xz+yz-xy} = \chi = f(z)$$

folgt:

$$\frac{1}{\chi} = \frac{2z^2+zx+yz-xy}{xy+zx+yz}, \quad 1+\frac{1}{\chi} = \frac{2z(x+y+z)}{xy+zx+yz},$$

$$\frac{xy+zx+yz}{x+y+z} = \frac{2\chi z}{1+\chi} = f(z) = \psi,$$

und wenn man differenzirt, um mit der gegebenen Gleichung zu vergleichen:

$$\psi = \frac{xy+zx+zy}{x+y+z} = C.$$

Beispiel 5. Es sei:

$$dx(x^2-y^2+z^2)-z^2dy+zdz(y-x)+\frac{xdz}{z}(y^2-x^2)=0,$$

so ist:

$$M=x^2-y^2+z^2,\ N=-z^2,\ P=z(y-x)+\frac{x}{z}(y^2-x^2),$$

$$A=-3z-\frac{2xy}{z},\ B=-3z+\frac{y^2}{z}-\frac{3x^2}{z},$$

$$C=-2y,\ AM+BN+CP=0.$$

Setzt man $dz=0$, so hat man:

$$dx(x^2-y^2+z^2)-z^2dy=0,$$

und dieser Gleichung wird genügt, wenn man $y=x$ setzt. Wir

wollen nun unterſuchen, ob $y = x + \frac{z^2}{u}$ das allgemeine Integral ſein kann. Differenzirt und vergleicht man, ſo findet man:

$$du - \frac{2uxdx}{z^2} = dx,$$

und wenn man mit $e^{-\frac{x^2}{z^2}}$ multiplicirt, dann integrirt und für u ſeinen Werth:

$$u = \frac{z^2}{y-x}$$

ſubſtituirt; ſo kommt:

$$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}} dx = \frac{e^{-\frac{x^2}{z^2}} z^2}{y-x} + \chi.$$

Dieſe letzte Gleichung hat man nun noch zu differenziren, um ſie mit der gegebenen zu identificiren, und auf dieſe Weiſe erhält man:

$$e^{-\frac{x^2}{z^2}} dx + \frac{2dz}{z^3} \int e^{-\frac{x^2}{z^2}} x^2 dx$$

$$= e^{-\frac{x^2}{z^2}} \left[\frac{2zdz}{y-x} - \frac{z^2dy + z^2dx}{(y-x)^2} + \frac{2x^2dz - 2xzdx}{z(y-x)} \right] + d\chi.$$

Das beſtimmte Integral im erſten Theile dieſer letzten Gleichung, worin z als conſtant betrachtet wird, kann man vermittelſt der theilweiſen Integration reduciren; denn man hat:

$$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}} x^2 dx = -\tfrac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{z^2}} xz^2 + \tfrac{1}{2} z^2 \int e^{-\frac{x^2}{2z}} dx,$$

oder weil:

$$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}} dx = \frac{e^{-\frac{x^2}{z^2}} z^2}{y-x} + \chi,$$

iſt:

$$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}} x^2 dx = -\tfrac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{z^2}} xz^2 + \frac{e^{-\frac{x^2}{z^2}} z^4}{2(y-x)} + \tfrac{1}{2} \chi z^2.$$

Subſtituirt man, ſo hat man endlich mit der gegebenen Gleichung die folgende:

$$e^{-\frac{x^2}{z^2}} \left(dx - x\frac{dz}{z} + \frac{zdz}{y-x} \right) + \frac{\chi dz}{z}$$

$$= e^{-\frac{x^2}{z^2}} \left[\frac{2xdz}{y-x} - \frac{z^2dy}{(y-x)^2} + \frac{z^2dx}{(y-x)^2} - \frac{2xdx}{y-x} + \frac{2x^2dz}{z(y-x)} \right] + d\chi$$

oder:

$$e^{-\frac{x^2}{z^2}}\left[\frac{dx(y+x)}{y-x}-\frac{z^2dx}{(y-x)^2}+\frac{z^2dy}{(y-x)^2}-\frac{zdz}{y-x}-\frac{x(y+x)dz}{z(y-x)}\right]$$
$$=\frac{zd\chi-\chi dz}{z},$$

oder endlich:

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{z^2}}}{(y-x)^2}\left[dx\,(y^2-x^2-z^2)+z^2dy-zdz\,(y-x)-\frac{xdz}{z}\,(y^2-x^2)\right]$$
$$=\frac{zd\chi-\chi dz}{z}$$

zu vergleichen. Aus dieſer Vergleichung ergiebt ſich, daß man haben muß:

$$zd\chi-\chi dz=0$$

und folglich:

$$\chi=Cz.$$

Das geſuchte Integral iſt folglich:

$$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}dx=\frac{e^{-\frac{x^2}{z^2}}z^2}{y-x}+Cz.$$

Euler bemerkt mit Recht, daß dieſes allgemeine Integral zweideutig und unbeſtimmt bleibt, ſo lange die Integration nicht verrichtet iſt, weil die ſich aus dem unbeſtimmten Integrale $\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}dx$, worin z als conſtant betrachtet wird, ergebende Conſtante eine Function von z ſein muß. Glücklicherweiſe kann man dieſe Zweideutigkeit beſeitigen, wenn man beide Theile der letzten Gleichung durch z dividirt und $\frac{x}{z}=u$ ſetzt; denn alsdann erhält man:

$$\int e^{-u^2}du+C=e^{-u^2}\frac{z}{y-x}.$$

Die noch zu verrichtende Integration bezieht ſich auf eine einzige Veränderliche, und es wird dadurch nur eine einfache willkührliche Conſtante eingeführt, welche ſich zu C addirt. Um die in Rede ſtehende Zweideutigkeit zu vermeiden, hätten wir die Gleichung:

$$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}dx=\frac{e^{-\frac{x^2}{z^2}}z^2}{y-x}+\chi$$

unmittelbar auf folgende Form bringen können:

$$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}\frac{dx}{z}=\int e^{-\left(\frac{x}{z}\right)^2}d.\frac{x}{z}=e^{-\frac{x^2}{z^2}}\frac{z}{y-x}+\chi,$$

und da das Integral daſſelbe bleibt, z mag conſtant, oder veränderlich ſein; ſo hätte man unmittelbar in Beziehung auf alle Veränderliche x,y,z differenziren können, um mit der gegebenen Gleichung zu vergleichen, wodurch man erhalten hätte:

$$e^{-\frac{x^2}{z^2}}\left(\frac{dx}{z}-x\frac{dz}{z^2}\right)$$

$$=e^{-\frac{x^2}{z^2}}\left[\frac{dz}{y-x}+\frac{zdx-zdy}{(y-x)^2}-\frac{2xdx}{(y-x)}+\frac{2x^2dz}{z^2(y-x)}\right]+d\chi,$$

folglich:

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{z^2}}}{z(y-x)^2}\left[dx(y^2-x^2-z^2)+z^2dy-zdz\,(y-x)-\frac{xdx}{z}\,(y^2-x^2)\right]=d\chi,$$

und mithin:

$$d\chi=0,\quad \chi=C,\text{ etc.}$$

§. 196. Aus dem Vorhergehenden ſieht man: 1) daß die Differenzialgleichung der erſten Ordnung nicht immer integrabel iſt, d. h. nicht immer als das Differenzial einer Gleichung mit drei Veränderlichen betrachtet werden kann; 2) daß das allgemeine Integral, wenn es exiſtirt, eine willkührliche Conſtante enthält; 3) daß die Integration möglich iſt, wenn nur die Bedingungsgleichung (a) erfüllt wird, und alsdann auf die Integration zweier Differenzialgleichungen der erſten Ordnung zurückgeführt wird.

Wenn die Bedingungsgleichung (a) nicht erfüllt wird, ſo wird die Integration unmöglich, und die gegebene Differenzialgleichung:

$$\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy+\mathrm{P}dz=0$$

kann nicht mehr als die Differenzialgleichung einer gewiſſen Fläche betrachtet werden; allein man kann immer ſagen, daß ſie durch das Syſtem der beiden Gleichungen:

$$w=\chi(x),\ \frac{dw}{dx}-\varphi\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}=\chi(x)$$

verificirt wird, von welcher Beſchaffenheit übrigens die willkührliche Function χ auch ſein mag. Die gegebene Differenzialgleichung drückt alsdann eine gemeinſame Eigenſchaft unendlich vieler durch die beiden letzten Gleichungen ausgedrückter Curven von doppelter Krümmung aus.

Beiſpiel 1. Es ſei:

$$[z(z-a)+y(y-b)]\,dx-(x-c)\,(ydy+zdz)=0,$$

ſo iſt:

$$M = z(x-a)+y(y-b),\quad N=-y(x-a),$$
$$P=-z(x-c)$$

und die Bedingungsgleichung (*a*) wird nicht erfüllt. Setzt man $\varphi = z$, so findet man:

$$w=\frac{z^2+y^2}{2}$$

und die gegebene Differenzialgleichung wird folglich durch das System der beiden Gleichungen:

$$\frac{z^2+y^2}{2}=\chi(x),\quad \frac{z(z-a)+v(y-b)}{x-c}=\chi'(x).$$

verificirt.

Beispiel 2. Es sei:

$$ydx+(z-x)dy+(x-z)dz=0,$$

so ist:

$$M=y,\quad N=z-x,\quad P=x-z,$$

die Bedingungsgleichung (*a*) wird nicht erfüllt, man hat:

$$\varphi=1,\quad w=z-y$$

und die gegebene Differenzialgleichung wird durch das System der beiden Gleichungen:

$$z-y=\chi(x),\ \frac{-y}{x-z}=\chi'(x)$$

verificirt.

Beispiel 3. Die Differenzialgleichung:

$$zdx+xdy+ydz=0$$

wird durch das System der beiden Gleichungen:

$$z+xly=\chi(x),\ \frac{yly-y}{y}=\chi'(x)$$

verificirt.

Monge ist zuerst auf die Idee gekommen, in dem Systeme der beiden Gleichungen:

$$w=\chi(x),\ \frac{dw}{dx}-\varphi\frac{M}{P}=\chi'(x)$$

die Auflösung der vorgelegten Aufgabe zu suchen.

§. 197. In der Mechanik finden gewisse merkwürdige Eigenschaften nur dann statt, wenn das Trinom:

$$Xdx+Ydy+Zdz$$

ein genaues Differenzial ist, so daß man folglich untersuchen muß, in welchen Fällen diese Bedingung erfüllt wird. Cauchy hat

dieſes Trinom ſchon ſeit langer Zeit auf eine ſolche Form gebracht, daß man unmittelbar erkennen kann, ob daſſelbe ein genaues Differenzial iſt, oder nicht. Denn wir wollen X, Y, Z als Größen betrachten, welche den Coſinus der Winkel α, β, γ proportional ſind, die eine bewegliche gerade Linie mit den Coordinatenaxen bildet, ſo daß man hat:

$$\frac{\cos\alpha}{X} = \frac{\cos\beta}{Y} = \frac{\cos\gamma}{Z} = \pm\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} = \frac{1}{R}$$

und annehmen, daß man, nachdem man für jeden Punct $M(x,y,z)$ die entſprechende gerade Linie und auf dieſen geraden Linien eine willkührliche Länge $Mm = r$ genommen hat, eine auf allen dieſen geraden Linien normale Fläche conſtruiren könne; ſo findet man leicht, daß:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \pm Rdr$$

iſt. Denn betrachtet man zwei aufeinander folgende Puncte:

$$M(x,y,z) \text{ und } M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z),$$

ſind m, m' die entſprechenden Puncte auf der in Rede ſtehenden Fläche und legt man durch den Punct M eine zu der Linie mm' parallele Ebene; ſo bildet man ein rechtwinkliges Dreieck MM'N, worin die Hypotenuſe MM' gleich:

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

iſt, während die dem Winkel M gegenüber liegende Kathete $= \Delta r$ iſt, und man hat offenbar:

$$\cos M = \frac{\Delta r}{\Delta s} = \pm\frac{X}{R}\frac{\Delta x}{\Delta s} \pm \frac{Y}{R}\frac{\Delta y}{\Delta s} \pm \frac{Z}{R}\frac{\Delta s}{\Delta s},$$

und wenn man zu der Grenze übergeht:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \pm Rdr.$$

Dieſes iſt die ſehr einfache Form, welche man dem in Rede ſtehenden Trinome geben kann, woraus ſich unmittelbar ergiebt, daß daſſelbe ein genaues Differenzial iſt, wenn es ein Syſtem von Flächen giebt, welche die durch die Gleichung:

$$\frac{\cos\alpha}{X} = \frac{\cos\beta}{Y} = \frac{\cos\gamma}{Z}$$

beſtimmten Richtungen unter rechten Winkeln durchſchneiden, und wenn in jedem Puncte die Größe:

$$R = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$

eine Function der Entfernung r iſt.

J. Bertrand, welcher ohne Zweifel die Cauchy'sche Transformation nicht gekannt hat, hat dieselbe in dem Journal de l'Ecole Polytechnique wiederholt, und er beweist, daß das Trinom $Xdx+Ydy+Zdz$ nur dann ein genaues Differenzial sein kann, wenn die Größe $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ im umgekehrten Verhältnisse der Entfernung zweier aufeinander folgender Orthogonalflächen steht, und in einigen besondern Fällen kann dieser Ausdruck der in Rede stehenden Bedingung von einer leichtern Anwendung sein.

§. 198. Wenn die Differenziale dx, dy, dz in einer Differenzialgleichung mit drei Veränderlichen auf höhern Potenzen, als die erste vorkommen, so muß dieselbe jedesmal als unmöglich betrachtet werden, wenn sie sich nicht in Factoren des ersten Grades von der Form:

$$Mdx+Ndy+Pdz$$

zerlegen läßt. Denn wenn die Differenzialgleichung ein Integral hätte, d. h. als das Resultat der Differenzirung einer Gleichung mit drei Veränderlichen:

$$F(x,y,z,C)=0$$

betrachtet werden könnte; so müßte man dieselbe mit dem vollständigen Differenziale:

$$\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}dz=0$$

identificiren können, und man müßte z. B. auf eine identische Gleichung $0=0$ kommen, wenn man aus dieser letzten Gleichung den Werth von dz ableitete und denselben in die in Beziehung auf dz aufgelöste gegebene Differenzialgleichung substituirte. Dieses kann aber niemals statt finden, wenn die Differenziale dx, dy unter Wurzelzeichen stehen, oder zu Potenzen mit gebrochenen oder negativen Exponenten erhoben sind.

Wir wollen z. B. die Differenzialgleichung:

$$mdx^2+ndy^2+pdz^2+2qdxdy+2rdxdz+2sdydz=0$$

betrachten, und der Kürze wegen setzen:

$$r^2-mp=A,\ rs-pq=B,\ s^2-np=C,$$

so kommt:

$$dz=\frac{-rdx-sdy\pm\sqrt{Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2}}{q}.$$

Hieraus folgt, daß die gegebene Differenzialgleichung absurd oder nicht integrabel ist, so lange die Größe unter dem Wurzelzeichen kein vollständiges Quadrat ist, d. h., so lange nicht $B^2=AC$ ist.

§. 199. Wir wollen nur noch einige Worte über die Differenzialgleichungen mit mehr als drei Veränderlichen, oder von der Form:

$$M dx + N dy + P dz + Q du + R dv + \text{etc.} \ldots, = 0$$

sagen, wo M, N, P, Q, R, ... Functionen der Veränderlichen $x, y, z, u, v, \ldots$. sind, wenn man diese Gleichung als von der Differenzirung einer ursprünglichen Gleichung:

$$F(x, y, z, u, v \ldots) = 0$$

herrührend betrachten kann. Irgend eine der Veränderlichen, z. B. z, muß als eine Function aller übrigen betrachtet werden, welche unabhängig bleiben, und man hat:

$$dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy + \frac{dz}{du} du + \frac{dz}{dv} dv + \text{etc.};$$

aber aus der gegebenen Differenzialgleichung ergiebt sich:

$$dz = -\frac{M}{P} dx - \frac{N}{P} dy - \frac{Q}{P} du - \frac{R}{P} dv + \text{etc.};$$

folglich ist:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{M}{P}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{N}{P},$$
$$\frac{dz}{du} = -\frac{Q}{P}, \quad \frac{dz}{dv} = -\frac{R}{P}, \text{ etc.},$$

und mithin:

$$D_y \frac{M}{P} = D_x \frac{N}{P}, \quad D_u \frac{M}{P} = D_x \frac{Q}{P}, \quad D_v \frac{M}{P} = D_x \frac{R}{P}, \ldots,$$
$$D_u \frac{N}{R} = D_y \frac{Q}{P}, \quad D_v \frac{N}{P} = D_y \frac{R}{P}, \ldots, D_v \frac{Q}{P} = D^u \frac{R}{P}, \ldots.$$

Entwickelt man diese Gleichungen und substituirt für $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{dz}{du}, \ldots$ ihre Werthe, so erhält man die Bedingungen, welchen die Functionen M, N, P, Q, ... genügen müssen, wenn die gegebene Differenzialgleichung integrabel sein soll. Bei drei Veränderlichen hat man nur eine Bedingungsgleichung:

$$D_y \frac{M}{P} = D_x \frac{N}{P},$$

bei vier Veränderlichen x, y, z, u drei Bedingungsgleichungen:

$$D_y \frac{M}{P} = D_x \frac{N}{P}, \quad D_u \frac{M}{P} = D_x \frac{Q}{P}, \quad D_u \frac{N}{P} = D_y \frac{Q}{P}$$

und im Allgemeinen bei n Veränderlichen ist die Anzahl der Bedingungsgleichungen gleich der Anzahl der Combinationen zur zweiten Classe aus den $n-1$ Ableitungen $D_x z, D_y z, D_u z, \ldots$, d. h. $= \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$.

Wenn der erste Theil der Gleichung:

$$M dx + N dy + P dz + Q du + R dv + \ldots = 0$$

zu einem genauen Differenziale gemacht ist, was der Fall ist, wenn man hat:

$$D_y M = D_x N,\ D_z M = D_x P, \ldots,\ D_v M = D_x R,$$
$$D_z N = D_y P,\ D_z N = D_y P, \ldots,\ D_v Q = D_u R,$$

so findet man, wenn man setzt:

$$M = F_1(x, y, z, \ldots, v),\quad N = F_2(x, y, z, \ldots, v),$$
$$P = F_3(x, y, z, \ldots, v),\quad Q = F_4(x, y, z, \ldots, v), \ldots,$$

und wie in §. 193 verfährt, daß das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung folgendes ist:

$$\int_{x_0}^{x} F_1(x, y, z, \ldots, v)\,dx + \int_{y_0}^{y} F_2(x_0, y, z, \ldots, v)\,dy$$
$$+ \int_{z_0}^{z} F_3(x_0, y_0, z, \ldots, v)\,dz + \int_{u_0}^{u} F_4(x_0, y_0, z_0, \ldots, v)\,du + \ldots = C.$$

§. 200. Aber selbst dann, wenn der erste Theil der gegebenen Differenzialgleichung nicht zu einem genauen Differenziale gemacht werden kann und die $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ Bedingungsgleichungen erfüllt werden, kann man diese Differenzialgleichung integriren, wenn man einen ähnlichen Gang einschlägt, wie den bei drei Veränderlichen befolgten. Es sei z. B. die Differenzialgleichung:

$$z(y+z)\,dx + z(u-x)\,dy + y(x-u)\,dz + y(y+z)\,du = 0$$

zu integriren, so genügen die Functionen:

$$M = yz + z^2,\quad N = zu - xz,\quad P = xy - yu,\quad Q = y^2 + yz$$

den Bedingungsgleichungen. Um zu integriren, wollen wir einstweilen u, z als constant betrachten, d. h. $du = 0$, $dz = 0$ setzen; so verwandelt sich die gegebene Differenzialgleichung in folgende:

$$\frac{dx}{u-x} + \frac{dy}{y+z} = 0$$

und hat zum Integrale:

$$\frac{y+z}{u-x} = \chi = f(z, u).$$

Differenzirt man dasselbe in Beziehung auf x, y, z, u, so findet man:

$$\frac{(y+z)\,dx + (u+x)\,dy + (u-x)\,dz - (y+z)\,du}{(u-x)^2} = d\chi.$$

Aber aus der gegebenen Differenzialgleichung folgt:

$$(y+z)\,dx+(u-x)dy=\frac{y(u-x)dz-y(y+z)du}{z},$$

folglich ist:

$$\frac{y+z}{u-x}dz-\left(\frac{y+z}{u-x}\right)^2=zd\chi$$

oder:

$$\chi dz-\chi^2du=zd\chi,\qquad \frac{\chi dz-zd\chi}{\chi^2}=du,$$

$$\frac{z}{\chi}=u+C,\qquad \chi=\frac{z}{u+C},$$

und das Integral der gegebenen Differenzialgleichung ist mithin:

$$\frac{y+z}{u-x}=\frac{z}{u+C}.$$

Drei und dreißigste Vorlesung.

Ueber die Integration eines Systemes von n gleichzeitigen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung mit $n+1$ Differenzialen oder mit n Ableitungen.

---

§. 201. In dem Vorhergehenden haben wir gezeigt, wie man die Differenzialgleichung der ersten Ordnung und des ersten Grades:

$$dy = f(x, y)\,dx$$

in allen Fällen genau, oder näherungsweise integriren kann. Wir wollen nun annehmen, daß n Differenzialgleichungen der ersten Ordnung zwischen $n+1$ Veränderlichen $t, x, y, z, \ldots, v$ und ihren $n+1$ Differenzialen $dt, dx, dy, dz, \ldots, dv$ oder ihren n Ableitungen $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \ldots, \frac{dv}{dt}$ gegeben seien; so ist die allgemeine Form dieser Differenzialgleichungen:

$$\mathrm{L}_1 dt + \mathrm{M}_1 dx + \mathrm{N}_1 dy + \mathrm{P}_1 dz + \ldots + \mathrm{R}_1 dv = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathrm{L}_n dt + \mathrm{M}_n dx + \mathrm{N}_n dy + \mathrm{P}_n dz + \ldots + \mathrm{R}_n dv = 0;$$

aber man kann sie in allen Fällen durch eine einfache Elimination auf die Form:

$$dx = \mathrm{F}_1(t, x, y, z, \ldots, v)\,dt, \quad dz = \mathrm{F}_2(t, x, y, z, \ldots, v)\,dt, \ldots,$$

$$dv = \mathrm{F}_n(t, x, y, z, \ldots, v)\,dt$$

zurückführen, und es kommt alsdann darauf an, zu beweisen, daß es wirklich ein System von Werthen:

$$x = \mathrm{f}_1(t), \quad z = \mathrm{f}_2(t), \ldots, \quad v = \mathrm{f}_n(t)$$

giebt, welche die zweifache Eigenschaft haben: den gegebenen Gleichungen zu genügen und für $t = t_0$ bestimmte Werthe $x_0, y_0, z_0, \ldots, v_0$ anzunehmen. Die Existenz dieser Werthe läßt sich aber in dem Falle leicht darthun, wo die Functionen $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3, \ldots, \mathrm{F}_n$, so wie ihre Ableitungen, in Beziehung auf $x, y, z, \ldots, v$, nämlich:

$$\mathrm{D}_x\mathrm{F}_1, \mathrm{D}_y\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{D}_v\mathrm{F}_1, \mathrm{D}_x\mathrm{F}_2, \ldots. \mathrm{D}_v\mathrm{F}_2, \text{ etc.}$$

endlich und stetig bleiben. Zu dem Ende braucht man nur wie in Vorlesung 26 zu verfahren und vermittelst der Gleichungen:

$$x_1 - x_0 = (t_1 - t_0)\,F_1(t_0, x_0, \ldots, v_0),\ x_2 - x_1 = (t_2 - t_1)F_1(t_1, x_1, \ldots, v_1), \ldots,$$
$$X - x_{n-1} = (T - t_{n-1})\,F_1(t_{n-1}, x_{n-1}, \ldots, v_{n-1}),$$
$$y_1 - y_0 = (t_1 - t_0)\,F_2(t_0, x_0, \ldots, v_0),\ y_2 - y_1 = (t_2 - t_1)F_2(t_1, x_1, \ldots, v_1), \ldots,$$
$$Y - y_{n-1} = (T - t_{n-1})\,F_2(t_{n-1}, x_{n-1}, \ldots, v_{n-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

die n Größen X, Y, Z, ... V zu berechnen; denn diese Größen haben die drei folgenden Eigenschaften:

1) Sie sind stetige Functionen der Constanten x_0, y_0, ..., v_0, d. h. sie nehmen für bestimmte Werthe dieser Constanten einen einzigen und bestimmten Werth an und die Veränderungen, welche sie erleiden, wenn sich diese Constanten um eine sehr kleine Größe ändern, sind auch sehr klein. 2) Die Größen X, Y, Z, ..., V convergiren gegen endliche Grenzen:

$$f_1(T, t_0, x_0, \ldots, v_0),\ f_2(T, t_0, x_0, \ldots, v_0),\ f_n(T, t_0, x_0, \ldots, v_0),$$

wenn die Elemente der Differenz $T - t_0$ ohne Ende abnehmen. 3) Die $T = t$ entsprechenden Werthe x, y, ... v der Größen X, Y, ..., V, d. h. die Größen:

$$x = f_1(t, t_0, x_0, y_0, \ldots, v_0), \ldots,\ v = f_n(t, t_0, x_0, y_0, \ldots, v_0)$$

genügen den gegebenen Differenzialgleichungen und reduciren sich für $t = t_0$ auf die Constanten x_0, y_0, ..., v_0. Wir wollen nun diese merkwürdigen Eigenschaften nacheinander darthun.

§. 202. Beweis der ersten Eigenschaft: Die Größen X, Y, Z, ..., V sind stetige Functionen der Constanten x_0, y_0, z_0, ..., v_0.

Wir wollen diesen Constanten die sehr kleinen Incremente α_0, β_0, γ_0, ... ertheilen, welche wir auf folgende Form bringen wollen:

$$\alpha_0 = \rho_0 \cos\lambda_0,\ \beta_0 = \rho_0 \cos\mu_0,\ \gamma_0 = \rho_0 \cos\nu_0, \ldots,$$

indem der Modulus ρ_0 und die Winkel oder Parameter λ_0, μ_0, ν_0, ... den Bedingungsgleichungen:

$$\rho_0 = \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 + \ldots},\ \cos^2\lambda_0 + \cos^2\mu_0 + \cos^2\nu_0 + \ldots = 1$$

genügen. Die Incremente der Größen x_m, y_m, z_m, ...; X, Y, Z, ... können durch Ausdrücke von der Form:

$$\rho_m \cos\lambda_m,\ \rho_m \cos\mu_m,\ \rho_m \cos\nu_m, \ldots,$$
$$\rho_n \cos\lambda_n,\ \rho_n \cos\mu_n,\ \rho_n \cos\nu_n, \ldots$$

dargestellt werden. Da man ferner hat:

$$x_{m+1} - x_m = (t_{m+1} - t_m)\,F_1(t_m, x_m, y_m, \ldots),$$
$$y_{m+1} - y_m = (t_{m+1} - t_m)\,F_2(t_m, x_m, y_m, \ldots),$$

so erhält man, wenn man x_0, y_0, z_0, ... resp. in $x_0 + \alpha_0$, $y_0 + \beta_0$, $z_0 + \gamma_0$, ... verwandelt:

$$x_{m+1} + \rho_{m+1}\cos\lambda_{m+1} - x_m - \rho_m \cos\lambda_m$$
$$= (t_{m+1} - t_m)\,F_1(t_m, x_m + \rho_m \cos\lambda_m + \ldots),$$

und wenn man setzt:

$$\rho_m \xi_m = F_1(t_m,\ x_m + \rho_m \cos\lambda_m,\ y_m + \rho_m \cos\mu_m + \ldots) - F_1(t_m,\ x_m,\ y_m, \ldots),$$

so ist:

$$\rho_{m+1} \cos\lambda_{m+1} = \rho_m [\cos\lambda_m + \xi_m (t_{m+1} - t_m)].$$

Setzt man ferner:

$$\rho_m \eta_m = F_2(t_m, x_m + \rho_m \cos\lambda_m + \ldots) - F_2(t_m, x_m, \ldots),\ \rho_m \zeta_m = F_3(\ldots),\ \text{etc.}$$

so findet man ebenso:

$$\rho_{m+1} \cos\mu_{m+1} = \rho_m [\cos\mu_m + \eta_m (t_{m+1} - t_m)],$$
$$\rho_{m+1} \cos\nu_{m+1} = \rho_m [\cos\nu_m + \zeta_m (t_{m+1} - t_m)],\ \text{etc.}$$

und wenn man zum Quadrate erhebt, zusammenaddirt und die Gleichung:

$$\cos^2\lambda_m + \cos^2\mu_m + \cos^2\nu_m + \ldots = 1,$$

berücksichtigt:

$$\rho_{m+1}^2 = \rho_m^2 [1 + 2(t_{m+1} - t_m)(\xi_m \cos\lambda_m + \eta_m \cos\mu_m + \ldots) + (t_{m+1} - t_m)^2 (\xi_m^2 + \eta_m^2 + \ldots)]$$

Nun ist aber der größte Werth der Summe:

$$\xi_m \cos\lambda_m + \eta_m \cos\mu_m + \ldots = \sqrt{\xi_m^2 + \eta_m^2 + \ldots},$$

folglich:

$$\rho_{m+1}^2 < \rho_m^2 [1 + 2(t_{m+1} - t_m)\sqrt{\xi_m^2 + \eta_m^2} \ldots + (t_{m+1} - t_m)^2 (\xi_m^2 + \eta_m^2 + \ldots)],$$
$$\rho_{m+1} < \rho_m [1 + (t_{m+1} - t_m)\sqrt{\xi_m^2 + \eta_m^2 + \ldots}]\ *)$$

---

*) Denn wenn zugleich:

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + \ldots = 1,$$
$$u = a\cos x + b\cos y + c\cos z + \ldots$$

ist, so hat man offenbar:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \ldots = (a\cos x + b\cos y + c\cos z + \ldots)^2 + (a\cos y - b\cos x)^2 + (a\cos z - c\cos x)^2 + \ldots + (b\cos z - c\cos y)^2 + \ldots,$$
$$u^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots - (a\cos y - b\cos x)^2 - (a\cos z - c\cos x)^2 - \ldots,$$

folglich ist der größte Zahlenwerth von $u^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots$ und der größte Werth von $u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}$, wo u sein Maximum erreicht, wenn man hat:

$$a\cos y - b\cos x = 0,\quad a\cos z - c\cos x = 0,$$
$$b\cos z - c\cos y = 0, \ldots,$$

oder:

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{b} = \frac{\cos z}{c} = \ldots$$

Bezeichnen nun $\varphi_1, \chi_1, \psi_1, \ldots$ $\varphi_2, \chi_2, \psi_2, \ldots$ die Ableitungen der Functionen $F_1, F_2, F_3, \ldots$ in Beziehung auf $x, y, z, \ldots$, so hat man nach einer bekannten Formel der Differenzialrechnung:

$$\rho_m \xi_m = F_1(t_m, x_m + \rho_m \cos\lambda_m, y_m + \rho_m \cos\mu_m, \ldots) - F_1(t_m, x_m, y_m, \ldots)$$
$$= \rho_m \cos\lambda_m \varphi_1(t_m, x_m + \vartheta\rho_m \cos\lambda_m, y_m + \vartheta\rho_m \cos\mu_m, \ldots)$$
$$+ \rho_m \cos\mu_m \chi_1(\ldots) + \rho_m \cos\nu_m \psi_1(\ldots) \ldots$$

Der zweite Theil dieser letzten Gleichung ist offenbar ein Mittelwerth der Summe:

$$\rho_m \cos\lambda_m \varphi_1(t, x, y + \ldots) + \rho_m \cos\mu_m \chi_1(t, x, y, z, \ldots)$$
$$+ \rho_m \cos\nu_m \psi_1(t, x, y, z, \ldots) \ldots$$

welche immer kleiner ist, als:

$$\rho_m \sqrt{\varphi_1^2 + \chi_1^2 + \psi_1^2 + \ldots}.$$

Wenn also die Ableitungen $\varphi_1, \chi_1, \psi_1, \ldots$ zwischen gewissen Grenzen t_0 und $t_0 + \tau$ endlich und stetig bleiben und eine feste Grenze l nicht überschreiten; so hat man, wenn N die Anzahl dieser Functionen bezeichnet $\xi_m^2 < Nl^2$, und ebenso fände man, wenn $m, n, \ldots$ die endlichen obern Grenzen der Ableitungen:

$$\varphi_2, \chi_2, \psi_2, \ldots, \quad \varphi_3, \chi_3, \psi_3, \ldots,$$

bezeichnen: $\eta_m^2 < Nm^2$, $\zeta_m^2 < Nn^2, \ldots$

also: $\xi_m^2 + \eta_m^2 + \zeta_m^2 + \ldots < N(l^2 + m^2 + n^2 + \ldots)$

und folglich:

$$\rho_{m+1} < \rho_m [1 + (t_{m+1} - t_m)] N^{\frac{1}{2}} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2 + \ldots}]$$

oder wenn man setzt:

$$N^{\frac{1}{2}} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2 + \ldots} = K, \quad \rho_{m+1} < \rho_m [1 + K(t_{m+1} - t_m)]$$

und successive $m = 0, m = 1, m = 2, \ldots, m = n$, so findet man:

$$\rho_1 < \rho_0 [1 + K(t_1 - t_0)], \quad \rho_2 < \rho_1 [1 + K(t_2 - t_1)], \ldots,$$
$$\rho_n < \rho_{n-1} [1 + K(T - t_{n-1})],$$

Aus diesen letzten Gleichungen ergiebt sich aber:

$$\frac{a\cos x + b\cos y + c\cos z + \ldots}{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots} = \frac{u}{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}$$
$$= \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \ldots}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}}$$

und folglich:

$$u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots},$$

wie man auch direct findet.

und wenn man multiplicirt:

$$\rho_n < \rho_0 [1+K(t_1-t_0)][1+K(t_2-t_1)]...[1+K(T-t_{n-1})].$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß das Product im zweiten Theile dieser Ungleichheit kleiner ist, als die endliche Exponentialgröße:

$$e^{K(T-t_0)},$$

welche wir mit L bezeichnen können. Es ist folglich $\rho_n < L\rho_0$, also das Verhältniß $\rho_n : \rho_0$ in der That eine endliche Größe, und die Größen X, Y, Z,...., welche für jeden Werth der Constanten x_0, y_0, z_0,.... einen einzigen und bestimmten Werth annehmen, ändern sich um sehr kleine Größen $\rho_n \cos\lambda_n$, $\rho_n \cos\mu_n$,...., wenn man x_0, y_0, z_0,.... sich um sehr kleine Größen $\rho_0 \cos\lambda_0$, $\rho_0 \cos\mu_0$,.... ändern läßt, und sind folglich stetige Functionen dieser Constanten.

§. 203. Beweis der zweiten Eigenschaft. Wenn die Elemente der Differenz $T-t_0$ ohne Ende abnehmen, so convergiren die Größen X, Y, Z,.... gegen endliche Grenzen:

$$f_1(T, t_0, x_0, y_0, z_0, ...), \quad f_2(T, t_0, x_0, y_0, z_0, ...), ...$$

Denn wenn man annimmt, daß sich diese Elemente auf ein einziges reduciren, welches alsdann diese Differenz selbst ist; so hat man blos:

$$X = x_0 + (T-t_0) F_1(t_0, x_0, y_0, ...),$$
$$Y = y_0 + (T-t_0) F_2(t_0, x_0, y_0, ...), ...$$

Wenn dagegen die Differenz $T-t_0$ in n Elemente t_1-t_0, t_2-t_1,...., $T-t_{n-1}$ zerlegt wird, so hat man:

$$X - x_0 = (t_1-t_0) F_1(t_0, x_0, y_0, ...) + (t_2-t_1) F_1(t_1, x_1, y_1, ...) + ...,$$

und da der zweite Theil dieser Gleichung offenbar zwischen den Grenzen:

$$-(T-t_0) A, \quad +(T-t_0) A$$

liegt, wo A den größten der Werthe bezeichnet, welche die Function $F_1(t, x, y, z, ...)$ zwischen den Grenzen t_0, T annimmt; so folgt, daß X zwischen den Grenzen:

$$x_0 - A(T-t_0), \quad x_0 + A(T-t_0)$$

liegt. Ebenso beweist man, daß Y, Z,.... resp. zwischen den Grenzen:

$$y_0 \mp B(T-t_0), \quad z_0 \mp C(T-t_0), ...$$

liegen, wo B, C,... resp. die größten Werthe der Functionen:

$$F_2(t, x, y, z, ...), \quad F_3(t, x, y, z, ...), ...$$

zwischen den Grenzen t_0, T bezeichnen. Hieraus folgt unmittelbar, daß alle Werthe, welche die Functionen F_1, F_2,.... zwischen den Grenzen t_0, T annehmen, besondere Werthe der Ausdrücke:

$$F_1[t_0+\vartheta(T-t_0),\ x_0\pm\vartheta_1 A(T-t_0),\ y_0\pm\vartheta_2 B(T-t_0)\ldots],$$
$$F_2[t_0+\vartheta(T-t_0),\ x_0\pm\vartheta_1 A(T-t_0),\ y_0\pm\vartheta_2 B(T-t_0)\ldots],\ldots$$

sind, worin ϑ, ϑ_1, ϑ_2, ... zwischen 0 und 1 liegende Zahlen bezeichnen. Ferner hat man offenbar:

$$F_1[t_0+\vartheta(T-t_0),\ x_0\pm\vartheta_1 A(T-t_0),\ y_0\pm\vartheta_2 B(T-t_0)\ldots] - F_1(t_0, x_0, y_0, z_0,\ldots)=\varepsilon_1,$$

wo ε_1 eine Größe bezeichnet, welche mit der Differenz $T-t_0$ verschwindet, und da die Differenzen $X-x_0$, $Y-y_0$, ... dem Producte aus $T-t_0$ und einem Mittelwerthe der Functionen F_1, F_2, ... gleich sind; so hat man:

$$X=x_0+(T-t_0)F_1(t_0, x_0, y_0,\ldots)+(T-t_0)\varepsilon_1,$$
$$Y=y_0+(T-t_0)F_2(t_0, x_0, y_0,\ldots)+(T-t_0)\varepsilon_2, \text{ etc.}$$

woraus folgt, daß durch die Eintheilung der Differenz $T-t_0$ in n Elemente t_1-t_0, t_2-t_1, ... die Werthe von X, Y, Z, ... um die Größen:

$$(T-t_0)\varepsilon_1,\quad (T-t_0)\varepsilon_2,\ldots$$

verändert sind, worin die Coefficienten ε_1, ε_2, ... mit der Differenz $T-t_0$ zugleich verschwinden. Wir wollen nun annehmen, daß die Elemente t_1-t_0, t_2-t_1, ... ihrerseits abermals in neue Elemente zerlegt werden, und zunächst nur das Element t_1-t_0 betrachten; so erfahren die Größen x_1, y_1, z_1, ...; x_2, y_2, z_2, ... ähnliche Veränderungen, wie die Größen X, Y, Z... bei der Eintheilung des Intervalles $T-t_0$, und verwandeln sich resp. in:

$$x_1\pm\varepsilon'(t_1-t_0),\quad y_1\pm\varepsilon''(t_1-t_0),\ldots.$$

Setzt man:

$$\rho'=\sqrt{\varepsilon'^2+\varepsilon''^2+\ldots},$$

so kann jede der Zahlen ε', ε'', ... durch einen Ausdruck von der Form $\rho'\cos\lambda'$, $\rho''\cos\lambda''$, ... ausgedrückt werden, woraus folgt, daß die Summe der Veränderungen der Größen x_1, y_1, z_1, ... kleiner ist, als das Product $\rho'(t_1-t_0)$, wo ρ' eine Zahl ist, welche sowohl, als ε', ε'', ... mit t_1-t_0 zugleich verschwindet, und ebenso, wie oben, beweist man, daß X durch eine abermalige Eintheilung des Elementes t_1-t_0 um eine Größe geändert wird, welche kleiner ist, als $L'\rho'(t_1-t_0)$. Ebenso wird X durch abermalige Eintheilung der Elemente t_2-t_1, t_1-t_2, ... um Größen geändert, welche resp. kleiner sind, als die Ausdrücke:

$$L''\rho''(t_2-t_1),\quad L'''\rho'''(t_3-t_2),\ldots,$$

worin die Coefficienten ρ'', ρ''', ... mit den Differenzen t_2-t_1, t_3-t_2, ... zugleich verschwinden. Demnach wird die Totalveränderung, welche X in Folge der Untereintheilung der Elemente t_1-t_0, t_2-t_1, ... erfährt, durch einen Ausdruck von der Form:

$$L(T-t_0)\rho$$

bestimmt, wo ρ eine Mittelgröße zwischen den Coefficienten ρ', ρ'',..... ist und mit den neuen Elementen zugleich verschwindet. Dasselbe gilt von den Größen $Y, Z, \ldots$. Die Werthe von $X, Y, Z, \ldots$, welche einer Eintheilungsart entsprechen, worin die Elemente der Differenz $T-t_0$ sehr kleine Zahlenwerthe haben, werden also nicht merklich geändert, wenn man zu einer zweiten Eintheilungsart übergeht, worin jedes dieser Elemente wieder in mehrere andere zerlegt wird. Diese Folgerung läßt sich leicht auf den Fall erstrecken, wo die Elemente der zweiten Eintheilung nicht mehr Unterabtheilungen von denen der ersten sind, und es ist folglich hierdurch bewiesen, daß die Eintheilungsart keinen merklichen Einfluß hat, wenn die Elemente der Differenz $T-t_0$ sehr klein sind, so daß folglich die Größen $X, Y, Z, \ldots$, wenn man die Zahlenwerthe dieser Elemente durch Vergrößerung ihrer Anzahl ohne Ende abnehmen läßt, gegen feste Grenzen:

$$f_1(T, t_0, x_0, y_0, z_0, \ldots),\quad f_2(T, t_0, x_0, y_0, \ldots), \ldots$$

convergiren, welche blos von der Form der Functionen $F_1, F_2, \ldots$ und von den Constanten $T, t_0, x_0, y_0, z_0, \ldots$ abhängen.

§. 204. Beweis der dritten Eigenschaft: Wenn man in den Werthen von $X, Y, Z, \ldots$ t für T setzt, so erhält man Functionen $x, y, z, \ldots$ von t, nämlich:

$$x=f_1(t, t_0, x_0, y_0, \ldots),\quad y=f_2(t, t_0, x_0, y_0, \ldots),\ \text{etc.}$$

welche sich für $t=t_0$ auf $x_0, y_0, z_0, \ldots$ reduciren und den gegebenen Differenzialgleichungen genügen.

In der That haben wir gefunden:

$$X-x_0=(T-t_0)F_1(t_0, x_0, y_0, \ldots)+(T-t_0)\varepsilon_1,$$
$$Y-y_0=(T-t_0)F_2(t_0, x_0, y_0, \ldots)+(T-t_0)\varepsilon_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

woraus folgt, wenn man T in t verwandelt und $t=t_0$ setzt:

$$x=x_0,\quad y=y_0,\quad z=z_0, \ldots.$$

Ferner hätten wir durch die Betrachtungen, welche uns auf die vorhergehenden Werthe der Differenzen:

$$X-x_0,\quad Y-y_0, \ldots$$

geführt haben, folgende Gleichungen erhalten:

$$X-x_m=(T-t_m)F_1(t_m, x_m, y_m, \ldots)+(T-t_m)\varepsilon',$$
$$Y-y_m=(T-t_m)F_2(t_m, x_m, y_m, \ldots)+(T-t_m)\varepsilon'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

worin t_m einen zwischen t_0 und $t_0+\tau$ liegenden Werth von t bezeichnet. Setzt man nun in diesen Gleichungen:

$$t_m=t,\quad T=t+h,\quad x=f_1(t),\quad y=f_2(t), \ldots,$$

so hat man:

$$x_m = f_1(t), \quad X = f_1(t+h), \ldots,$$
$$y_m = f_2(t), \quad Y = f_2(t+h),$$

ferner:

$$f_1(t+h) - f_1(t) = hF_1[t_1, f_1(t), f_2(t), \ldots] + \varepsilon' h, \ldots$$
$$f_2(t+h) - f_2(t) = hF_2[t, f_1(t), f_2(t), \ldots] + \varepsilon'' h$$

und wenn man, nachdem man durch h dividirt hat, zu der Grenze übergeht; so findet man:

$$f'_1(t)\,dt = df_1(t) = dx = F_1(t, x, y, z, \ldots),$$
$$f'_2(t)\,dt = df'_2(t) = dy = F_2(t, x, y, z, \ldots), \ldots,$$

welche Gleichungen offenbar ausdrücken, daß die Functionen:

$$x = f_1(t) = f_1(t, x_0, y_0, \ldots), \quad y = f_2(t) = f_1(t, x_0, y_0, \ldots)$$

den gegebenen Differenzialgleichungen genügen.

§. 205. Wenn also die Functionen F_1, F_2, ..., so wie ihre Ableitungen in Beziehung auf x, y, z, ... zwischen den Grenzen t_0, $t_0 + \tau$ endlich und stetig bleiben, so giebt es Functionen x, y, z, ... von t und Constanten t_0, x_0, y_0, z_0, ..., welche die gegebenen Differenzialgleichungen verificiren und für $t = t_0$ die gegebenen Anfangswerthe x_0, y_0, z_0, ... annehmen. Aber es kann auch geschehen, daß die Functionen F_1, F_2, ... und ihre Ableitungen zwischen den Grenzen t_0 und $t_0 + \tau$ nur für Werthe von x, y, z, ... endlich und stetig sind, welche zwischen bestimmten Grenzen:

$$x_0 \text{ und } x_0 \pm a, \quad y_0 \text{ und } y_0 \pm b, \quad z_0 \text{ und } z_0 \pm c, \ldots$$

liegen. Nun können aber die vorhin bewiesenen Eigenschaften auch in diesem Falle noch statt finden, wofern man, wenn A, B, C, ... die Grenzen der absoluten Werthe der Functionen F_1, F_2, ... bezeichnen, T so wählt, daß den Ungleichheiten:

$$T - t_0 < \tau, \quad A(T - t_0) < a, \quad B(T - t_0) < b, \ldots$$

genügt wird. Denn alsdann liegt der Werth von x_1, welcher durch die Gleichung:

$$x_1 = x_0 + (t_1 - t_0) F_1(x_0, y_0, z_0, \ldots)$$

bestimmt wird und zwischen den Grenzen $x_0 \pm A(t_1 - t_0)$ liegt, um so mehr zwischen den Grenzen $x_0 \pm a$, und dasselbe gilt von $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, X$. Ebenso liegen die Größen $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, Y$; $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, Z$ resp. zwischen den Grenzen $y_0 \pm b$, $z_0 \pm c$.

Bezeichnen ferner α_0, β_0, γ_0, ... die Veränderungen der anfänglichen Werthe x_0, y_0, z_0, ... und muß T den Ungleichheiten:

$$A(T - t_0) + \alpha_0 < a, \quad B(T - t_0) + \beta_0 < b, \quad C(T - t_0) + \gamma_0 < a$$

genügen; so liegen die durch die Gleichungen:

$$x_1 = x_0 + \alpha_0 + (t_1 - t_0)\,\mathrm{F}_1(t_0,\ x_0 + \alpha_0, \ldots),\quad x_2 = \ldots,$$
$$y_1 = y_0 + \beta_0 + (t_1 - t_0)\,\mathrm{F}_2(t_0,\ x_0 + \alpha_0, \ldots),\quad y_2 = \ldots$$

bestimmten neuen Werthe von x_1, y_1, ..., x_n, y_n, ... ebenfalls zwischen den Grenzen $x_0 \pm a$, $x_0 \pm b$, ... Da also alle bei den in Rede stehenden Lehrsätzen betrachteten Werthe von x, y, z, ... zwischen den Grenzen $x_0 \pm a$, $y_0 \pm b$, ... liegen, so bleiben die Functionen F_1, F_2, ..., sowie ihre Ableitungen für jeden kleinern Werth von t, als $t_0 + \tau$ endlich und stetig. Hierin besteht aber eben die Bedingung, welche erforderlich, aber auch hinreichend ist, wenn die erwähnten Eigenschaften noch statt finden sollen, und man kann folglich auch alsdann noch die Größen:

$$f_1(\mathrm{T},\ t_0,\ x_0, \ldots),\quad f_2(\mathrm{T},\ t_0,\ x_0, \ldots), \ldots$$

und folglich die Werthe $f_1(t,\ t_0,\ x_0, \ldots)$, ... genau, oder näherungsweise berechnen, welche den gegebenen Differenzialgleichungen genügen.

§. 206. Wir wollen annehmen, daß die Werthe $x = 0$, $y = 0$, ... den gegebenen Differenzialgleichungen genügen, so ist in dieser Voraussetzung nothwendig:

$$\mathrm{F}_1(t, 0, 0, 0, \ldots) = 0,\quad \mathrm{F}_2(t, 0, 0, 0, \ldots) = 0, \ldots,$$

d. h. die Functionen F_1, F_2, ... verschwinden für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, ... bei jedem Werthe von t. Setzt man alsdann in den Gleichungen, welche die Werthe von X, Y, Z, ... geben, auch $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, ...; so erhält man:

$$\mathrm{X} = 0,\quad \mathrm{Y} = 0,\quad \mathrm{Z} = 0, \ldots$$

und folglich:

$$x = \lim.\,\mathrm{X} = 0,\quad y = \lim.\,\mathrm{Y} = 0, \ldots,$$

wenn die Functionen F_1, F_2, ..., so wie ihre Ableitungen in Beziehung auf x, y, z, ... endlich und stetig sind. Denn wir haben gesehen, daß in diesem Falle die Größen X, Y, Z, ... selbst stetige Functionen der Constanten x_0, y_0, z_0, ... sind. Aus der einzigen Bedingung, daß die Functionen F_1, F_2, ... endlich und stetig sind, lassen sich also die Werthe $x = 0$, $y = 0$, ... der allgemeinen Integrale ableiten, wenn man den willkührlichen Constanten x_0, y_0, z_0, ... die besondern Werthe $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, ... beilegt, woraus folgt, daß $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, ... particuläre Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen sind.

§. 207. Wir wollen die Gleichungen:

$$x = f_1(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0, \ldots),\quad y = f_2(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0, \ldots), \ldots$$

oder:

$$x = f_1(t, x_0, y_0, \ldots),\quad y = f_2(t, x_0, y_0, \ldots), \ldots$$

wieder betrachten, welche den gegebenen Differenzialgleichungen genügen und ein System allgemeiner Integrale derselben bilden;

so ist es nicht möglich, zwischen diesen Integralen die Constanten x_0, y_0, ... zu eliminiren und eine von diesen Constanten unabhängige Relation von der Form $\varphi\,(t, x, y, z, \ldots) = 0$ zu erhalten. Denn setzt man $t = t_0$, so erhält man:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \ldots$$

und folglich:

$$\varphi\,(t_0, x_0, y_0, \ldots) = 0,$$

was ungereimt ist, weil die Constanten t_0, x_0, ... ganz willkührlich sind. Wenn man setzt:

$$x_0 = C_1, \quad y_0 = C_2, \ldots,$$

so verwandelt sich das System der allgemeinen Integrale in:

$$x = f_1\,(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$
$$y = f_2\,(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \ldots$$

und man kann dasselbe immer auf die Form:

$$C_1 = u_1, \quad C_2 = u_2, \ldots, \quad C_n = u_n$$

zurückführen, wo u_1, u_2, ... u_n blos Functionen der Veränderlichen $t, x, y, \ldots$ sind. Denn wenn man aus einer der Gleichungen:

$$x = f_1\,(t, C_1, C_2, \ldots), \quad y = f_2\,(t, C_1, C_2, \ldots), \ldots$$

den Werth von C_1 ableitet und denselben in alle übrigen Gleichungen substituirt, so erhält man nothwendig $n-1$ Gleichungen mit $n-1$ Constanten, weil, wenn darin weniger, als $n-1$ Constanten vorkämen, man dieselben eliminiren könnte, wodurch man eine Relation von der Form:

$$\varphi\,(t, x, y, \ldots) = 0$$

erhielte, was nach dem früher Bewiesenen unmöglich ist.

Desgleichen, wenn man zwischen den $n-1$ übrig bleibenden Gleichungen die Constante C_2 eliminirt, so bleiben nothwendig $n-2$ Gleichungen mit $n-2$ Constanten, und wenn man so fortfährt; so kommt man zuletzt auf eine Gleichung mit einer einzigen Constante C_n, welche $C_n = u_n$ giebt, wo u blos eine Function der Veränderlichen t, x, y, ... ist, und wenn man successive zurückgeht; so erhält man:

$$C_{n-1} = u_{n-1}, \quad C_{n-2} = u_{n-2}, \ldots, \quad C_1 = u_1, \ldots.$$

Folglich kann das System der allgemeinen Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen wirklich auf die Form:

$$u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \quad u_3 = C_3, \ldots, \quad u_n = C_n$$

gebracht werden, wo C_1, C_2, ... willkührliche Constanten bezeichnen. Umgekehrt, wenn man aus diesen letzten Gleichungen die Werthe von x, y, z, ... ableitet, so verificiren sie die gegebenen Differenzialgleichungen; aber sie können keiner von den willkühr-

lichen Constanten C_1, C_2,.... unabhängigen Bedingungsgleichung genügen. Denn wenn sie einer Gleichung von der Form:

$$\varphi\ (t, x, y, z, ...) = 0$$

Genüge leisten könnten, so würde folgen, daß diese letzte Gleichung nur eine Verbindung der Gleichungen:

$$u_1 = C_1,\ u_2 = C_2, ...$$

wäre, und für eine derselben substituirt werden könnte. Man erhielte also dieselben Werthe von x, y, z,...., sowohl wenn man sie aus den n Gleichungen $u_1 = C_1$, $u_2 = C_2$,.... mit n verschiedenen Constanten ableitete, als wenn man sie durch $n-1$ Gleichungen mit $n-1$ Constanten und durch die Gleichung:

$$\varphi\ (t, x, y, ...) = 0$$

bestimmte. Diese Folgerung ist aber offenbar ungereimt; denn die ersten Werthe von x, y, z,.... enthalten n Constanten, während die zweiten nur $n-1$ willkührliche Constanten enthalten. Das System der Gleichungen:

$$u_1 = C_1,\ \ u_2 = C_2, ...,\ \ u_n = C_n$$

bildet folglich ein System allgemeiner Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen, weil es die doppelte Eigenschaft hat, daß es n willkührliche Constanten enthält und für x, y, z,.... Werthe giebt, welche den gegebenen Gleichungen genügen; aber keiner von den Constanten unabhängige Gleichung.

Um zu zeigen, wie wesentlich diese letzte Beschränkung ist, wollen wir das folgende System von Differenzialgleichungen betrachten:

$$(z-t)\,dx = (x-y)\,dt,\ \ (z-t)\,dy = (x-y)\,dt,$$
$$dz = (x-y+1)\,dt;$$

so wird demselben unmittelbar genügt, wenn man $x = y$, $z = t$ oder:

$$x = \varphi(t),\ \ y = \varphi(t),\ \ z = t$$

setzt, von welcher Beschaffenheit übrigens die Function φ, welche völlig unbestimmt bleibt und beliebig viele willkührliche Constanten enthalten kann, auch sein mag. Aber das System dieser drei Gleichungen bildet kein System allgemeiner Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen, weil es zwischen den Veränderlichen Relationen festsetzt, welche von den willkührlichen Constanten unabhängig sind. Wir wollen daher die allgemeinen Integrale suchen. Wenn man die zweite Gleichung von der ersten abzieht, so erhält man:

$$dx - dy = 0,\ \text{folglich}\ x = y + C_1,$$

und wenn man diesen Werth in die dritte Gleichung substituirt; so giebt sie:

$$dz = (C_1 + 1)\,dt,\ \ z = (C_1 + 1)\,t + C_2,$$

so ist es nicht möglich, zwischen diesen Integralen die Constanten x_0, y_0, ... zu eliminiren und eine von diesen Constanten unabhängige Relation von der Form $\varphi\ (t, x, y, z, \ldots) = 0$ zu erhalten. Denn setzt man $t = t_0$, so erhält man:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \ldots$$

und folglich:

$$\varphi\ (t_0, x_0, y_0, \ldots) = 0,$$

was ungereimt ist, weil die Constanten t_0, x_0, ... ganz willkührlich sind. Wenn man setzt:

$$x_0 = C_1, \quad y_0 = C_2, \ldots,$$

so verwandelt sich das System der allgemeinen Integrale in:

$$x = f_1\ (t, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$
$$y = f_2\ (t, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \ldots$$

und man kann dasselbe immer auf die Form:

$$C_1 = u_1, \quad C_2 = u_2, \ldots, \quad C_n = u_n$$

zurückführen, wo u_1, u_2, ... u_n blos Functionen der Veränderlichen $t, x, y, \ldots$ sind. Denn wenn man aus einer der Gleichungen:

$$x = f_1\ (t, C_1, C_2, \ldots), \quad y = f_2\ (t, C_1, C_2, \ldots), \ldots$$

den Werth von C_1 ableitet und denselben in alle übrigen Gleichungen substituirt, so erhält man nothwendig $n-1$ Gleichungen mit $n-1$ Constanten, weil, wenn darin weniger, als $n-1$ Constanten vorkämen, man dieselben eliminiren könnte, wodurch man eine Relation von der Form:

$$\varphi\ (t, x, y, \ldots) = 0$$

erhielte, was nach dem früher Bewiesenen unmöglich ist.

Desgleichen, wenn man zwischen den $n-1$ übrig bleibenden Gleichungen die Constante C_2 eliminirt, so bleiben nothwendig $n-2$ Gleichungen mit $n-2$ Constanten, und wenn man so fortfährt; so kommt man zuletzt auf eine Gleichung mit einer einzigen Constante C_n, welche $C_n = u_n$ giebt, wo u blos eine Function der Veränderlichen $t, x, y, \ldots$ ist, und wenn man successive zurückgeht; so erhält man:

$$C_{n-1} = u_{n-1}, \quad C_{n-2} = u_{n-2}, \ldots, \quad C_1 = u_1, \ldots.$$

Folglich kann das System der allgemeinen Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen wirklich auf die Form:

$$u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \quad u_3 = C_3, \ldots, \quad u_n = C_n$$

gebracht werden, wo C_1, C_2, ... willkührliche Constanten bezeichnen. Umgekehrt, wenn man aus diesen letzten Gleichungen die Werthe von $x, y, z, \ldots$ ableitet, so verificiren sie die gegebenen Differenzialgleichungen; aber sie können keiner von den willkühr-

lichen Constanten C_1, C_2,.... unabhängigen Bedingungsgleichung genügen. Denn wenn sie einer Gleichung von der Form:

$$\varphi\ (t, x, y, z, \ldots) = 0$$

Genüge leisten könnten, so würde folgen, daß diese letzte Gleichung nur eine Verbindung der Gleichungen:

$$u_1 = C_1,\ u_2 = C_2, \ldots$$

wäre, und für eine derselben substituirt werden könnte. Man erhielte also dieselben Werthe von x, y, z,...., sowohl wenn man sie aus den n Gleichungen $u_1 = C_1$, $u_2 = C_2$,.... mit n verschiedenen Constanten ableitete, als wenn man sie durch $n-1$ Gleichungen mit $n-1$ Constanten und durch die Gleichung:

$$\varphi\ (t, x, y, \ldots) = 0$$

bestimmte. Diese Folgerung ist aber offenbar ungereimt; denn die ersten Werthe von x, y, z,.... enthalten n Constanten, während die zweiten nur $n-1$ willkührliche Constanten enthalten. Das System der Gleichungen:

$$u_1 = C_1,\ u_2 = C_2, \ldots,\ u_n = C_n$$

bildet folglich ein System allgemeiner Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen, weil es die doppelte Eigenschaft hat, daß es n willkührliche Constanten enthält und für x, y, z,.... Werthe giebt, welche den gegebenen Gleichungen genügen; aber keiner von den Constanten unabhängige Gleichung.

Um zu zeigen, wie wesentlich diese letzte Beschränkung ist, wollen wir das folgende System von Differenzialgleichungen betrachten:

$$(z-t)\,dx = (x-y)\,dt,\quad (z-t)\,dy = (x-y)\,dt,$$
$$dz = (x-y+1)\,dt;$$

so wird demselben unmittelbar genügt, wenn man $x = y$, $z = t$ oder:

$$x = \varphi(t),\quad y = \varphi(t),\quad z = t$$

setzt, von welcher Beschaffenheit übrigens die Function φ, welche völlig unbestimmt bleibt und beliebig viele willkührliche Constanten enthalten kann, auch sein mag. Aber das System dieser drei Gleichungen bildet kein System allgemeiner Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen, weil es zwischen den Veränderlichen Relationen festsetzt, welche von den willkührlichen Constanten unabhängig sind. Wir wollen daher die allgemeinen Integrale suchen. Wenn man die zweite Gleichung von der ersten abzieht, so erhält man:

$$dx - dy = 0,\ \text{folglich}\ x = y + C_1,$$

und wenn man diesen Werth in die dritte Gleichung substituirt; so giebt sie:

$$dz = (C_1 + 1)\,dt,\quad z = (C_1 + 1)\,t + C_2,$$

folglich:

$$z-t=C_1t+C_2.$$

Subſtituirt man nun in die zweite Gleichung für $z-t$, $x-y$ ihre Werthe, ſo erhält man:

$$(C_1t+C_2)\,dy=C_1\,dt,\quad dy=\frac{C_1\,dt}{C_1t+C_2},$$

$$y=l(C_1t+C_2)+C_3$$

und folglich:

$$x=l(C_1t+C_2)+C_1+C_3.$$

Das Syſtem der drei Gleichungen:

$$x=l(C_1t+C_2)+C_1+C_3,\quad y=l(C_1t+C_2)+C_3,$$

$$z=(C_1+1)t+C_2,$$

oder wenn man ſie für C_1, C_2, C_3,.... auflöſt:

$$C_1=x-y,\quad C_2=z-(x-y+1)x,\quad C_3=y-l(z-t)$$

bildet ein Syſtem allgemeiner Integrale, weil es drei willkührliche Conſtanten enthält und ſich daraus keine von dieſen Conſtanten unabhängige Gleichung ableiten läßt.

§. 208. Kommen wir wieder auf den allgemeinen Fall zurück und unterſuchen, ob ein gegebenes Syſtem von Differenzialgleichungen mehrere Syſteme allgemeiner Integrale haben kann. Wir wollen zu dem Zwecke annehmen, daß wir durch irgend ein Verfahren auf das folgende Syſtem von Gleichungen:

$$u_1=C_1,\quad u_2=C_2,\quad u_3=C_3,\ldots,\quad u_n=C_n$$

gekommen ſeien, ſo ergiebt ſich daraus:

$$du_1=0=L_1\,dt+M_1\,dx+N_1\,dy+\ldots,$$
$$du_2=0=L_2\,dt+M_2\,dx+N_2\,dy+\ldots,\text{ etc.}$$

oder:

$$L_1+M_1\frac{dx}{dt}+N_1\frac{dy}{dt}+\ldots=0,$$

$$L_2+M_2\frac{dx}{dt}+N_2\frac{dy}{dt}+\ldots=0,\text{ etc.}$$

und wenn man für $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$,.... ihre aus den gegebenen Differenzialgleichungen abgeleiteten Werthe ſubſtituirt; ſo kommt:

$$L_1+M_1F_1(t,x,y,z,\ldots)+N_1F_2(t,x,y,z,\ldots)+\ldots=0,$$
$$L_2+M_2F_1(t,x,y,\ldots)+\ldots=0,\text{ etc.}$$

Dieſe Gleichungen ſind nothwendig identiſch oder reduciren ſich auf $0=0$, weil ſie ſonſt zwiſchen den Veränderlichen Relationen feſtſetzten, welche von den willkührlichen Conſtanten unabhängig

wären, was nicht der Fall sein kann, weil das System der Gleichungen $u_1 = C_1$, $u_2 = C_2$, ... nach der Voraussetzung ein System allgemeiner Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen bildet. Demnach müssen alle Werthe von x, y, z, ..., welche die gegebenen Differenzialgleichungen verificiren, offenbar auch die Gleichungen:

$$M_1[dx - F_1(t,x,y,z,...)] + N_1[dy - F_2(t,x,y,z,...)] + \text{etc.} = 0,$$
$$M_2[dx - F_1(t,x,y,z,...)] + N_2[dy - F_2(t,x,y,z,...)] + \text{etc.} = 0$$
. . . . . .

identisch machen, wofern sie nicht einen oder mehrere der Coefficienten M_1, N_1, ...; M_2, N_2, ..., unendlich machen. Diese letzten Gleichungen reduciren sich übrigens auf:

$$L_1 dt + M_1 dx + N_1 dy + ... = du_1 = 0,$$
$$L_2 dt + M_2 dx + N_2 dy + ... = du_2 = 0, \text{ etc.}$$

wegen der identischen Gleichungen:

$$L_1 + M_1 F_1(t,x,y,z,...) + N_1 F_2(t,x,y,z,...) + \text{etc.} = 0, ...$$

Alle Werthe von x, y, z, welche den gegebenen Differenzialgleichungen genügen, wofern sie nicht einige der Größen:

$$L_1 = \frac{du_1}{dt}, \; M_1 = \frac{du_1}{dx}, \; N_1 = \frac{du_1}{dy}, ...,$$
$$L_2 = \frac{du_2}{dt}, \; M_2 = \frac{du_2}{dx}, \; N_2 = \frac{du_2}{dy}, ..., \text{ etc.}$$

unendlich, oder unbestimmt, und folglich discontinuirlich machen, verificiren folglich auch die Relationen:

$$du_1 = 0, \quad du_2 = 0, ..., \quad \text{oder } u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, ...$$

Da also das System dieser Gleichungen die Werthe von x, y, z, ... als Functionen von t und n Constanten vollständig bestimmt, so ist dasselbe das einzige System allgemeiner Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen.

§. 209. Die Werthsysteme von x, y, z, ..., welche man erhält, wenn man die Größen L, M, N, ..., oder einige derselben unendlich, oder unbestimmt macht, und welche den gegebenen Differenzialgleichungen genügen, ohne daß man sie aus den Gleichungen:

$$u_1 = C_1, \; u_2 = C_2, ...$$

ableiten kann, bilden die sogenannten singulären Integrale oder singulären Auflösungen und können offenbar niemals als besondere Fälle in den durch die im Vorhergehenden auseinander gesetzte allgemeine Methode gefundenen Integralen enthalten sein, weil diese Methode nothwendig voraussetzt, daß die Functionen F_1, F_2, ..., sowie ihre Ableitungen in Beziehung auf x, y, z, ... endlich und stetig sind, was nicht statt finden kann, wenn

die Größen L, M, N,...., oder einige derselben, unendlich oder unbestimmt werden.

Wir wollen das Gesagte durch ein Beispiel erläutern. Es sei das gegebene System von Differenzialgleichungen:

$$(z-t)\,dx=(x-y)\,dt,\quad (z-t)\,dy=(x-y)\,dt,$$
$$dz=(x-y+1)\,dt,$$

so sind, wie wir gesehen haben, die allgemeinen Integrale derselben:

$$C_1=x-y,\quad C_2=z-(x-y+1)t,\quad C_3=y-l(z-t),$$

und man hat folglich in diesem Falle:

$$L_1=0,\quad M_1=1,\quad N_1=-1,\quad P_1=0,$$
$$L_2=y-x-1,\quad M_2=-t,\quad N_2=t,\quad P=1,$$
$$L_3=\frac{1}{z-t},\quad M_3=0,\quad N_3=1,\quad P_3=\frac{1}{z-t}.$$

Von diesen Größen können nur zwei L_2, P_3 unendlich werden, und zwar für $z=t$. Da ferner $x=y$ ist für $z=t$ und das System dieser beiden Gleichungen den gegebenen Gleichungen genügt, ohne daß die erste aus den allgemeinen Integralen abgeleitet werden kann, wenn man den Constanten C_1, C_2, C_3 besondere Werthe beilegt; so kann dieses System nur eine singuläre Auflösung bilden.

Wir haben in dem Vorhergehenden gesehen, daß die besondern Werthe $x=0$, $y=0$,.... jedesmal ein System particulärer Integrale bilden, wenn die Functionen F_1, F_2,...., sowie ihre Ableitungen endlich und stetig sind und zugleich für jeden Werth von t die Gleichungen:

$$F_1\,(t,\,0,\,0,\ldots)=0,\quad F_2\,(t,\,0,\,0,\ldots)=0,\ldots$$

statt finden Diese besondern Werthe $x=0$, $y=0$,.... können also nur insofern singuläre Auflösungen sein, als die Bedingungen:

$$M_1=\infty,\quad M_1=\S,\ldots,\quad N_1=\infty,\quad N_1=\S,\ldots$$

oder einige derselben, erfüllt werden.

§. 210. Wir wollen annehmen, daß die Werthe:

$$x=\varphi(t),\quad y=\chi(t),\quad z=\psi(t),\ldots$$

ein System singulärer Integrale der Differenzialgleichungen;

$$dx=F_1\,(t,x,y,\ldots),\quad dy=F_2\,(t,x,y,\ldots),\ldots$$

bilden und setzen:

$$x=\varphi(t)+\xi,\quad y=\chi(t)+\eta,\ldots,$$

so sind $\xi=0$, $\eta=0$ singuläre Integrale der durch diese Substitution erhaltenen neuen Gleichungen:

$$\varphi'(t)dt + d\xi = F_1[t, \varphi(t) + \xi, \chi(t) + \eta \ldots],$$
$$\chi'(t)dt + d\eta = F_2[t, \varphi(t) + \xi, \chi(t) + \eta \ldots] \ldots\ldots$$

Wenn man von dieſen Gleichungen ihre Werthe für $\xi = 0$ abzieht, ſo erhält man:

$$d\xi = \{F_1[t, \varphi'(t) + \xi, \chi'(t) + \eta, \ldots] - F_1[t, \varphi(t), \chi(t), \ldots]\}dt.$$

. . . . . .

Nun ſind aber $\xi = 0$, $\eta = 0$, ... nur dann ſinguläre Auflöſungen dieſer letzten Gleichungen, wenn die Coefficienten von dt, oder wenigſtens einige derſelben, für $\xi = 0$, $\eta = 0$, ... unendlich, oder unbeſtimmt werden, was nur inſofern ſtatt finden kann, als die Functionen:

$$F_1[t, \varphi(t), \chi(t), \ldots], \quad F_2[t, \varphi(t), \chi(t), \ldots],$$

und ihre Ableitungen ſelbſt unendlich, oder unbeſtimmt werden. Die Werthe:

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t), \ldots$$

können alſo nur dann ein Syſtem ſingulärer Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen bilden, wenn ſie wenigſtens einige der Functionen F_1, F_2, ... und ihrer Ableitungen unendlich, oder unbeſtimmt machen. Dieſe Discontinuität iſt eine unerläßliche Bedingung; allein ſie iſt nicht hinreichend, weil gewiſſe Werthe, welche die Functionen F_1, F_2, ... und ihre Ableitungen discontinuirlich machen, nur particuläre Integrale ſein können, wie wir in dem Falle einer einzigen Differenzialgleichung geſehen haben. Wir wollen die unterſcheidenden Merkmale der ſingulären Integrale hier nicht näher unterſuchen, weil dieſe Unterſuchung in dem Falle mehrerer Veränderlichen zu complicirt und zu wenig praktiſch iſt, und ſich in jedem beſondern Falle leichter anſtellen läßt, wenn man unterſucht, ob die Integrale, deren Natur noch unbekannt iſt, ſich aus den den Conſtanten beigelegten beſondern Werthen ableiten laſſen.

Beiſpiel 1. Wir wollen die Differenzialgleichungen wieder betrachten:

$$dx = \frac{x-y}{z-t}\,dt, \quad dy = \frac{x-y}{z-t}\,dt,$$
$$dz = (x - y + 1)\,dt,$$

ſo iſt:

$$F_1 = F_2 = \frac{x-y}{z-t}, \quad F_3 = x - y + 1.$$

Setzt man:

$$F_1 = \infty, \text{ oder } F_1 = \tfrac{0}{0},$$

ſo erhält man die Gleichungen:

$$x = y, \quad z = t,$$

welche den gegebenen Differenzialgleichungen genügen und wirklich

singuläre Auflösungen derselben sind, weil man, um sie aus den allgemeinen Integralen abzuleiten, nothwendig setzen müßte:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = y, \quad C_3 = y,$$

was unmöglich ist.

Beispiel 2. Es sei:

$$dx = y^{\frac{1}{2}}dt, \quad dy = x^{\frac{1}{2}}dt, \text{ so ist } F_1 = y^{\frac{1}{2}}, \; F_2 = x^{\frac{1}{2}},$$

und die Functionen F_1, F_2 können weder unendlich, noch unbestimmt werden, während ihre Ableitungen $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ für $x=0$, $y=0$ unendlich werden, welche beide Werthe übrigens den gegebenen Differenzialgleichungen genügen.

Suchen wir die allgemeinen Integrale, so ist zunächst, wenn man dt eliminirt:

$$x^{\frac{1}{2}}dx = y^{\frac{1}{2}}dy, \text{ folglich } y^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}} + C, \; y^{\frac{1}{2}} = (x^{\frac{3}{2}} - C)^{\frac{1}{3}},$$

und wenn man diesen Werth in die erste Gleichung substituirt; so erhält man:

$$dt = \frac{dx}{(x^{\frac{3}{2}}+C_1)^{\frac{1}{3}}}, \; t = C_2 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(x^{\frac{3}{2}}+C_1)^{\frac{1}{3}}}.$$

Aus den beiden Gleichungen:

$$y^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}} + C_1, \quad t = C_2 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{(x^{\frac{3}{2}}+C_1)^{\frac{1}{3}}}$$

kann man die Werthe von C_1, C_2 als Functionen der Veränderlichen ableiten und sie sind folglich allgemeine Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen. Nun ist aber leicht einzusehen, daß die Werthe $x=0$, $y=0$ singuläre Integrale sind; denn um sie aus dem allgemeinen Integrale abzuleiten, müßte man zunächst $C_1 = 0$ setzen, wodurch man erhielte:

$$t = C_2 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - C_2 = 2x^{\frac{1}{2}}$$

und für $x=0$ wäre $C_2 = t$, was mit der Natur der willkührlichen Constante im Widerspruche steht.

Vier und dreißigste Vorlesung.

Integration der gleichzeitigen linearen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung und einiger andern Differenzialgleichungen.

---

§. 211. Unter gleichzeitigen linearen Differenzialgleichungen versteht man diejenigen, worin die abhängigen Veränderlichen x, y, z, ... und ihre Ableitungen nur auf der ersten Potenz vorkommen. Die allgemeine Form dieser Gleichungen ist:

$$\frac{dx}{dt} + P_1 x + Q_1 y + R_1 z + \ldots = T_1,$$

$$\frac{dy}{dt} + P_2 x + Q_2 y + R_2 z + \ldots = T_2, \ldots,$$

wo:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n, \ldots, T_1, \ldots, T_n, \ldots$$

Functionen der einzigen unabhängigen Veränderlichen t sind. Gleichungen dieser Art lassen sich im Allgemeinen nicht integriren, sondern nur in einigen speciellen Fällen.

Wir wollen unter einer etwas andern Form die beiden Differenzialgleichungen:

$$M_1 dx + N_1 dy + (P_1 x + Q_1 y) dt = T_1 dt,$$
$$M_2 dx + N_2 dy + (P_2 x + Q_2 y) dt = T_2 dt$$

betrachten. Multiplicirt man die zweite mit ϑ, addirt das Product zu der ersten und setzt:

$$M_1 + M_2\vartheta = m, \quad N_1 + N_2\vartheta = n, \quad P_1 + P_2\vartheta = p,$$
$$Q_1 + Q_2\vartheta = q, \quad T_1 + T_2\vartheta = T,$$

so erhält man:

$$m dx + n dy + px + qy = T dt,$$

oder:

$$m\left(dx + \frac{n}{m} dy\right) + p\left(x + \frac{q}{p} y\right) = T dt.$$

Setzte man nun:

$$x + \frac{q}{p} y = u,$$

so hätte man:

$$dx + \frac{n}{m} dy = du,$$

und die vorhergehende Gleichung wäre blos noch eine lineare Differenzialgleichung mit zwei Veränderlichen:

$$mdu + pu = \mathrm{T}dt,$$

welche wir bereits integrirt haben. Die Bedingungsgleichung:

$$dx + \frac{n}{m} dy = d\left(x + \frac{q}{p} y\right)$$

wird erfüllt, wenn man hat:

$$d.\frac{q}{p} y = \frac{n}{m} dy, \quad \frac{q}{p} dy + y d\frac{q}{p} = \frac{n}{m} dy,$$

$$\frac{q}{p} = \frac{n}{m}, \quad d.\frac{q}{p} = 0.$$

Substituirt man in diese beiden letzten Gleichungen für m, n, p, q ihre Werthe und eliminirt ϑ, so erhält man die Bedingungsgleichung, welcher die Coefficienten der gegebenen Differenzialgleichung genügen müssen, wenn sie sich auf eine lineare Differenzialgleichung mit zwei Veränderlichen soll zurückführen lassen. Wenn diese Coefficienten Constanten sind, so wird die zweite Gleichung unmittelbar erfüllt, während sich die erste in folgende verwandelt:

$$\frac{\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2 \vartheta}{\mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2 \vartheta} = \frac{\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 \vartheta}{\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2 \vartheta}$$

und für ϑ zwei Werthe ϑ_1, ϑ_2 giebt, welche auf die beiden linearen Differenzialgleichungen:

$$du + \frac{p_1}{m_1} u = \frac{\mathrm{T}_1}{m_1} dt, \quad du + \frac{p_2}{m_2} u = \frac{\mathrm{T}_2}{m_2} dt$$

führen, die sich unmittelbar integriren lassen. Substituirt man in diese beiden Integrale für u seinen Werth $x + \frac{q}{p} y$, so erhält man zwei Gleichungen zwischen x, y und zwei Constanten C_1, C_2, welche die gesuchten allgemeinen Integrale sind. Das eben Gesagte setzt voraus, daß die beiden Werthe von ϑ reell und verschieden sind, und den Fall, wo diese Werthe imaginär, oder einander gleich sind, werden wir später untersuchen.

Betrachten wir nun den Fall, wo man n lineare Differenzialgleichungen mit constanten Coefficienten zu integriren hat, so kann man immer voraus setzen, daß jede dieser Gleichungen nur eine einzige Ableitung enthält, oder von der Form ist:

$$dx+(a_1x+b_1y+c_1z+\ldots)dt=T_1dt,$$
$$dy+(a_2x+b_2y+c_2z+\ldots)dt=T_2dt,\ldots.$$

Multiplicirt man die zweite mit ϑ_2, die dritte mit $\vartheta_3,\ldots$, addirt und setzt:

$$a_1+a_2\vartheta_2+a_3\vartheta_3+\ldots=\vartheta,$$
$$T_1+\vartheta_2T_2+\vartheta_3T_3+\ldots=T;$$

so kommt:

$$dx+\vartheta_2dy+\vartheta_3dz+\ldots+\vartheta x$$
$$+[(b_1+b_2\vartheta_2+b_3\vartheta_3+\ldots)y+(c_1+c_2\vartheta_2+c_3\vartheta_3+\ldots)z+\ldots]dt=Tdt.$$

Diese letzte Gleichung wird aber eine lineare Differenzialgleichung mit zwei Veränderlichen:

$$du+\vartheta udt=Tdt$$

und hat zum Integrale:

$$u=x+\vartheta_2y+\vartheta_3z+\ldots=e^{-\vartheta t}\left[C+\int_{t_0}^{t}Te^{\vartheta t}dt\right]$$
$$=e^{-\vartheta t}\left[C+\int_{t_0}^{t}(T_1+T_2\vartheta_2+\ldots)e^{\vartheta t}dt\right].$$

Wenn man $\vartheta_1,\vartheta_2,\vartheta_3,\ldots.$ so annimmt, daß den Gleichungen:

$$b_1+b_2\vartheta_2+b_3\vartheta_3+\ldots=\vartheta\vartheta_2,$$
$$c_1+c_2\vartheta_2+c_3\vartheta_3+\ldots=\vartheta\vartheta_3,\ldots$$

genügt wird, so kann man setzen:

$$(b_2-\vartheta)\vartheta_2+b_3\vartheta_3+\ldots=-b_1,$$
$$c_2\vartheta_2+(c_3-\vartheta)\vartheta_3+\ldots=-c_1,\ldots$$

und die in §. 107 erwähnte Formel:

$$x=\frac{\Sigma\pm k_0b_0c_0\ldots}{\Sigma\pm a_0b_0c_0\ldots}$$

zeigt unmittelbar, daß der gemeinschaftliche Nenner von $\vartheta_2,\vartheta_3,\ldots.$ das nicht reducirbare Glied:

$$(b_2-\vartheta)(c_3-\vartheta)(d_4-\vartheta)\ldots.$$

enthält, welches in Beziehung auf ϑ vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, und wenn man folglich für diese unbestimmten Coefficienten $\vartheta_2,\vartheta_3,\ldots.$ ihre Werthe in die Relation:

$$a_1+a_2\vartheta_2+a_3\vartheta_3+\ldots=\vartheta$$

substituirt; so erhält man eine Gleichung, worin das Product:

$$(a_1-\vartheta)\,(b_2-\vartheta)\,(c_3-\vartheta)\,(d_4-\vartheta)\ldots$$

vorkommt, welche von n^{ten} Grade ist und n Werthe für ϑ giebt, wovon jedem ein einziges System von Werthen von $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \ldots$ entspricht. Werden diese n Systeme mit ϑ in das gefundene Integral substituirt, so erhält man n Integrale mit n willkührlichen Constanten. Diese Integrale kann man leicht auf die Form $u_1 = C$, $u_2 = C, \ldots$ bringen, und sie bilden zusammen genommen die allgemeinen Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen.

Wenn $x, y, z, \ldots$, für $t = 0$ die besondern Werthe $x_0, y_0, z_0, \ldots$ annehmen sollten, so hat man zur Bestimmung der Constanten $C_1, C_2, C_3, \ldots$ n Gleichungen, welche sich aus dem allgemeinen Integrale ergeben, wenn man $t = t_0$ und für ϑ successive seine n Werthe setzt. Diese Gleichungen sind sämmtlich von der Form:

$$x_0 + \vartheta_2 y_0 + \vartheta_3 z_0 + \ldots = Ce^{-\vartheta t_0},$$

und der allgemeine Werth von C ist:

$$C = e^{\vartheta t_0}(x_0 + \vartheta_2 y_0 + \vartheta_3 z_0 + \ldots).$$

Setzt man in das allgemeine Integral für C seinen Werth, so verwandelt sich dasselbe in:

$$f(t, x, y, \ldots, t_0, x_0, y_0, \ldots, \vartheta) = 0,$$

und wenn man die n Werthe von ϑ mit $\vartheta', \vartheta'', \ldots, \vartheta^{(n)}$ bezeichnet; so ist das System der n allgemeinen Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen:

$$f(t, x, y, \ldots, t_0, x_0, y_0, \ldots, \vartheta') = 0,$$
$$f(t, x, y, \ldots, t_0, x_0, y_0, \ldots, \vartheta'') = 0, \ldots.$$

§. 213. Aber diese n Gleichungen sind nicht immer verschieden und bilden nur dann wirklich ein System allgemeiner Integrale, wenn die n Werthe von ϑ reell und ungleich sind, und wir wollen nun untersuchen, was statt findet, wenn sie imaginär, oder gleich werden. Zuvörderst wollen wir annehmen, daß blos zwei dieser Werthe, nämlich ϑ', ϑ'' imaginär sind, so müssen sie, da sie Wurzeln derselben Gleichung sind, conjugirt sein, d. h. wenn:

$$\vartheta' = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

ist, so ist auch:

$$\vartheta'' = \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

Wenn sich alsdann das erste der allgemeinen Integrale:

$$f(t, x, y, \ldots, t_0, x_0, y_0, \ldots, \vartheta') = 0$$

in $v + w\sqrt{-1} = 0$ verwandelt, so wird das zweite:

$$v - w\sqrt{-1}$$

und beide zusammengenommen reduciren sich auf die beiden Gleichungen $v = 0$, $w = 0$, und wenn sie übereinstimmen, so hat man

doch noch zwei Gleichungen. Wenn man 4, 6, 8, ... imaginäre Wurzeln hätte, so erhielte man 2, 3, 4, ... Integrale doppelt und ihre Gesammtheit bildete immer wieder ein System von n Gleichungen mit n Anfangswerthen, oder mit n willkührlichen Constanten.

Untersuchen wir nun, was statt findet, wenn zwei Wurzeln der Gleichung, welche S giebt, einander gleich werden. Da der erste Theil des allgemeinen Integrales:

$$f(t, x, y, z, \ldots, x_0, y_0, z_0, \ldots S) = 0$$

der Kürze wegen durch $\varphi(S)$ ausgedrückt werden kann, so hat man, wenn S' und $S''=S'+h$ zwei Werthe von S bezeichnen:

$$\varphi(S')=0,\ \varphi(S'+h)=h\varphi'(S'+\varepsilon h)=0,\ \varphi'(S'+\varepsilon h)=0,$$

und folglich $\varphi'(S')=0$, wenn $\Theta''=S'$, also $h=0$ wird. Wenn also zwei Wurzeln einander gleich sind, so stimmen zwei der allgemeinen Integrale:

$$\varphi(S') = \varphi(S'') = 0$$

überein; aber es entsteht alsdann eine neue Gleichung:

$$\varphi'(\Theta') = 0$$

und man hat wieder n Gleichungen. Die Gesammtheit dieser n Gleichungen bildet das System der allgemeinen Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen. Wir wollen nun eine dritte Wurzel S''' betrachten, welche zuerst $=\Theta'+h$ ist, so hat man zugleich, wenn $\Theta'=S''$ ist:

$$\varphi(S')=0,\quad \varphi'(S')=0,$$

$$\varphi(\Theta'+h)=\varphi(S')+\frac{h}{1}\varphi'(S')+\frac{h^2}{1.2}\varphi''(S'+\varepsilon h)=0,$$

und folglich:

$$\varphi''(S' + \varepsilon h) = 0.$$

Wenn also S'' auch $=S'$ wird, d. h. wenn $h=0$ ist, so hat man nothwendig $\varphi''(S')=0$. Es stimmen drei Integrale überein; aber man hat zwei neue Gleichungen:

$$\varphi'(S')=0,\quad \varphi''(\Theta')=0.$$

Wenn man so fort schließt, so ergiebt sich, daß man, wenn m Wurzeln Θ', S'', ..., $S^{(m)}$ einander gleich sind, $m-1$ neue Gleichungen:

$$\varphi'(S')=0,\quad \varphi''(S')=0, \ldots,\quad \varphi^{(m-1)}(S')=0$$

hat, welche die $m-1$ mit dem ersten übereinstimmenden Integrale ersetzen, so daß man immer wieder n Gleichungen mit n

Anfangswerthen oder mit n willkührlichen Conſtanten hat. Wenn man in dem Integrale:

$$x+\vartheta_2 y+\vartheta_3 z+\ldots=e^{-\vartheta t}\left[C+\int_{t_0}^{t}(T_1+T_2\vartheta_2+\ldots)e^{\vartheta t}dt\right]$$

für C nicht ſeinen Werth als Function der Anfangswerthe und von ϑ ſetzte, ſo hätte man für $\varphi'(\vartheta)$, $\varphi''(\vartheta)$.... reſp.:

$$\frac{d\varphi(\vartheta,C)}{d\vartheta}+C'\frac{d\varphi(\vartheta,C)}{dC},$$

$$\frac{d^2\varphi(\vartheta,C)}{d\vartheta^2}+2C'\frac{d^2\varphi(\vartheta,C)}{d\vartheta\,dC}+C''\frac{d^2\varphi(\vartheta,C)}{dC^2},\ldots$$

und die Größen C', C'',...., welche durch die Gleichungen:

$$\frac{dC}{d\vartheta}=C',\ C''=\frac{d^2C}{d\vartheta^2},\ldots$$

beſtimmt werden, können als neue Conſtanten betrachtet werden, deren Anzahl genau der Anzahl der Wurzeln gleich iſt, welche der erſten Wurzel gleich werden und die Allgemeinheit des Syſtemes der Integrale erhalten.

§. 214. Durch eine ſehr einfache Betrachtung ergiebt ſich, daß die eben auseinandergeſetzte Methode auf den Fall gleicher Wurzeln anwendbar iſt. Denn ſie giebt in jeder Vorausſetzung wenigſtens eins der allgemeinen Integrale, woraus ſich der Werth einer der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ ergiebt, welchen man in die gegebenen Differenzialgleichungen ſubſtituiren kann, wodurch man ein Syſtem von $n-1$ Gleichungen mit $n-1$ Veränderlichen erhält. Wenn für dieſes Syſtem von $n-1$ Gleichungen die $n-1$ Werthe von ϑ einander gleich, oder imaginär ſind, ſo giebt die Methode die noch übrigen $n-1$ zu beſtimmenden Integrale, und in jedem Falle giebt ſie wenigſtens ein zweites Integral, welches auf ein Syſtem von $n-2$ Differenzialgleichungen mit $n-2$ Veränderlichen führt, u. ſ. f., ſo daß man ungeachtet der Gleichheit der Wurzeln ein Syſtem von n Integralen mit n willkührlichen Conſtanten erhält.

§. 215. Die gegebenen gleichzeitigen Differenzialgleichungen:

$$dx+(a_1x+b_1y+c_1z+\ldots)dt=T_1dt,$$
$$dy+(a_2x+b_2y+c_2z+\ldots)dt=T_2dt,\ldots$$

kann man auch noch durch ein anderes Verfahren integriren, und wir wollen zunächſt den Fall betrachten, wo die zweiten Theile dieſer Gleichungen fehlen, ſo daß ſie folgende Form haben:

$$dx+(a_1x+b_1y+c_1z+\ldots)dt=0,$$
$$dy+(a_2x+b_2y+c_2z+\ldots)dt=0,\ldots.$$

Alsdann ſieht man unmittelbar ein, daß, wenn mehrere Werthſyſteme von $x, y, z, \ldots$ einzeln dieſen Gleichungen genügen, die

Summe aller, oder mehrer dieſer Werthſyſteme dieſen Gleichungen ebenfalls genügen, ſo daß man blos n Syſteme, jedes mit einer willkührlichen Conſtante zu ſuchen braucht, um durch Addition derſelben die geſuchten allgemeinen Integrale zu erhalten. Zu dem Zwecke wollen wir ſetzen:

$$y = \beta x, \quad z = \gamma x, \ldots,$$

ſo verwandeln ſich die Differenzialgleichungen ohne zweite Theile in folgende:

$$dx + x(a_1 + b_1\beta + c_1\gamma + \ldots)\,dt = 0,$$
$$\beta dx + x(a_2 + b_2\beta + c_2\gamma + \ldots)\,dt = 0, \ldots,$$

und wenn man ſetzt:

$$a_1 + b_1\beta + c_1\gamma + \ldots = -\alpha,$$

ſo können dieſelben nur inſofern ſtattfinden, als man hat:

$$a_2 + b_2\beta + c_2\gamma + \ldots = -\alpha\beta, \; a_3 + b_3\beta + c_3\gamma + \ldots = -\alpha\gamma \ldots.$$

Aus dieſen $n-1$ letzten Gleichungen ergeben ſich die Werthe von $\beta, \gamma, \ldots$, welche, wenn man ſie in die Gleichung:

$$a_1 + b_1\beta + c_1\gamma + \ldots = -\alpha$$

ſubſtituirt, eine Gleichung des n^{ten} Grades mit α geben, und jeder der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n$ dieſer Gleichung entſpricht ein Werthſyſtem von $\beta, \gamma, \ldots$. Ferner wird x durch die Gleichung $dx - \alpha x dt = 0$ gegeben, woraus folgt:

$$\frac{dx}{x} = \alpha dt, \quad \mathrm{l}x - \mathrm{l}C = \alpha t,$$

und mithin:

$$x = Ce^{\alpha t}, \quad y = C\beta e^{\alpha t}, \quad z = C\gamma e^{\alpha t}, \ldots$$

Wenn man in dieſen Gleichungen für α ſucceſſive ſeine n Werthe ſetzt, ſo erhält man n Syſteme von Gleichungen, welche allen gegebenen Differenzialgleichungen genügen und wovon jedes eine Conſtante enthält. Das durch Addition dieſer n Syſtemege bildete Syſtem:

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + \ldots C_n e^{\alpha_n t}, \quad y = C_1\beta_1 e^{\alpha_1 t} + C_2\beta_2 e^{\alpha_2 t} + \ldots$$

iſt das Syſtem der geſuchten allgemeinen Integrale. Um von dieſem einfachen Falle zu dem überzugehen, wo die Functionen $T_1, T_2, \ldots$ nicht mehr Null ſind, braucht man in dieſen Gleichungen für die Conſtanten $C_1, C_2, \ldots$ nur Functionen von x von ſolcher Beſchaffenheit zu ſubſtituiren, daß ſie den Gleichungen mit zweiten Theilen noch genügen. Wenn man aber die Werthe von $x, y, z, \ldots$ differenzirt, um ſie nebſt ihren Ableitungen $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \ldots$ in die gegebenen Gleichungen zu ſubſtituiren, und ausdrückt, daß ſie erfüllt werden; ſo findet man:

$$e^{\alpha_1 t}\frac{dC_1}{dt} + e^{\alpha_2 t}\frac{dC_2}{dt} + \ldots e^{\alpha_n t}\frac{dC_n}{dt} = T_1,$$

$$\beta_1 e^{\alpha_1 t}\frac{dC_1}{dt} + \beta_2 e^{\alpha_2 t}\frac{dC_2}{dt} + \ldots = T_2, \ldots,$$

und diese n letzten Gleichungen geben die Werthe von $\frac{dC_1}{dt}, \frac{dC_2}{dt}, \ldots$ als Functionen von t, welche man alsdann durch bloße Quadraturen integrirt.

§. 216. Wir wollen nun diese allgemeinen Principien auf einige Beispiele anwenden.

Beispiel 1. Es seien die beiden Differenzialgleichungen:

$$dx + (a_1 x + b_1 y)\,dt = T_1\,dt, \quad dy + (a_2 x + b_2 y)\,dt = T_2\,dt$$

gegeben, so erhält man, wenn man die zweite mit ϑ_2 multiplicirt, das Product zu der ersten addirt und:

$$a_1 + a_2\vartheta_2 = \vartheta, \quad b_1 + b_2\vartheta_2 = \vartheta\vartheta_2$$

setzt:

$$dx + \vartheta_2 dy + \vartheta(x + \vartheta_2 y)dt = (T_1 + \vartheta_2 T_2)dt,$$

woraus sich durch Integration ergiebt:

$$x + \vartheta_2 y = e^{-\vartheta t}\left[C + \int_{t_0}^{t} (T_1 + \vartheta_2 T_2)\, e^{\vartheta t}\, dt\right],$$

wo ϑ übrigens durch die Gleichung des zweiten Grades:

$$(a_1 - \vartheta)\,(b_2 - \vartheta) = a_2 b_1$$

gegeben wird, welche zwei Werthe ϑ', ϑ'', und folglich zwei Integrale:

$$x + \frac{\vartheta' - a_1}{a_2} = e^{-\vartheta' t}\left[C_1 + \int_{t_0}^{t}\left(T_1 + \frac{\vartheta' - a_1}{a_2} T_2\right) e^{\vartheta' t}\, dt\right],$$

$$x + \frac{\vartheta'' - a_1}{a_2} = e^{-\vartheta'' t}\left[C_2 + \int_{t_0}^{t}\left(T_1 + \frac{\vartheta'' - a_1}{a_2} T_2\right) e^{\vartheta'' t}\, dt\right]$$

giebt. Wenn die beiden Wurzeln ϑ', ϑ'' einander gleich wären, so hätte man nur ein Integral, aber auch die Gleichung:

$$\frac{a_1 y}{a_2} = e^{-\vartheta' t}\left[C' - Ct + \int_{t_0}^{t} \frac{a_1 T_2}{a_2}\, e^{\vartheta' t} dt + t\int_{t_0}^{t}\left(T_1 + \frac{\vartheta' - a_1}{a_2} T_2\right) dt + \int_{t_0}^{t} t\left(T_1 + \frac{\vartheta' - a_1}{a_2} T_2\right) e^{\vartheta' t} dt\right],$$

welche man erhält, wenn man dieses eine Integral in Beziehung auf ϑ' differenzirt und C dabei als eine Function von ϑ' betrachtet.

Man könnte auch, wenn man dieses eine Integral auf die Form:

$$x + \beta y = \varphi(t)$$

brächte, daraus den Werth von $x = \varphi(t) - \beta y$ ableiten, um denselben in die erste der gegebenen Gleichungen:

$$dx + (a_1 x + b_1 y)dt = T_1 dt$$

zu substituiren, welche sich alsdann in folgende verwandelte:

$$dy - \frac{b_1 - a_1\beta}{\beta} y\, dt = \frac{1}{\beta}[T_1 + a_1\varphi(t) + \varphi'(t)]dt.$$

Diese letzte Gleichung ist aber linear und läßt sich unmittelbar integriren.

Beispiel 1. Die beiden Differenzialgleichungen:

$$4dx + 9dy + (44x + 49y)dt = tdt,$$
$$3dx + 7dy + (34x + 38y)dt = e^t dt$$

haben zu ihrem Integrale:

$$x = \frac{19}{3}t - \frac{29}{7}e^t + C_1 e^{-6t} - C_2 e^{-t} - \frac{56}{9},$$
$$y = \frac{24}{7}e^t - \frac{17}{3}t + 4C_1 e^{-6t} + C_2 e^{-t} + \frac{55}{9}$$

und die beiden Wurzeln $\vartheta' = 6$, $\vartheta'' = 1$ sind ungleich.

Beispiel 2. Die beiden Differenzialgleichungen:

$$4dx + 9dy + (11x + 31y)dt = e^t dt,$$
$$3dx + 7dy + (8x + 24y)dt = e^{2t} dt$$

geben dagegen $\vartheta' = \vartheta'' = 4$ und haben zu ihren Integralen:

$$x = \frac{31}{25}e^t - \frac{49}{36}e^{2t} - C_1 te^{-4t} + C_2 e^{-4t},$$
$$y = \frac{19}{36}e^{2t} - \frac{11}{25}e^t + \frac{C_1(t+1) - C_2}{e^{4t}}.$$

Beispiel 3. Für die Gleichungen:

$$4dx + 9dy + (2x + 31y)dt = e^t dt,$$
$$3dx + 7dy + (x + 24y)dt = 3dt$$

sind die beiden Wurzeln:

$$\vartheta' = 4 + \sqrt{-1},\quad \vartheta'' = 4 - \sqrt{-1}$$

imaginär und die allgemeinen Integrale werden durch die Gleichung:

$$(1+\sqrt{-1})\,x+y=$$

$$e^{-4t}\left[\begin{array}{l}(\cos t-\sqrt{-1}\sin t)(4+7\sqrt{-1})\left(\int e^{5t}\cos t\,dt+\sqrt{-1}\int e^{5t}\sin t\,dt\right)\\ -3(5+9\sqrt{-1})\left(\int e^{4t}\cos t\,dt+\sqrt{-1}\int e^{4t}\sin t\,dt\right)+C_1+C_2\sqrt{-1}\end{array}\right]$$

gegeben, und außerdem hat man:

$$\int e^{5t}\cos t\,dt=\frac{e^{5t}(5\cos t+\sin t)}{26},$$

$$\int e^{5t}\sin t\,dt=\frac{e^{5t}(5\sin t-\cos t)}{26},$$

$$\int e^{4t}\cos t\,dt=\frac{e^{4t}(4\cos t+\sin t)}{17},$$

$$\int e^{4t}\sin t\,dt=\frac{e^{4t}(4\sin t-\cos t)}{17}.$$

Fünf und dreißigste Vorlesung.

Integration einer Differenzialgleichung von einer beliebigen Ordnung mit zwei Veränderlichen. — Allgemeine Principien. — Bedingungen der Integrabilität.

---

§. 217. Unter einer Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung mit zwei Veränderlichen versteht man eine solche, welche außer den Veränderlichen auch ihre Ableitungen bis zu der n^{ten} Ordnung inclusive enthält. Die allgemeine Form dieser Gleichungen, wenn darin nur eine abhängige Veränderliche vorkommt, ist:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

oder wenn man diese Gleichung für $\frac{d^ny}{dx^n}$ auflöst:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Verbindet man mit dieser Gleichung die $n-1$ bekanten Relationen:

$$dy = y'dx, \quad dy' = y''dx, \quad dy'' = y'''dx, \ldots, \quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx,$$

so erhält man ein System von n gleichzeitigen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung:

$$dy = y'dx, \quad dy' = y''dx, \ldots, \quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx,$$
$$dy^{(n-1)} = f[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}]dx.$$

Integrirt man dieses System von Differenzialgleichungen durch die im Vorhergehenden angegebenen Methoden, so erhält man die Werthe von $y, y', \ldots. y^{(n-1)}$ als Functionen von n willkührlichen Constanten, und der auf diese Weise für y gefundene Werth:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)$$

ist das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung, und daraus folgt:

$$y' = \varphi'(x, C_1, C_2, \ldots), \quad y'' = \varphi''(x, C_1, C_2, \ldots), \ldots,$$
$$y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \ldots).$$

§. 218. Es läßt sich leicht zeigen, daß das allgemeine Integral wirklich n Constanten, d. h. alle die Constanten enthält, welche die Integrale der gleichzeitigen Differenzialgleichungen enthalten würden. Denn wenn eine dieser Constanten, z. B. C_1, in dem Werthe von y fehlte, so würde sie auch in den Werthen von $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ fehlen, und folglich auch nicht in den allgemeinen Integralen der gleichzeitigen Differenzialgleichungen vorkommen, was gegen die Voraussetzung ist. Wenn die x_0 entsprechenden Werthe $y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ der Function y und ihrer $n-1$ ersten Ableitungen gegeben wären; so könnte man die Integrale der gleichzeitigen Differenzialgleichungen, und folglich auch das allgemeine Integral der Differenzialgleichung der $n$ten Ordnung genau, oder näherungsweise als Function dieser Anfangswerthe bestimmen, woraus folgt, daß man in diesem letzten Integrale die willkührlichen Constanten als die Anfangswerthe der gesuchten Function y und ihrer Ableitungen betrachten kann. Da ferner die gleichzeitigen Differenzialgleichungen nur ein einziges System allgemeiner Integrale haben können, so ist dasselbe mit der Differenzialgleichung der $n$ten Ordnung der Fall. Aus dem Vorhergehenden folgt also: 1) daß das allgemeine Integral einer Differenzialgleichung der $n$ten Ordnung nothwendig n willkührliche Constanten enthält, und 2) daß jede Gleichung, welche einer Differenzialgleichung der $n$ten Ordnung genügt, das allgemeine Integral derselben ist, wenn sie n willkührliche Constanten enthält.

§. 219. Die verschiedenen Systeme der singulären Integrale dieser gleichzeitigen Differenzialgleichungen geben die singulären Integrale der Differenzialgleichung der $n$ten Ordnung. Da die Functionen $F_1, F_2, \ldots$ für diese gleichzeitigen Differenzialgleichungen nichts anders sind, als die Function y und ihre Ableitungen $y' y'', \ldots y^{(n-1)}$, welche wir als endlich und stetig voraussetzen; so können sie nicht unendlich, oder unbestimmt werden, und folglich können die singulären Integrale, wenn sie existiren, nichts anders sein, als die Werthe von y, welche die Function $f[x, y, y', \ldots y^{(n-1)}]$, oder ihre Ableitungen in Beziehung auf $y, y', \ldots$ unendlich, oder unbestimmt machen (§. 201).

Im Vorhergehenden haben wir gesehen, daß die singulären Auflösungen der gleichzeitigen Differenzialgleichungen in gewissen Fällen allgemeiner waren, als die allgemeinen Integrale, daß sie eine größere Anzahl von Constanten und sogar willkührliche Functionen enthalten konnten; allein in Beziehung auf eine Differenzialgleichung der $n$ten Ordnung verhält sich dieses nicht so. Denn nach dem eben Gesagten müssen die singulären Integrale dieser Gleichungen sämmtlich einer Gleichung von der Form:

$$\frac{1}{\phi[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}]} = 0$$

oder:

$$\chi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0$$

genügen, d. h. sie bilden eine particuläre, oder eine singuläre Auflösung einer Differenzialgleichung von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, und können folglich nicht mehr Constanten enthalten, als das Integral einer solchen Differenzialgleichung haben kann.

Schließt man auf diese Weise weiter fort, so kommt man zuletzt auf eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung, deren Integral höchstens eine Constante enthält, und es ist folglich bewiesen, daß die singulären Auflösungen der Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung entweder gar keine, oder weniger als n willkührliche Constanten enthalten.

§. 220. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß es, wenn f eine endliche und stetige Function ist, so wie jede ihrer Ableitungen nach $y, y', y'', \ldots$ eine Function y von x giebt, welche die Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

verificirt, und, so wie jede ihrer Ableitungen, für $x = x_0$ bestimmte Werthe $y_0, y'_0, y''_0, \ldots$ annimmt. Allein man kann sich hier noch eine andere Aufgabe stellen, nämlich: die Merkmale zu bestimmen, woran sich erkennen läßt, daß die Function:

$$\mathrm{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

die genaue Ableitung einer gewissen ursprünglichen Function ist, oder was auf dasselbe hinausläuft, welches die Bedingungen der Integrabilität dieser Function sind. Euler hat diese Aufgabe zuerst gelöst, indem er zunächst mit Hülfe der Variationsrechnung folgenden merkwürdigen Lehrsatz beweist: Soll die Function:

$$\mathrm{F}\left[x, y, y', y'', y^{(n-1)}\right], \ldots$$

ein genaues Differenzial sein, und man setzt:

$$\mathrm{M} = \mathrm{D}_x \mathrm{F}, \quad \mathrm{N} = \mathrm{D}_y \mathrm{F}, \quad \mathrm{P} = \mathrm{D}_{y'} \mathrm{F}, \ldots,$$

oder:

$$d\mathrm{F} = \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \mathrm{P}dy' + \mathrm{Q}dy'' + \mathrm{R}dy''' + \ldots;$$

so ist erforderlich, aber auch genügend, daß man habe:

$$\mathrm{N} - \mathrm{D}_x \mathrm{P} + \mathrm{D}_x^2 \mathrm{Q} - \mathrm{D}_x^3 \mathrm{R} + \ldots = 0,$$

oder:

$$\mathrm{D}_y \mathrm{F} - \mathrm{D}_x \mathrm{D}_{y'} \mathrm{F} - \mathrm{D}_x^2 \mathrm{D}_{y''} \mathrm{F} - \ldots = 0.$$

Lexell, Lagrange und Poisson scheinen nicht beachtet zu haben, daß Euler nicht blos gesagt hat: daß diese Bedingung erforderlich, sondern auch, daß sie hinreichend ist, weil sie die Euler'sche Darstellung zu ergänzen gesucht haben. Der Beweis von Lagrange beruht auf der Anwendung sehr complicirter Reihen, deren Convergenz durch nichts a priori bewiesen wird. Die Grundformel Poisson's unterliegt vielen Ausnahmen, so daß seine

Methode nicht die Allgemeinheit hat, welche er derſelben beilegte. Bertrand hat über dieſen Gegenſtand ſo eben in dem Journal de l' Ecole Polytechnique, cahier XXVIII eine merkwürdige Abhandlung bekannt gemacht, worin derſelbe, nachdem er die Irrthümer von Lagrange und Poiſſon angegeben und den Euler'ſchen Beweis ſo modificirt hat, daß derſelbe nach ſeiner Meinung von jedem gegründeten Vorwurfe frei iſt, einen zweiten Beweis mittheilt, welcher unmittelbar auf die Poiſſon'ſche Grundformel führt; aber eben deswegen denſelben Einſchränkungen unterliegt. J. Binet hat ſich auf unſer Erſuchen mit dieſer ſeinen Unterſuchung beſchäftigt und ſcheint durch ſeinen Scharfſinn alle Klippen vermieden und die Aufgabe glücklich gelöſt zu haben.

In der Function $F(x, y' y'', \ldots.)$ wollen wir $y = u + \alpha v$ ſetzen, wo u und v zwei unbeſtimmte Functionen von x ſind, die wir ſpäter näher beſtimmen können, und α eine von x unabhängige neue Veränderliche bezeichnet; ſo haben wir:

$$y' = u' + \alpha v', \quad y'' = u'' + \alpha v'', \ldots,$$
$$F = f(\alpha) = F(x, u + \alpha v, u' + \alpha v', \ldots),$$

und folglich:

$$df(\alpha) = d\alpha\,[vF'(x, u + \alpha v, u' + \alpha v', \ldots) + v'F'(x, u' + \alpha v, u + \alpha v', \ldots) + \ldots],$$

$$f(\alpha) - f(0) = \int_0^{\alpha} d\alpha\,[vF'(\alpha v) + v'F'(\alpha v') + v''F'(\alpha v'') + \ldots],$$

wo der Kürze wegen $F'(\alpha v)$, $F'(\alpha v')$, ... ſtatt $F'(u + \alpha v)$, $F'(u' + \alpha v')$, ... geſetzt iſt. Wenn man in dieſer Gleichung $\alpha = 1$ ſetzt und bemerkt, daß:

$$f(1) = F(x, u + v, u' + v', \ldots), \quad f(0) = F(x, u, u', \ldots)$$

iſt, ſo findet man:

$$F(x, u + v, u' + v', \ldots) = F(x, u, u', u'', \ldots) + \int_0^1 d\alpha\,[vF'(\alpha v) + v'F'(\alpha v') + \ldots].$$

Die Richtigkeit dieſer Formel ſetzt blos voraus, daß die Functionen:

$$F(x, u, u', \ldots), \quad F'(\alpha v) = F'(u + \alpha v), \quad F'(\alpha v') = F'(u' + \alpha v'), \ldots$$

zwiſchen den Grenzen 0 und 1 endlich und ſtetig bleiben, welchen Bedingungen man immer genügen kann, wenn man die Function u ſchicklich wählt.

Wenn man in die letzte Gleichung für v ſeinen Werth $y - u$ ſubſtituirt, mit dx multiplicirt und integrirt, ſo findet man:

$$\int dx F[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}]$$

$$= \int dx\, F(x, u, u', \ldots) + \int dx \int_0^1 d\alpha [vF'(\alpha v) + v'F'(\alpha v') + \ldots]$$

$$= \int dx\, F(x, u, u', \ldots) + \int_0^1 d\alpha \int dx [vF'(\alpha v) + v'F'(\alpha v,) + \ldots].$$

Ferner giebt die theilweiſe Integration:

$$\int dx v' F'(\alpha v') = \int F'(\alpha v')\, dv = vF'(\alpha v') - \int v dx\, D_x F'(\alpha v'),$$

$$\int dx v'' F''(\alpha v'') = v'F'(\alpha v'') - vD_x F'(\alpha v'') + \int v dx\, D_x^2 F''(\alpha v''),$$

$$\int dx v''' F'''(\alpha v''') = v''F'(\alpha v''') - v' D_x F'(\alpha v''') + vD_x^2 F'(\alpha v'') - \int v dx D_x^3 F'(\alpha v'''),$$

. . . . . .

und wenn man ſubſtituirt, ſo erhält man:

$$\int dx\, F(x, y, y', \ldots) = \int dx\, F(x, u, u', \ldots)$$

$$+ v \int_0^1 d\alpha [F'(\alpha v') - D_x F'(\alpha v'') + D_x^2 F'(\alpha v'') \ldots]$$

$$+ v' \int_0^1 d\alpha [F'(\alpha v'') - D_x F(\alpha v''') + \ldots] + v'' \int_0^1 d\alpha [F'(\alpha v''') - \ldots],$$

$$+ \int v dx \int_0^1 d\alpha [F'(\alpha v) - D_x F'(\alpha v') + D_x^2 F'(\alpha v'') \ldots].$$

Dieſe Transformation zeigt offenbar, daß der Ausdruck $F(x, y, y', \ldots) dx$ durch bloße Quadraturen integrabel iſt, wenn man identiſch hat:

$$F'(\alpha v) - D_x F'(\alpha v') + D_x^2 F'(\alpha v'') + \ldots$$
$$= F'[u + \alpha(y - u)] - D_x F'[u' + \alpha(y' - u')] + \ldots = 0.$$

Aber wenn dieſer letzten Bedingungsgleichung genügt wird, ſo iſt dieſes auch mit der folgenden:

$$F'(y) - D_x F'(y') + D_x^2 F'(y'') - \ldots = 0$$

der Fall, welche ſich davon nur dadurch unterſcheidet, daß y für $u + \alpha(y - u)$ geſetzt iſt. Der Ausdruck $F(x, y, y', y'', \ldots) dx$ iſt folglich in der That ein genaus und integrabeles Differenzial, wenn man identiſch hat:

$$F'(y) - D_x F'(y') + D_x^2 F'(y'') - \ldots = 0,$$

oder beſſer:

$$D_yF - D_xD_{y'}F + D_x^2D_{y''}F - \ldots = 0.$$

§. 221 Umgekehrt, wenn der Ausdruck:

$$F(x, y, y', y'', \ldots)dx$$

integrabel ist, so muß man identisch haben:

$$F'(y) - D_xF'(y') + \ldots = 0;$$

denn in diesem Falle ist 1) das Integral dieses Ausdruckes blos eine Function $\varphi[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}]$ der beiden Veränderlichen x, y und der Ableitungen $y', y'', \ldots$; 2) der Theil $\int dx F(x, u, u', u'' \ldots)$ wird ebenfalls gleich $\varphi(x, u, u', u'', \ldots)$, ist also blos von x und den Grenzwerthen von x abhängig; 3) in jedem der Glieder:

$$v\int_0^1 d\alpha[F'(\alpha v') - D_xF'(\alpha v'') + D_x^2F'(\alpha v''') + \ldots], \; v'\int_0^1 d\alpha[\ldots]$$

bezieht sich die Integration auf α und nicht auf x und hängt folglich nicht von der willkührlichen Form ab, welche man der Function v geben kann, sondern blos von den Grenzwerthen der Veränderlichen, wogegen 4) das doppelte Integral, welches man auf die Form $\int V v dx$ bringen kann, offenbar nicht blos von den Grenzwerthen der Veränderlichen, sondern auch von der Form der Function v oder des Werthes von y als Function von x abhängt, so daß die Gleichung, welche den Werth von:

$$\int F(x, y, y', y'', \ldots)\, dx$$

giebt, und welche man auf die Form:

$$\chi(x_1, y', y'_1, y''_1, \ldots, x_0, y_0, y'_0, y''_0, \ldots) = \int_{x_0}^{x_1} V v dx$$

bringen kann, nur dann verificirt werden kann, wenn das Integral $\int_{x_0}^{x_1} V v dx$ für beliebige Werthe von x_0, x_1, v oder von x_0, x_1, y, weil $v = u - y$ ist, verschwindet. Man muß also identisch haben:

$$F'(\alpha v) - D_xF'(\alpha v') + D_x^2F'(\alpha v'') + \ldots = 0$$

und folglich:

$$F'(y) - D_xF'(y') + \ldots = 0,$$

was bewiesen werden sollte.

Die einzige Bedingung, welche erforderlich, aber auch hinreichend ist, damit der Ausdruck $F(x, y, y', y'', \ldots)dx$ ein genaues und unmittelbar integrabeles Differenzial ist, besteht folglich darin, daß man identisch hat:

$$F'(y) - D_x F'(y') + D_x^2 F'(y'') - \ldots = 0.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt wird, so hat man ferner:

$$(A)\begin{cases} \int dx\, F(x, y, y', \ldots) = \int dx\, F(x, u, u', \ldots) \\ + v \int_0^1 d\alpha\, [F'(\alpha v') - D_x F'(\alpha v'') + \ldots] \\ + v' \int_0^1 d\alpha\, [F'(\alpha v'') - D_x F'(\alpha v''') + \ldots] + \ldots \end{cases}$$

und die Integration des Ausdruckes $F(x, y, y', y'', \ldots) dx$ ist auf bloße Quadraturen zurückgeführt.

Wenn man in der Gleichung (A) setzt $u = 0$ und $u' = 0$, $u'' = 0, \ldots$; so kommt:

$$\int F(x, y, y', y'', \ldots)\, dx = \int F(x, 0, 0, 0, \ldots)\, dx$$
$$+ y \int_0^1 [F'(y') - D_x F'(y'') + \ldots] d\alpha$$
$$+ y' \int_0^1 [F'(y'') - D_x F''(y'') + \ldots] d\alpha,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dieses ist die Poisson'sche Grundformel; aber sie ermangelt der erforderlichen Allgemeinheit und wird unbrauchbar, wenn $F(x, 0, 0, \ldots.)$ unendlich, oder unbestimmt wird, was z. B. der Fall ist, wenn man setzt:

$$F(x, y, y', \ldots) = 1 + \frac{1}{y} - \frac{xy'}{y^2} - \frac{yy''}{y'^2}, \ldots,$$

und in unendlich vielen andern Fällen. Da die Poisson'sche Formel im Grunde nichts anders ist, als die Reihe, durch welche Lagrange das Integral $\int F dx$ ausdrückt, so ist diese Reihe selbst unbrauchbar, wenn $F(x, 0, 0, \ldots.)$ unendlich, oder unbestimmt ist. Diese Klippe ist durch Anwendung der Function u vermieden, weil sie die Discontinuität der Functionen verschwinden macht.

Beispiel 1. Wenn F blos eine Function der beiden Veränderlichen x, y ist, so hat man:

$$dF = M dx + N dy,$$

die Bedingung der Integrabilität reducirt sich auf $N = 0$ und $F dx$ ist nur dann ein genaues Differenzial, wenn y nicht in F vorkommt, was a priori einleuchtend ist.

Beispiel 2. Wenn:

$$F = M + N y' = \frac{1}{dx}(M dx + N dy)$$

ist, so hat man:

$$dF=\left(\frac{dM}{dx}+y'\frac{dN}{dx}\right)dx+\left(\frac{dM}{dy}+y'\frac{dN}{dy}\right)dy+N dy',$$

und hieraus folgt, daß $Mdx+Ndy$ nur dann ein genaues Differenzial ist, wenn man hat:

$$\frac{dM}{dx}+y'\frac{dN}{dy}-\frac{dN}{dx}-\frac{dN}{dy}y'=0,$$

oder:

$$\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}=0,$$

was schon bekannt war.

Beispiel 3. Um die Einfachheit und Wahrheit des Euler'schen Lehrsatzes besser hervortreten zu lassen, wollen wir a posteriori verfahren, und annehmen, daß man habe:

$$\int F dx=\frac{xy'}{y},\text{ so ist }F=\frac{y'}{y}-\frac{xy'^2}{y^2}+\frac{xy''}{y},$$

$$dF=\left(-\frac{y'^2}{y^2}+\frac{y''}{y}\right)dx+\left(-\frac{y'}{y^2}+\frac{2y'^2x}{y^3}-\frac{xy''}{y^2}\right)dy$$
$$+\left(\frac{1}{y}-\frac{2xy'}{y^2}\right)dy'+\frac{x}{y}\,dy'',$$

so ist:

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}=0,$$

wie es sein muß.

§. 222. Wenn die Bedingung der Integrabilität erfüllt wird, so reducirt sich die Gleichung, welche den Werth des Ausdruckes $\int_{x_0}^{x_1} F dx$ giebt, nach dem Vorhergehenden auf:

$$\int_{x_0}^{x_1} F dx=\varphi(x_1, y_1, y'_1, y''_1, \ldots, x_0, y_0, y'_0, \ldots).$$

Wenn man nun, ohne die Function y von x zu ändern, die beiden Theile dieser letzten Gleichung in Beziehung auf x differenzirt, so erhält man:

$$F[x_1, y_1, \ldots, y_1^{(n-1)}]=\frac{d\varphi}{dx_1}$$

und wenn man die Indices hinwegläßt; so sieht man, daß unabhängig von jeder zwischen y und x stattfindenden besondern Relation, F die Ableitung der Function φ in Beziehung auf x ist, worin man die sich auf die Grenze x_0 beziehenden Größen als Constanten betrachtet und die Indices der sich auf die Grenze x_1 beziehenden Größen hinwegläßt. Hieraus folgt unmittelbar, daß man zur Verrichtung der Integration, wenn die Bedingung der Integrabilität erfüllt wird, der Function y nur eine solche Form zu

geben braucht, daß man vermittelst einer schicklichen Anzahl von Parametern, oder willkührlichen Constanten die Grenzwerthe dieser Function und ihrer $n-1$ ersten Ableitungen in Beziehung auf eine der Integrationsgrenzen gehörig bestimmen kann. Das Integral ist alsdann blos von diesen Grenzwerthen und von den sich auf die andere Grenze beziehenden Werthen, welche als Constanten betrachtet werden müssen, abhängig, und wenn man für die ersten x, y, y', ... $y^{(n-1)}$ setzt, so erhält man das gesuchte Integral.

Beispiel. Es sei:

$$F_1 = 2x + y^2 + 2xyy' + xy'' + x^2y''' - y',$$

so ist, wenn man

$$y = a + bx + cx^2$$

setzt:

$$y' = b + 2cx, \quad y'' = 2c, \quad y''' = 0,$$

$$F = 2x + (a + bx + cx)^2 + 2x(a + bx + cx^2)(b + 2cx) - b,$$

welcher Ausdruck zwischen den Grenzen x_0, x_1 integrirt werden muß. Nun ist aber:

$$\int_{x_0}^{x_1} 2x\,dx = x_1^2 - x_0^2,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} (a+bx+cx^2)^2\,dx = x_1(a+bx_1+cx_1^2)^2 - x_0(a+bx_0+cx_0^2)^2 - \int_{x_0}^{x_1} 2x(b+2cx)(a+bx+cx^2)dx$$

und wenn man zusammenaddirt und bemerkt, daß das Integral:

$$\int_{x_0}^{x_1} 2x\,(b+2cx)\;\;(a+bx+cx^2)\,dx$$

verschwindet; so erhält man nach einigen Reductionen den Ausdruck:

$$x_1^2 - x_0^2 - b(x_1 - x_0) + x_1(a+bx_1+cx_1^2)^2 - x_0(a+bx_0+cx_0^2)^2,$$

in welchem noch die Grenzwerthe von y und dessen Ableitungen y', y'' einzuführen sind. Nun ist aber:

$$a + bx_1 + cx_1^2 = y_1, \quad b = y'_1 - 2y''_1 x_1,$$

und wenn man substituirt, indem man die Anfangswerthe x_0, y_0, y'_0, y_0'' als Constanten betrachtet und x_1, y_1, y'_1, y_1'' in x, y, y', y'' verwandelt; so erhält man endlich für das gesuchte Integral:

$$x^2 + xy^2 - xy' + 2x^2y'' + C.$$

Statt $a + bx + cx^2$ hätte man auch jede andere Function von

solcher Beschaffenheit anwenden können, daß man vermöge ihrer Constanten über die Function y und ihrer beiden ersten Ableitungen beliebig disponiren kann, und einige Uebung im Rechnen lehrt, welche Function man in jedem besondern Falle wählen muß, um die Integration so leicht als möglich zu machen.

§. 223. Aus dem Vorhergehenden lassen sich leicht die Bedingungen ableiten, welche die Function F erfüllen muß, wenn sie, unabhängig von jeder besondern Form von y eine gewisse Anzahl von Malen integrabel sein soll. Denn da:

$$\int dx \int \mathrm{F} dx = x \int \mathrm{F}\, dx - \int x \mathrm{F}\, dx$$

und $\mathrm{F}dx$ nach der Voraussetzung ein genaues Differenzial ist, so ist die Function F zweimal integrabel, wenn man hat:

$$\mathrm{D}_{y'} x\mathrm{F} - \mathrm{D}_x \mathrm{D}_{y''} x\mathrm{F} + \mathrm{D}_x^2 \mathrm{D}_{y'''} x\mathrm{F} + \ldots = 0.$$

Entwickelt man den ersten Theil dieser Gleichung und berücksichtigt die erste Bedingungsgleichung:

$$\mathrm{D}_y \mathrm{F} - \mathrm{D}_x \mathrm{D}_{y'} \mathrm{F} + \mathrm{D}_x \mathrm{D}_{y''} \mathrm{F} + \ldots = 0;$$

so findet man für die zweite gesuchte Bedingungsgleichung:

$$\mathrm{D}_{y'} \mathrm{F} - 2\mathrm{D}_x \mathrm{D}_{y''} \mathrm{F} + 3\mathrm{D}_x^2 \mathrm{D}_{y'''} \mathrm{F} + \ldots = 0.$$

Wenn man von der Gleichung:

$$\int dx \int dx \int \mathrm{F}\, dx = \frac{x^2}{2} \int \mathrm{F}\, dx - x \int x \mathrm{F}\, dx + \frac{1}{2} \int \mathrm{F} x^2 dx$$

ausgeht, so findet man ebenso, daß F dreimal hinter einander integrabel ist, wenn man außer den beiden bereits erhaltenen Bedingungsgleichungen noch die folgende hat:

$$\mathrm{D}_{y''} \mathrm{F} - \frac{3.2}{1.2} \mathrm{D}_x \mathrm{D}_{y'''} \mathrm{F} + \frac{4.3}{1.2} \mathrm{D}_x \mathrm{D}_{y^{\mathrm{IV}}} \mathrm{F} + \ldots = 0.$$

Allgemein, die Function F ist m mal hinter einander integrabel, wenn man hat:

$$\mathrm{D}_{y^{(m)}} \mathrm{F} - \frac{(m+1)m \ldots 2}{1.2.3 \ldots m} \mathrm{D}_x \mathrm{D}_{y^{(m+1)}} \mathrm{F} + \frac{(m+2)(m+1) \ldots 3}{1.2.3 \ldots m} \mathrm{D}_x^2 \mathrm{D}_{y^{(m+2)}} \mathrm{F} + \ldots = 0.$$

Diese Formel ist zuerst von Lexell aufgestellt, und es ergeben sich daraus alle vorhergehenden Bedingungsgleichungen, wenn man für m alle Werthe von 0 bis m setzt und bemerkt, daß $y^{(0)} = y$ ist. Aus dieser Gleichung von Lexell folgt ferner, daß die Anzahl der Bedingungsgleichungen, welche ausdrücken, daß die Function F sich n mal hintereinander integriren läßt, oder daß $\mathrm{F}dx^n$ ein genaues Differenzial der n^{ten} Ordnung ist, $= n$ ist, und außerdem geht aus der vorhergehenden Ableitungsart auch deutlich her-

vor, daß diese n Bedingungsgleichungen nicht blos erforderlich, sondern auch zureichend sind.

§. 224. Die vorhergehenden Schlüsse lassen sich leicht auf eine Differenzialfunction von einer beliebigen Ordnung und mit einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen $x, y, z \ldots$:

$$\mathbf{F}\,[x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, \; z, z', z'', \ldots, z^{(n)}, \ldots]$$

erstrecken. Denn wenn man in dieser Function für $y, z, \ldots$ resp. $u_1 + \alpha v_1$, $u_2 + \alpha v_2, \ldots$ setzt und das Resultat dieser Substitution mit $f(\alpha)$ bezeichnet, so daß man hat:

$$f(\alpha) = \mathbf{F}[x, u_1 + \alpha v_1, u'_1 + \alpha v'_1, \ldots, u_1^{(n)} + \alpha v_1^{(n)}, u_2 + \alpha v_2, u'_2 + \alpha v'_2, \ldots];$$

so erhält man, wenn man zunächst in Beziehung auf α differenzirt und dann zwischen den Grenzen $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ integrirt, wie weiter oben die Gleichung:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y, y', y'', \ldots, z, z', z'', \ldots) &= \mathbf{F}(x, u_1, u'_1, \ldots, u_2, u'_2, \ldots) \\ &+ \int_0^1 d\alpha\,[v_1 \mathbf{F}'(\alpha v_1) + v'_1 \mathbf{F}'(\alpha v'_1) + \ldots] \\ &+ \int_0^1 d\alpha\,[v_2 \mathbf{F}'(\alpha v_2) + v'_2 \mathbf{F}'(\alpha v'_2) + \ldots] + \text{etc.}\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dx, integrirt in Beziehung auf x zwischen den Grenzen x_0, x_1 und reducirt vermittelst der theilweisen Integration; so wird der zweite Theil dieser Gleichung in zwei Theile zerlegt, wovon der eine auf einfache Quadraturen zurückgeführt ist und blos von den Grenzwerthen von $x, y, y', \ldots$ $z, z', \ldots$, aber nicht von der Form der Functionen v_1, v_2, $\ldots$ abhängt, während der zweite aus doppelten Integralen bestehende Theil:

$$\begin{aligned}&\int_0^1 d\alpha \int v_1\, dx\,[\mathbf{F}'(\alpha v_1) - \mathbf{D}_x \mathbf{F}'(\alpha v'_1) + \mathbf{D}_x^2 \mathbf{F}'(\alpha v''_1) - \ldots] \\ &+ \int_0^1 d\alpha \int v_2 dx\,[\mathbf{F}'(\alpha v_2) - \mathbf{D}_x \mathbf{F}'(\alpha v'_2) + \mathbf{D}_x^2 \mathbf{F}'(\alpha v''_2) \ldots] + \text{etc.}\end{aligned}$$

von der Form der Functionen $v_1, v_2, \ldots$ abhängig ist und nothwendig verschwinden muß, wenn $\int \mathbf{F}(x)\,dx$ unmittelbar integrabel oder $\mathbf{F}(x)\,dx$ ein genaues Differenzial sein soll. Da übrigens die Functionen $v_1, v_2, \ldots$ völlig unabhängig von einander sind, so muß man haben:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'(\alpha v') - \mathbf{D}_x \mathbf{F}'(\alpha v'_1) + \mathbf{D}_x \mathbf{F}'(\alpha v''_1) - \ldots &= 0, \\ \mathbf{F}'(\alpha v_2) - \mathbf{D}_x \mathbf{F}'(\alpha v'_2) + \mathbf{D}_x^2 \mathbf{F}'(\alpha v''_2) - \ldots &= 0, \text{ etc.}\end{aligned}$$

oder, was dasselbe ist:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'(y) - \mathbf{D}_x \mathbf{F}'(y') + \mathbf{D}_x^2 \mathbf{F}'(y'') - \ldots &= 0, \\ \mathbf{F}'(z) - \mathbf{D}_x \mathbf{F}'(z') + \mathbf{D}_x^2 \mathbf{F}'(z'') - \ldots &= 0, \text{ etc.}\end{aligned}$$

oder noch beſſer:

$$D_yF - D_xD_{y'}F + D_x^2D_{y''}F - \ldots = 0,$$

$$D_zF - D_xD_{z'}F + D_x^2D_{z''}F - \ldots = 0, \text{ etc.}$$

§. 225. Wir wollen dieſe Vorleſung mit einigen von Euler gemachten Bemerkungen ſchließen. Wenn man den erſten Theil der Bedingungsgleichung:

$$D_yF - D_xD_{y'}F + D_x^2D_{y''}F - \ldots = 0,$$

welcher man auch folgende Form geben kann:

$$N - D_xP + D_x^2Q - D_x^3R + \ldots = 0,$$

mit dx multiplicirt und dann integrirt, ſo erhält man:

$$\int Ndx - P + D_xQ - D_x^2R + D_x^3S - \text{etc.} = C_1,$$

woraus erhellet, daß Ndx, ſowohl als Fdx ein genaues Differenzial iſt. Multiplicirt man abermals mit dx und integrirt, ſo erhält man:

$$\int dx\left(\int Ndx - P\right) + Q - D_xR + D_x^2S - \ldots = C_1x + C_2$$

und folglich iſt:

$$dx\left(\int Ndx - P\right)$$

ebenfalls ein genaues Differenzial. Daſſelbe gilt von:

$$dx\left[\int\left(\int Ndx. - P\right)dx + Q\right],$$

von:

$$dx\left\{\int dx\left[\left(\int Ndx - P\right)dx + Q\right] - R\right\}, \ldots.$$

Wenn alſo F eine Function von $x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}$ iſt, ſo iſt der Ausdruck Fdx unmittelbar integrabel, wenn man ſetzt:

$$F = Mdx + Ndy + Pdy' + Qdy'' + Rdy''' + \ldots,$$

$$P - \int Ndx = P, \quad Q - \int Pdx = Q, \quad R - \int Qdx = R, \ldots,$$

wo die Ausdrücke:

$$Ndx, \quad Pdx, \quad Qdx, \quad Rdx, \ldots$$

ſelbſt unmittelbar integrabel oder genaue und von der Form von y unabhängige Differenziale ſind. Aus der Art und Weiſe, wie wir zu dieſer Folgerung gelangt ſind, geht ferner hervor, daß umgekehrt Fdx ein genaues Differenzial iſt, wenn dieſe verſchiedenen Ausdrücke genaue Differenziale ſind, und da man außerdem hat:

$$N = D_y F, \quad P = D_{y'} F, \quad Q = D_{y''} F;$$

so folgt leicht, daß $F\,dx$ ein genaues Differenzial ist, und daß dasselbe auch von:

$$dx\,D_y F, \quad dx\,D_y^2 F, \quad dx\,D_y^3 F, \ldots$$

gilt. Da die Anzahl der Functionen $P, Q, R, \ldots$ der Zahl gleich ist, welche die Ordnung der Differenzialgleichung angiebt, so müssen die daraus hervorgehenden Functionen $P, Q, R, \ldots$ nach einer gewissen Anzahl von Ableitungen verschwinden, oder Functionen der einen Veränderlichen x werden.

Beispiel. Es sei:

$$\int F\,dx = \frac{y\,(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y},$$

so ist:

$$F = \frac{y'(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{xy''} - \frac{y(1+y'^2)}{x^2y''} + \frac{3y'\sqrt{1+y'^2}}{x} - \frac{yy'''(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{xy''^2},$$

$$N = \frac{-(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2y''} + \frac{3y'\sqrt{1+y'^2}}{x} - \frac{y'''(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{xy''^2},$$

$$P = \frac{(1+4y'^2)\sqrt{1+y'^2}}{xy''} - \frac{3yy'\sqrt{1+y'^2}}{x^2y''} + \frac{3y\sqrt{1+2y'^2}}{x\sqrt{1+y'^2}} - \frac{3yy'y'''\sqrt{1+y'^2}}{xy''^2},$$

$$Q = \frac{-y'(1+y'^2)}{xy''^2} + \frac{y(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2y''^2} + \frac{2yy'''(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{xy''^3},$$

$$R = \frac{-y\,(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{xy''^2}$$

und:

$$\int N dx = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{xy''}, \quad \int P dx = \frac{3yy'(1+y'^2)}{xy''},$$

$$\int Q dx = \frac{-y\,(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{xy''},$$

$$R = R - \int Q dx = 0.$$

Sechs und dreißigste Vorlesung.

Allgemeine Eigenschaften und Integration der linearen Differenzialgleichungen der n^{ten} Ordnung mit veränderlichen, oder constanten Coefficienten und mit, oder ohne zweiten Theil.

---

§. 226. Die lineare Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung ist diejenige, worin die abhängige Veränderliche y und ihre Ableitungen:

$$y' = D_x y,\ y'' = D_x^2 y,\ y''' = D_x y, \ldots,\ y^{(n)} = D_x^{(n)} y, \ldots$$

nur auf der ersten Potenz vorkommen und nicht miteinander multiplicirt sind. Die allgemeine Form dieser Gleichungen ist folglich:

$$(1)\quad D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = X \ldots,$$

wo A_1, A_2, ... A_n, X Functionen der einen Veränderlichen x sind. Im Allgemeinen läßt sich eine solche Differenzialgleichung nicht integriren; allein man hat mehrere merkwürdige Eigenschaften derselben entdeckt, welche das Problem ihrer Integration erleichtern.

Erste Eigenschaft: Die Integration der linearen Differenzialgleichung der (1) n^{ten} Ordnung mit einem zweiten Theile X kann immer auf die Integration derselben Gleichung ohne zweiten Theil:

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = 0$$

zurückgeführt werden.

Beweis. Wir wollen $y = v_1 \int v_1 dx$ setzen, wo u_1 und u_1 zwei unbestimmte Functionen von x bezeichnen. Da man nach einer bekannten Formel hat:

$$D_x^m . uv = v D_x^m u + \frac{m}{1} D_x^{m-1} u D_x v + \frac{m(m-1)}{1.2} D_x^{m-2} u D_x^2 v + \ldots + u D_x^m v$$

und allgemein:

$$D_x^m y = D_x^m u_1 \int v_1 dx + m D_x^{m-1} u_1 v_1 + \frac{m(m-1)}{1.2} D_x^{n-2} u_1 D_x v_1 + \ldots + u_1 D_x^{m-1} v_1;$$

so hat man auch, wenn man für y, y', y'', ... ihre Werthe in die Gleichung (1) substituirt:

$$\int v_1 dx \left[D_x^n u_1 + A_1 D_x^{n-1} u_1 + A_2 D_x^{n-2} u_1 + \ldots + A_{n-1} D_x u_1 + A_n u_1 \right] + u_1 \left[D_x^{n-1} v_1 + B_1 D_x^{n-2} v_1 + \ldots + B_{n-2} D_x v_1 + B_{n-1} v_1 \right] = X,$$

wo B_1, B_2, ... B_{n-1} bestimmte Functionen von x und u_1 sind. Weiß man nun die lineare Differenzialgleichung ohne zweiten Theil zu integriren, so kann man u_1 so annehmen, daß der Gleichung:

$$D_x^n u_1 + A_1 D_x^{n-1} u_1 + A_2 D_x^{n-2} u_1 + \ldots + A_{n-1} D_x u_1 + A_n u_1 = 0$$

Genüge geschieht, wodurch der Coefficient von $\int v_2 dx$ verschwindet und die Integration der linearen Differenzialgleichung der $n$ten Ordnung mit einem zweiten Theile auf die Integration einer Differenzialgleichung von derselben Form, aber von der $(n-1)$ten Ordnung zurückgeführt wird. Wenn man in dieser neuen Gleichung $v_1 = u_2 \int v_2 dx$ setzt, so hat man nur noch eine Gleichung von der $(n-1)$ten Ordnung ohne zweiten Theil nebst einer Gleichung von der $(n-2)$ten Ordnung mit einem zweiten Theile zu integriren, und durch mehrere solcher Substitutionen kann man die Ordnungszahl der gegebenen Differenzialgleichung successive bis auf die Einheit herabbringen. Wenn man also die lineare Differenzialgleichung der $n$ten Ordnung ohne zweiten Theil zu integriren weiß, so wird die Integration derselben Gleichung mit einem zweiten Theile von selbst auf die immer mögliche Integration einer linearen Differenzialgleichung der ersten Ordnung zurückgeführt, und kann folglich immer realisirt werden.

§. 227. Zweite Eigenschaft: Das allgemeine Integral einer linearen Differenzialgleichung der $n$ten Ordnung mit einem zweiten Theile ergiebt sich vermittelst eines vielfachen Integrales aus den Integralen von n linearen Differenzialgleichungen ohne zweiten Theil.

Beweis. Um die Begriffe zu fixiren und den Beweis deutlicher zu machen, wollen wir eine lineare Differenzialgleichung der dritten Ordnung:

$$D_x^3 y + A_1 D_x^2 y + A_2 D_x y + A_3 y = X$$

betrachten und $y = u_1 \int v_1 dx$ setzen, so ergiebt sich daraus:

$$D_x y = D_x u_1 \int v_1 dx + u_1 v_1,$$

$$D_x^2 y = D_x^2 u_1 \int v_1 dx + 2 D_x u_1 v_1 + u_1 D_x v_1,$$

$$D_x^3 y = D_x^3 u_1 \int v_1 dx + 3 D_x^2 u_1 v_1 + 3 D_x u_1 D_x v_1 + u_1 D_x^2 v_1.$$

Substituirt man diese Werthe und den von y in die gegebene Gleichung und setzt der Kürze wegen:

$$3 D_x^2 u_1 + 2 A_1 D_x u_1 + A_2 u_1 = B_1 u_1, \quad 3 D_x u_1 + A_1 u_1 = B_2,$$

so erhält man:

$$(D_x^3 u_1 + A_1 D_x^2 u_1 + A_2 D_x u_1 + A_3) \int v_1 dx + u_1 (D_x^2 v_1 + B_1 D_x v_1 + B_2 v_1) = X,$$

und wenn man für u_1 eins der particulären Integrale der Gleichung:

$$D_x^3 u_1 + A_1 D_x^2 u_1 + A_2 D_x u_1 + A_3 u_1 = 0$$

nimmt; so kommt:

$$D_x^2 v_1 + B_1 D_x v_1 + B_2 v_1 = \frac{X}{u_1}.$$

Setzt man ferner $v_1 = u_2 \int v_2 dx$, wo u_2, v_2 zwei neue Functionen von x bezeichnen, substituirt und setzt:

$$C_1 = 2 D_x u_2 + B_1 u_2,$$

so erhält man:

$$(D_x u_2 + B_1 D_x u_2 + B_2 u_2) \int v_2 dx + u_2 (D_x v_2 + C_1 v_2) = \frac{X}{u_1}$$

und wenn man für u_2 eins der particulären Integrale der Differenzialgleichung:

$$D_x^2 u_2 + B_1 D_x u_2 + B_2 u_2 = 0$$

nimmt; so kommt:

$$D_x v_2 + C_1 v_2 = \frac{X}{u_1 u_2}.$$

Setzt man endlich $v_2 = u_3 \int v_3 dx$ und substituirt, so kommt:

$$(D_x u_3 + C_1 u_3) \int v_3 dx + u_3 v_3 = \frac{X}{u_1 u_2},$$

und wenn man für u_3 das Integral der linearen Differenzialgleichung der ersten Ordnung:

$$D_x u_3 + C_1 u_3 = 0$$

nimmt; so erhält man:

$$v_3 = \frac{X}{u_1 u_2 u_3}.$$

Geht man nun succeſſive zu den Werthen von v_2, v_1 und y zurück, ſo erhält man die Gleichung:

$$y = u_1 \int u_2 dx \int u_3 dx \int \frac{X dx}{u_1 u_2 u_3},$$

worin u_1, u_2, u_3 die Integrale von linearen Differenzialgleichungen ohne zweite Theile ſind.

Wenn man das eben Geſagte verallgemeinert und mit u_1, u_2, u_3, ..., u_n wieder die Integrale der n linearen Differenzialgleichungen ohne zweite Theile bezeichnet, welche man durch die ſucceſſiven Subſtitutionen erhält; ſo wird das allgemeine Integral der linearen Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung ausgedrückt durch:

$$y = u_1 \int u_2 dx \int u_3 dx \ldots \int u_n dx \int \frac{X dx}{u_1 u_2 u_3 \ldots u_n}.$$

§. 228. Dritte Eigenſchaft: Das allgemeine Integral der linearen Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung mit einem zweiten Theile ergiebt ſich vermittelſt eines vielfachen Integrales aus den n particulären Integralen U_1, U_2, ..., U_n der linearen Differenzialgleichung ohne zweiten Theil.

Beweis. Um dieſes zu beweiſen, braucht man nur zu zeigen, daß man in allen Fällen für die n particulären Integrale u_1, u_2, u_3, ... u_n von n verſchiedenen linearen Differenzialgleichungen die n Integrale U_1, U_2, U_3, ... U_n der gegebenen linearen Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung:

$$D_x^n u + A_1 D_x^{n-1} u + A_2 D_x^{n-2} u + \ldots + A_{n-1} D_x u + A_n u = 0$$

ohne zweiten Theil ſubſtituiren kann.

Wir wollen der Einfachheit wegen wieder die lineare Differenzialgleichung der dritten Ordnung betrachten. Wenn man die Differenzialgleichung:

$$D_x^3 u_1 + A_1 D_x^2 u_1 + A_2 D_x u_1 + A_3 u_1 = 0$$

mit $\int u_2 dx$ multiplicirt und zu dem Producte die Gleichung:

$$D_x^2 v_1 + B_1 D_x v_1 + B_2 v_1 = \frac{X}{u_1}$$

addirt, nachdem man darin für B_1, B_2 ihre Werthe geſetzt hat; ſo erhält man:

$$D_x^3 u_1 \int u_2 dx + 3 D_x^2 u_1 u_2 + 3 D_x u_1 D_x u_2 + u_1 D_x u_2$$
$$+ A_1 \left(D_x^2 u_1 \int u_2 dx + 2 D_x u_1 u_2 + u_1 D_x u_2 \right)$$
$$+ A_2 \left(D_x u_1 \int u_2 dx + u_1 u_2 \right) + A_3 u_1 \int u_2 dx = 0.$$

Nun ist aber leicht einzusehen, daß die Polynome, welche die verschiedenen Glieder des ersten Theiles dieser Gleichung bilden, abgesehen von den Coefficienten A_3, A_2, A_1, nichts anders als das Product $u_1 \int u_2 dx$ und seine erste, zweite, dritte Ableitung sind, so daß man die vorhergehende Gleichung auf die folgende sehr einfache Form bringen kann:

$$D_x^3 . u_1 \int u_2 dx + A_1 D_x . u_1 \int u_2 dx + A_2 D_x . u_1 \int u_2 dx + A_3 u_1 \int u_2 dx = 0,$$

woraus folgt, daß, wenn $u_1 = U_1$ eins der Integrale der Differenzialgleichung:

$$D_x^3 u + A_1 D_x^2 u + A_2 D_x u + A_3 u = 0$$

ist, $U_1 \int u_2 dx$ ein zweites Integral derselben Gleichung ist, und wenn man dieses zweite Integral mit U_2 bezeichnet; so hat man:

$$U_2 = U_1 \int u_2 dx, \text{ und folglich } u_2 = D_x \frac{U_2}{U_1},$$

wo u_2 übrigens ein Integral der Gleichung:

$$D_x^2 u_2 + B_1 D_x u_2 + B_2 u_2 = 0$$

ist.

Wenn ferner u'_2 ein zweites Integral derselben Gleichung bezeichnet, so ergiebt sich ebenso daß, $U_3 = U_1 \int u'_2 dx$ ein drittes Integral der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil ist, und man hat:

$$u'_2 = D_x \frac{U_3}{U_1}.$$

Wenn also U_1, U_2, U_3 die drei Integrale der linearen Differenzialgleichung ohne zweiten Theil:

$$D_x^3 u + A_1 D_x^2 u + A_2 D_x u + A_3 u = 0$$

bezeichnen, so sind die Integrale der Differenzialgleichung:

$$D_x^2 u_2 + B_1 D_x u_2 + B_2 u_2 = 0$$

folgende:

$$D_x \frac{U_2}{U_1}, \quad D_x \frac{U_3}{U_1}.$$

Endlich wollen wir noch bemerken, daß die Gleichung:

$$D_x u_3 + C_1 u_3 = 0$$

gegen die Gleichung:

$$D_x u_2 + B_1 D_x u_2 + B_2 u_2 = 0$$

daſſelbe iſt, wie dieſe letzte gegen die Gleichung:

$$D_x^3 u + A_1 D_x^2 u + A_2 D_x u + A_3 u = 0.$$

Man hat folglich auch:

$$u_3 = D_x \frac{u'_2}{u_2}$$

und mithin:

$$u_3 = D_x \frac{D_x \frac{U_2}{U_1}}{D_x \frac{U_3}{U_1}}.$$

Die Integrale u_2, u_3 werden alſo durch die Integrale U_1, U_2, U_3 der einen Differenzialgleichung:

$$D_x^3 u + A_1 D_x^2 u + A_2 D_x u + A_3 u = 0$$

ausgedrückt, und wenn man für u_1, u_2, u_3 ihre Werthe in die Gleichung ſubſtituirt, welche den Werth von y oder das Integral der gegebenen Differenzialgleichung giebt; ſo findet man:

$$y = U_1 \int d_x \frac{U_2}{U_1} \int d_x \frac{D_x \frac{U_2}{U_1}}{D_x \frac{U_3}{U_1}} \int \frac{X dx}{U_1 D_x \frac{U_2}{U_1} D_x \frac{D_x \frac{U_2}{U_1}}{D_x \frac{U_3}{U_1}}}.$$

Offenbar laſſen ſich dieſe Betrachtungen auf eine lineare Differenzialgleichung von einer beliebigen Ordnung ausdehnen. Wenn man die n Integrale der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil:

$$D_x^n u + A_1 D_x^{n-1} u + A_2 D_x^{n-2} u + \ldots + A_{n-1} D_x u + A_n u = 0$$

mit U_1, U_2, U_3, ... U_n bezeichnet, ſo ſind die Integrale u_2, u_3, u_4, ... u_n der Differenzialgleichungen, welche daraus durch die ſucceſſiven Subſtitutionen $y = u_1 \int v_1 dx$, $u_1 = u_2 \int v_2 dx$, ... abgeleitet werden reſp.:

$$D_x \frac{U_2}{U_1}, \quad D_x \frac{D_x \frac{U_2}{U_1}}{D_x \frac{U_3}{U_2}}, \ldots.$$

und der allgemeine Werth dieſes Integrales iſt:

$$y = U_1 \int d_x \frac{U_2}{U_1} \int d_x \frac{D_x \frac{U_2}{U_1}}{D_x \frac{U_2}{U_1}} \cdots \int \frac{X dx}{U_1 D_x \frac{U_2}{U_1} D_x \frac{D_x \frac{U_2}{U_1}}{D_x \frac{U_2}{U_1}} \cdots}.$$

Wir wollen diese Formel auf die Gleichung:

$$D_x^2 y - y = x$$

anwenden. Die Differenzialgleichung:

$$D_x^2 u - u = 0$$

hat zwei particuläre Integrale $U_1 = e^x$, $U_2 = e^{-x}$; folglich ist:

$$y = e^x \int D_x e^{-2x} \int \frac{x dx}{e^x D_x e^{-2x}} = e^x \int (-2e^{-2x} dx) \int \frac{x dx}{e^x (-2e^{-2x})}$$

$$= e^x \int e^{-2x} dx \int x e^x dx = e^x \int e^{-2x} dx (x e^x - e^x + C)$$

$$= e^x \left[\int C e^{-2x} dx + \int e^{-x} (x-1) dx = -\frac{C}{2} e^{-x} + C_2 e^x - x \right]$$

und wenn man $-\frac{C}{2} = C_1$ setzt:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - x,$$

welches das gesuchte allgemeine Integral ist.

Der allgemeine Ausdruck von y enthält unter der ersten Form n successive Integrationen, welche sich in allen Fällen leicht auf einfache Integrale zurückführen lassen. Denn setzt man:

$$d_x \frac{U_2}{U_1} = du_n,\ d_x \frac{D_x \frac{U_2}{U_1}}{D_x \frac{U_2}{U_1}} = du_{n-1}, \ldots, \frac{X dx}{U_1 D_x \frac{U_1}{U_2} D_x \frac{D_x \frac{U_2}{U_1}}{D_x \frac{U_2}{U_1}} \cdots} = du_1,$$

so erhält man:

$$y = U_1 \int du_n \int du_{n-1} \int du_{n-2} \cdots \int du_3 \int du_2 \int du_1$$

und folglich, wenn man theilweise integrirt:

$$y = U_1 \int du_n \int du_{n-1} \cdots \int du_3 \left(u_2 u_1 - \int u_2 du_1 \right)$$

$$= U_1 \int du_n \int du_{n-1} \cdots \int du_4 \left[u_3 \left(u_2 u_1 - \int u_2 du_2 \right) - \int du_3 \left(u_2 u_1 - \int u_2 du_2 \right) \right]$$

u. s. f..

§. 229. **Vierte Eigenschaft.** Wenn man m particuläre Integrale der linearen Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung ohne zweiten Theil kennt, so kann man die Integration derselben Gleichung mit einem zweiten Theile immer auf die Integration einer neuen linearen Differenzialgleichung von der $(n-m)^{ten}$ Ordnung zurückführen.

Beweis. Es seien $U_1, U_2, \ldots, U_m$ die gegebenen m particulären Integrale. Setzt man $y = U_1 \int v dx$ und substituirt in die Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile, so verschwindet der Coefficient von $\int v dx$, und man erhält für diese Differenzialgleichung die folgende von der $(n-1)^{ten}$ Ordnung:

$$(3) \qquad D_x^{n-1} v + B_1 D_x^{n-2} v + \ldots + B_{n-2} D_x v + B_{n-1} v = X,$$

und aus den m particulären Integralen $U_1, U_2, \ldots U_m$ ergeben sich, wie wir gezeigt haben, $m-1$ particuläre Integrale:

$$V_1 = D_x \frac{U_2}{U_1}, \quad V_2 = D_x \frac{U_3}{U_1}, \ldots, \quad V_{m-1} = D_x \frac{U_m}{U_1}$$

der Gleichung (3) ohne zweiten Theil, nämlich:

$$D_x^{n-1} v + B_1 D_x^{n-2} v + \ldots + B_{n-2} D_x v + B_{n-1} v = 0.$$

Setzt man ferner in der Gleichung (3), $v = V_1 \int w dx$, so wird sie auf eine neue Differenzialgleichung von der $(n-2)^{ten}$ Ordnung:

$$(4) \qquad D_x^{n-2} w + C_1 D_x^{n-3} w + \ldots + C_{n-3} D_x w + C_{n-2} w = X$$

zurückgeführt, und man kennt $m-2$ Integrale:

$$W_1 = D_x \frac{V_2}{V_1}, \ldots, \quad W_{m-2} = D_x \frac{V_{m-1}}{V_1}$$

der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil:

$$D_x^{n-2} w + C_1 D_x^{n-3} w + \ldots + C_{n-3} D_x w + C_{n-2} w = 0,$$

welche man vermittelst des Integrales W_1, oder U_2, welches zur Berechnung von W_1 dient, auf eine Differenzialgleichung der $(n-3)^{ten}$ Ordnung zurückführt. Schließt man so fort, so sieht man, daß man die Ordnungszahl der gegebenen Differenzialgleichung durch jedes der gegebenen particulären Integrale $U_1, U_2, \ldots, U_m$ um eine Einheit vermindern, und folglich die gegebene lineare Differenzialgleichung von der n^{ten} Ordnung auf eine von der $(n-m)^{ten}$ Ordnung zurückführen kann.

§. 230. **Fünfte Eigenschaft.** Wenn $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, n particuläre Integrale der linearen Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung ohne zweiten Theil und

y_1 ein particuläres Integral derselben Gleichung mit einem zweiten Theile sind, so werden die allgemeinen Integrale dieser Differenzialgleichungen mit, oder ohne zweiten Theil resp. ausgedrückt durch:

$$y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3 + \ldots + C_nY_n + y_1,$$
$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3 + \ldots + C_nY_n.$$

Beweis. Denn in der gemachten Voraussetzung ist klar, daß die Werthe y, Y resp. der Gleichung mit, oder ohne zweiten Theil genügen, und außerdem enthalten diese Werthe n willkührliche Constanten; folglich sind sie die gesuchten allgemeinen Integrale. Jedoch ist zu bemerken, daß y, Y nur dann allgemeine Integrale sind, wenn die n Constanten wirklich verschieden sind und man dieselben so annehmen kann, daß die Function y und ihre $n-1$ ersten Ableitungen für $x=x_0$ beliebige gegebene Werthe y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$ annehmen. Wenn eins der particulären Integrale mit einem, oder mit mehreren der übrigen durch eine völlig bestimmte Gleichung verbunden wäre und man z. B. hätte:

$$Y_3 = aY_1 + bY_2,$$

so würde die Summe:

$$Y = (C_1 + aC_3)y_1 + (C_2 + bC_3)y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

oder:

$$Y = C'Y_1 + C''Y_2 + C_4Y_4 + \ldots + C_nY_n$$

und enthielte nur noch $n-1$ willkührliche Constanten.

§. 231. Libri hat die zwischen den linearen Differenzialgleichungen und den gewöhnlichen algebraischen Gleichungen stattfindende merkwürdige Analogie, welche schon durch den Lagrange'schen Lehrsatz sich herausstellt, indem dieser Lehrsatz zeigt, daß man die Ordnungszahl einer linearen Differenzialgleichung um so viele Einheiten erniedrigen kann, als particuläre Integrale gegeben sind, so wie man den Grad einer algebraischen Gleichung um eben so viele Einheiten erniedrigen kann, als man Wurzeln derselben kennt, mit einigem Glücke verfolgt, und die folgenden Sätze werden diese Analogie in ein helleres Licht setzen.

Sechste Eigenschaft. Eine Differenzialgleichung, welche wenigstens in ihren beiden ersten Gliedern linear ist, läßt sich auf eine andere Gleichung derselben Art ohne zweites Glied zurückführen.

Beweis. Wenn man in der linearen Differenzialgleichung:

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = X$$

$y = uv$ setzt, so erhält man eine neue Differenzialgleichung der $n$ten Ordnung, worin $nD_x v + A_1 v$ der Coefficient von $D_x^{n-1} u$ ist, und da man der Differenzialgleichung der ersten Ordnung:

$$nD_x v + A_1 v = 0$$

immer genügen kann; so kann man v auch immer so annehmen, daß das zweite Glied der gegebenen Differenzialgleichung verschwindet.

Allgemein, wenn eine Differenzialgleichung gegeben ist, deren $m+1$ erste Glieder linear sind, so kann man das $(m+1)^{te}$ Glied immer vermittelst einer linearen Differenzialgleichung der m^{ten} Ordnung verschwinden machen.

§. 232. Siebente Eigenschaft: Wenn zwischen zwei particulären Integralen der linearen Differenzialgleichung ohne zweiten Theil eine bekannte Relation stattfindet, so kann man die Ordnungszahl der Differenzialgleichung erniedrigen.

Beweis. Wir wollen annehmen, daß die beiden particulären Integrale y_1, y_2 durch die Relation $y_2 = \varphi(y_1)$ miteinander verbunden seien; so kann man in der gegebenen Gleichung $\varphi(y)$ für y setzen, und die durch diese Substitution erhaltene Gleichung dient zur Elimination der Ableitung der n^{ten} Ordnung, so daß man nur eine lineare Differenzialgleichung der $(n-1)^{ten}$ Ordnung zum Resultate erhält. Wenn man z. B. auf irgend eine Weise wüßte, daß die beiden particulären Integrale y_1, y_2 der Differenzialgleichung $D_x^2 y - y = 0$ durch die Gleichung $y_2 = \frac{1}{y_1}$ mit einander verbunden sind, so setzt man $\frac{1}{y}$ für y in diese Differenzialgleichung, wodurch man erhält:

$$D_x^2 y - \frac{2}{y} D_x y^2 + y = 0$$

und wenn man $D_x^2 y$ zwischen diesen beiden Gleichungen eliminirt; so findet man:

$$D_x y^2 = y^2, \quad D_x y = \pm y, \quad y = Ce^{\pm x}.$$

Die beiden particulären Integrale sind:

$$y_1 = C_1 e^x, \quad y_2 = C_2 e^{-x}$$

und das allgemeine Integral ist:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

§. 233. Achte Eigenschaft: Wenn man die particulären Integrale einer linearen Differenzialgleichung ohne zweiten Theil kennt, so kann man die Coefficienten dieser Gleichung immer durch ähnliche Operationen finden, wie die, welche zur Bildung der Coefficienten algebraischer Gleichungen als symetrische Functionen ihrer Wurzeln dienen.

Beweis. Es seien $y_1, y_2, \ldots y_n$ die n particulären Integrale der linearen Differenzialgleichung:

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n = 0$$

und y sei ihr allgemeines Integral, so hat man:

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n,$$

und wenn man $y = y_1 \int z dx$ setzt; so kommt:

$$y_1 D_x^{n-1} z + (n D_x y_1 + A_1 y_1) D_x^{n-2} y + \ldots$$
$$+ (D_x^n y_1 + A_1 D_x^{n-1} y_1 + \ldots + A_n y_1) \int z dx = 0,$$

oder wenn man bemerkt, daß der Coefficient von $\int z dx$ Null ist, und mit y_1 dividirt:

$$D_x^{n-1} z + B_1 D_x^{n-2} z + \ldots + B_{n-1} z = 0$$

und:

$$n D_x y_1 + A_1 y_1 = B_1 y_1, \quad A_1 = -\frac{n}{y_1} D_x y_1 + B_1.$$

Ferner sind die Größen:

$$D_x \frac{y_2}{y_1}, \quad D_x \frac{y_3}{y_1}, \ldots\ldots \quad D_x \frac{y_n}{y_1}$$

die $n-1$ particulären Integrale der Gleichung mit z, und wenn man mit dieser Gleichung dieselbe Operation vornimmt, welche wir mit der gegebenen Gleichung vorgenommen haben; so findet man:

$$B_1 = \frac{-(n-1) D_x . D_x \frac{y_2}{y_1}}{D_x \frac{y_2}{y_1}} + C_1.$$

Nun kann man aber $C_1, D_1, \ldots\ldots$ berechnen, wie man A_1, B_1 berechnet hat, und da man nach n Transformationen nothwendig auf eine Gleichung kommt, worin der Coefficient des zweiten Gliedes $= 0$ ist, weil die Ordnungszahl der Differenzialgleichung bei jeder Operation um eine Einheit abnimmt; so ist die Reihe der Glieder $A_1, B_1, C_1 \ldots\ldots$ eine begrenzte, und man erhält, wenn man substituirt:

$$A_1 = -\frac{n}{y_1} D_x y_1 - \frac{(n-1) D_x^2 \frac{y_2}{y_1}}{D_x \frac{y_2}{y_1}} - \frac{(n-2) D_x^2 \frac{y_3}{y_1}}{D_x \frac{y_3}{y_1}} - \ldots$$

Um dieſe Formel auf ein Beiſpiel anzuwenden, wollen wir annehmen, daß die Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y - m^2 y = 0$$

gegeben ſei, ſo ſind die particulären Integrale derſelben:

$$y_1 = C_1 e^{mx}, \quad y_2 = C_2 e^{-mx}$$

und außerdem iſt $n = 2$. Subſtituirt man dieſe Werthe in die vorhergehende Formel und bleibt bei den beiden erſten Gliedern ſtehen, ſo kommt:

$$-A_1 = \frac{2 D_x y_1}{y_1} + \frac{D_x^2 \frac{y_2}{y_1}}{D_x \frac{y_2}{y_1}} = 2m + \frac{4m^2}{-2m} = 2m - 2m = 0.$$

Es iſt folglich $A_1 = 0$, wie es auch der Fall ſein muß, weil die gegebene Gleichung kein zweites Glied hat.

Durch ein ähnliches Verfahren könnte man alle Coefficienten $A_2, A_3, \ldots, A_n$ als Functionen der particulären Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ erhalten.

Allgemein, wenn n Functionen $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$ von x gegeben ſind, ſo kann man die Coefficienten der linearen Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung beſtimmen, welche dieſe n Functionen zu particulären Integralen hat, und es giebt nur eine einzige lineare Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung, welche dieſer Bedingung genügt, ſowie es nur eine algebraiſche Gleichung von einem beſtimmten Grade giebt, welche n gegebene Wurzeln hat.

Man kann die Werthe von $A_2, A_3, \ldots A_n$ leichter auf folgende Weiſe beſtimmen: Wenn man dieſe $n-1$ Größen ſucceſſive zwiſchen den n Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&D_x^n y_1 + A_1 D_x^{n-1} y_1 + \ldots + A_n y_1 = 0,\\
&D_x^n y_2 + A_1 D_x^{n-1} y_2 + \ldots + A_n y_2 = 0,\\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&D_x^n y_n + A_1 D_x^{n-1} y_n + \ldots + A_n y_n = 0
\end{aligned}$$

eliminirt, indem man die Ableitungen $D_x^n y_1, D_x^{n-1} y_1, \ldots$ als bekannte Coefficienten betrachtet; ſo erhält man den bereits oben angegebenen Werth von A_1. Um nun daraus den Werth von A_2 abzuleiten, braucht man offenbar in dem Ausdrucke von A_1 nur $D_x^{n-1} y_1$ in $D_x^{n-2} y_1$, $D_x^{n-1} y_2$ in $D_x^{n-2} y_2, \ldots$ zu verwandeln, und umgekehrt, ohne eins der Glieder zu ändern, welche andere Ableitungen enthalten, und durch ähnliche Vertauſchungen erhielte man die Werthe von $A_3, A_4, \ldots$

Libri bemerkt, daß die Größen $y_1, y_2, \ldots y_n$ eine beſondere Art ſymetriſcher Functionen bilden, welche man nicht blos

beliebig vertauschen kann, wie die Wurzeln der algebraischen Gleichungen bei der Bildung der Coefficienten A_1, A_2, ...; sondern daß man auch für irgend eine dieser Größen, z. B. für y_2 die Summe, oder Differenz einer beliebigen Anzahl derselben setzen kann, ohne daß der Werth der Coefficienten dadurch geändert wird. Wenn man z. B. für die Differenzialgleichung $D_x^2 y = m^2 y$ statt $y_1 = C_2 e^{mx}$, $y_2 = C_2 e^{-mx}$ setzte:

$$y_1 = C_1 e^{mx} - e^{mx}, \quad y_2 = C_2 e^{-mx},$$

so fände man doch wieder $A_1 = 0$, und diese neue Art von Functionen scheint die Aufmerksamkeit der Geometer zu verdienen.

§. 234. Libri hat in Beziehung auf die linearen Differenzialgleichungen noch folgenden Lehrsatz angeführt: Wenn eine lineare Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung mit zwei Veränderlichen gegeben ist, und man kennt die Coefficienten einer andern linearen Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung zwischen denselben Veränderlichen, welche mit der ersten gleichzeitig stattfinden muß; so kann man vermittelst der Coefficienten der beiden Gleichungen ohne alle Integration eine dritte lineare Differenzialgleichung von der $(n-m)^{ten}$ Ordnung und von solcher Beschaffenheit bilden, daß die Gleichung der n^{ten} Ordnung in zwei andere zerlegt wird, welche resp. von der m^{ten} und von der $(n-m)^{ten}$ Ordnung sind, und vermittelst welcher man die gegebene Differenzialgleichung integriren kann, so daß es also hinreichend ist, zwei gleichzeitige Gleichungen zu haben, um die Gleichung von der höchsten Ordnung auf zwei andere einfachere Gleichungen zurückführen zu können. Diese Reduction entspricht der Zerlegbarkeit einer algebraischen Gleichung in zwei andere, wenn man weiß, daß sie ein Polynom von einer gegebenen Form zum Factor hat.

Liouville hat zuerst den Beweis dieses Fundamentallehrsatzes bekannt gemacht, und wir wollen denselben hier so mittheilen, wie er in den Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences steht. Es sei:

$$D_x^{m+n} y + A_1 D_x^{m+n-1} y + A_2 D_x^{m+n-2} y + \ldots = 0$$

eine lineare Differenzialgleichung der $(m+n)^{ten}$ Ordnung und:

$$D_x^m z + B_1 D_x^{m-1} z + B_2 D_x^{m-2} z + \ldots = 0$$

eine andere lineare Differenzialgleichung von der m^{ten} Ordnung, deren Integrale sämmtlich auch Integrale der ersten Differenzialgleichung sind; so enthält der allgemeine Werth von z offenbar m Constanten und der von y muß deren $m+n$ enthalten. Der Werth von y ist also von der Form:

$$y = z + C_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n,$$

wo C_1, C_2, ..., C_n willkührliche Constanten sind. Setzt man nun:

$$u = D_x^m y + B_1 D_x^{m-1} y + B_2 D_x^{m-2} y + \ldots$$

und substituirt für y seinen Werth in den zweiten Theil dieser Gleichung, so verschwindet z wegen der Gleichung:

$$D_x^m z + B_1 D_x^{m-1} z + B_2 D_x^{m-2} z + \ldots = 0;$$

das Resultat der Substitution ist folglich eine lineare Function der Constanten C_1, C_2, ... C_n und u genügt einer gewissen linearen Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung, worin die Constanten nicht vorkommen. Stellt man diese Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung durch:

$$D_x^n u + a_1 D_x^{n-1} u + a_2 D_x^{n-2} u + \ldots = 0$$

dar, so kann man die Coefficienten a_1, a_2, ... leicht bestimmen. Denn differenzirt man den Werth von u mehrere Male hintereinander, so erhält man successive die Werthe von:

$$D_x u,\ D_x^2 u, \ldots,\ D_x^{n-1} u,\ D_x^n u,$$

welche von der Form sind:

$$\begin{aligned}
D_x u &= D_x^{m+1} y + b_1 D_x^m y + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
D_x^{n-1} u &= D_x^{m+n-1} y + h_1 D_x^{m+n-2} y + \ldots, \\
D_x^n u &= D_x^{m+n} y + l_1 D_x^{m+n-1} y + \ldots.
\end{aligned}$$

Setzt man alle diese Werthe in die Gleichung:

$$D_x^n u + a_1 D_x^{n-1} u + \ldots = 0,$$

so verwandelt sie sich in folgende:

$$\left.\begin{array}{l} D_x^{m+n} y + l_1 \\ \quad + a_1 \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} D_x^{m+n-1} y + l_2 h_1 \\ \quad + a_1 h_1 \\ \quad + a_2 \end{array}\right| D_x^{m+n-2} + \ldots = 0,$$

und wenn man diese letzte Gleichung mit der gegebenen:

$$D_x^{m+n} y + A_1 D_x^{m+n-1} y + \ldots = 0$$

vergleicht; so erhält man:

$$l_1 + a_1 = A_1,\quad l_2 + a_1 h_1 + a_2 = A_2 \ldots.$$

Man hat also $n + m$ Gleichungen, wovon die n ersten successive und ohne alle Integration die Werthe von a_1, a_2, ... a_n geben.

Die folgenden führen auf Bedingungsgleichungen, welche erfüllt werden müſſen, damit die Gleichung mit y von der $(n+m)^{\text{ten}}$ Ordnung erfüllt wird, wenn man $y=z$ ſetzt, oder damit die Integrale der Differenzialgleichung von der n^{ten} Ordnung zugleich Integrale der Differenzialgleichung von der $(n+m)^{\text{ten}}$ Ordnung ſind. Wenn dieſe Bedingungsgleichungen erfüllt werden, ſo iſt die Integration der Differenzialgleichung von der $(n+m)^{\text{ten}}$ Ordnung auf die der beiden Differenzialgleichungen:

$$u=D_x^m y+B_1 D_x^{m-1} y+\ldots,\quad D_x^n u+a_1 D_x^{n-1} u+\ldots=0$$

zurückgeführt, welche reſp. von der m^{ten} und von der n^{ten} Ordnung ſind. Ferner iſt nach der Bildungsart der Werthe der Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ einleuchtend, daß ſie nur von den n erſten Coefficienten der beiden gegebenen Gleichungen abhängen können, wodurch der Beweis des Libri'ſchen Lehrſatzes vervollſtändigt wird. Hieraus ergiebt ſich eine bemerkenswerthe Vereinfachung; denn wenn in den beiden gleichzeitig ſtattfindenden Differenzialgleichungen die n erſten Coefficienten conſtant ſind, ſo hat die Differenzialgleichung $D_x^n u+\ldots.=0$ auch lauter conſtante Coefficienten und kann, wie wir ſpäter ſehen werden, unmitelbar integrirt werden, wodurch die Differenzialgleichung der $(m+n)^{\text{ten}}$ Ordnung auf eine Differenzialgleichung der m^{ten} Ordnung zurückgeführt wird.

§. 235. Um noch ein Beiſpiel von der Erniedrigung der Ordnung der linearen Differenzialgleichungen zu geben, wollen wir annehmen, daß die beiden gleichzeitig ſtattfindenden linearen Differenzialgleichungen:

$$D_x^2 y+A_1 D_x y+A_2 y=A_3 z,$$
$$D_x^2 z+A_1 D_x z+A_2 z=A_3 y$$

gegeben ſeien; ſo iſt klar, daß man, wenn man z zwiſchen dieſen beiden Gleichungen eliminirt, eine lineare Differenzialgleichung der vierten Ordnung von der Form:

$$D_x^4 y+a_1 D_x^3 y+a_2 D_x^2 y+a_3 D_x y+a_4=0$$

erhält, und wenn man y zwiſchen denſelben Gleichungen eliminirte; ſo erhielte man auch genau dieſelbe Gleichung mit z:

$$D_x^4 z+a_1 D_x^3 z+a_2 D_x^2 z+a_3 D_x z+a_4=0,$$

woraus folgt, daß die vier particulären Integrale, deren Summe den vollſtändigen Werth von y bildet, dieſelben ſind, als die, woraus der Werth von z beſteht. Aber wenn man in den beiden gegebenen Gleichungen $z=y$ ſetzt, ſo erhält man die beiden Gleichungen:

$$D_x^2 y + A_2 D_x y + (A_2 - A_3) y = 0,$$
$$D_x^2 z + A_2 D_x z + (A_2 - A_3) z = 0,$$

welche zwei der vier gesuchten particulären Integrale geben, und wenn man die beiden particulären Integrale der ersten dieser Gleichungen gefunden hat; so kann man sich derselben bedienen, um die Differenzialgleichung mit y von der vierten Ordnung auf eine Differenzialgleichung der zweiten Ordnung zurückzuführen, deren particuläre Integrale in einem durch die Gleichung:

$$D_x^2 z + A_1 D_x z + A_2 z = A_3 z$$

ausgedrückten Verhältnisse zu einander stehen, so daß man diese beiden Integrale vermittelst einer linearen Differenzialgleichung der ersten Ordnung direct finden kann.

Sieben und dreißigste Vorlesung.

Integration der linearen Differenzialgleichung der $n$ten Ordnung mit constanten Coefficienten und mit, oder ohne ein letztes veränderliches Glied.

---

§. 236. Wir wollen annehmen, daß in der Differenzialgleichung:

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = X$$

die Coefficienten A_1, A_2, A_3, ... A_n constante Zahlen sind, während X eine beliebige Function der unabhängigen Veränderlichen x bleibt, und unter dieser Voraussetzung das allgemeine Integral dieser Differenzialgleichung suchen. Diesen Zweck kann man durch verschiedene Methoden erreichen, welche wir successive angeben wollen.

Erste Methode. — Reduction der linearen Differenzialgleichung der $n$ten Ordnung auf ein System von n linearen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung.

Wenn man setzt:

$$D_x y = y', \quad D_x y' = y'', \ldots,$$
$$D_x y^{(n-3)} = y^{(n-2)}, \quad D_x y^{(n-2)} = y^{(n-1)},$$

so verwandelt sich die gegebene Differenzialgleichung in folgende:

$$D_x y^{(n-1)} + A_1 D_x y^{(n-2)} + A_2 D_x y^{(n-3)} + \ldots + A_{n-1} y' + A_n y = X,$$

und man hat n gleichzeitige lineare Differenzialgleichungen der ersten Ordnung zu integriren. Multiplicirt man nun die $n-1$ ersten dieser Gleichungen mit unbestimmten Coefficienten $S^{(n-1)}$, $S^{(n-2)}$, ..., S'', S' und addirt die Producte zu der letzten Gleichung; so erhält man:

$$D_x[y^{(n-1)} + S' y^{(n-2)} + S'' y^{(n-3)} + \ldots + S^{(n-2)} y' + S^{(n-1)} y] + (A_1 - S') y^{(n-1)} + (A_2 - S'') y^{(n-2)} + \ldots + [A_{n-1} - S^{(n-1)}] y' + A_n y = X,$$

oder wenn man ſetzt:

$$t = y^{(n-1)} + \mathfrak{S}' y^{(n-2)} + \mathfrak{S}'' y^{(n-3)} + \ldots + \mathfrak{S}^{(n-2)} y' + \mathfrak{S}^{(n-1)} y,$$

$$A_1 - \mathfrak{S}' = \mathfrak{S}, \quad A_2 - \mathfrak{S}'' = \mathfrak{S}\mathfrak{S}', \quad A_3 - \mathfrak{S}''' = \mathfrak{S}\mathfrak{S}'', \ldots,$$

$$A_{n-1} - \mathfrak{S}^{(n-1)} = \mathfrak{S}\mathfrak{S}^{(n-2)}, \quad A_n = \mathfrak{S}\mathfrak{S}^{(n-1)},$$

ſo iſt: $$D_x t + \mathfrak{S} t = X, \quad dt + \mathfrak{S} t dx = X dx.$$

Aus dieſer letzten Gleichung ergiebt ſich durch Integration:

$$t = e^{-\int \mathfrak{S} x} (C + \int X e^{\int \mathfrak{S} x} dx)$$

oder:

$$y^{(n-1)} + \mathfrak{S}' y^{(n-2)} + \ldots + \mathfrak{S}^{(n-2)} y' + \mathfrak{S}^{(n-1)} y = e^{-\int \mathfrak{S} x} (C + \int X e^{\int \mathfrak{S} x} dx).$$

Setzt man ferner $\mathfrak{S} = -r$, ſo geben die Gleichungen, welche $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, $\mathfrak{S}'''$, ... $\mathfrak{S}^{(n-2)}$, $\mathfrak{S}^{(n-1)}$ geben, durch ſucceſſive Subſtitutionen:

$$\mathfrak{S}' = A_1 + r, \quad \mathfrak{S}'' = A_2 + A_1 r + r^2, \ldots,$$

$$\mathfrak{S}_{n-1} = A_{n-2} + A_{n-3} r + A_{n-4} r^2 + \ldots + A_1 r^{n-2} + r^{n-1},$$

$$0 = A_n + A_{n-1} r + A_{n-2} r^2 + \ldots + A_1 r^{n-1} + r^n.$$

Dieſe letzte Gleichung, welche ſich aus der gegebenen Differenzialgleichung ergiebt, wenn man für die Ableitungen:

$$D_x^n y, \ D_x^{n-1} y, \ldots, \ D_x^2 y, \ D_x y$$

reſp. r^n, r^{n-1}, ..., r^2, r, dann $y = D_x^0 y$, $r^0 = 1$ und $X = 0$ ſetzt, giebt n Werthe für r, und folglich n Syſteme von Werthen für $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, ..., $\mathfrak{S}^{(n-1)}$. Aus dieſen n Werthſyſtemen ergeben ſich n Integrale der Differenzialgleichung:

$$dt + \mathfrak{S} t dx = X dx.$$

Bezeichnet man die n Werthe von r mit r_1, r_2, r_3, ... r_n und die entſprechenden n Werthſyſteme der Coefficienten $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$, $\mathfrak{S}^{(n-1)}$ reſp. mit:

$$\mathfrak{S}'_1, \ \mathfrak{S}''_1, \ldots, \ \mathfrak{S}_1^{(n-1)}, \quad \mathfrak{S}'_2, \ \mathfrak{S}''_2, \ldots, \ \mathfrak{S}_2^{(n-1)}, \ldots, \quad \mathfrak{S}'_n, \ \mathfrak{S}''_n, \ldots, \ \mathfrak{S}_n^{(n-1)};$$

ſo ſind die n Integrale folgende:

$$y^{(n-1)} + \mathfrak{S}'_1 y^{(n-2)} + \ldots + \mathfrak{S}_1^{(n-2)} y' + \mathfrak{S}_1^{(n-1)} y = e^{r_1 x} (C' + \int X e^{-r_1 x} dx),$$

$$y^{(n-1)} + \mathfrak{S}'_2 y^{(n-2)} + \ldots + \mathfrak{S}_2^{(n-2)} y' + \mathfrak{S}_2^{(n-1)} y = e^{r_2 x} (C'' + \int X e^{-r_2 x} dx),$$

. . . . . .

. . . . . .

$$y^{(n-1)} + \mathfrak{S}'_n y^{(n-2)} + \ldots + \mathfrak{S}_n^{(n-2)} y' + \mathfrak{S}_n^{(n-1)} y$$
$$= e^{r_n x}(C^{(n)} + \int X e^{-r_n x} dx).$$

Der aus diesen n Gleichungen abgeleitete Werth von y enthält n willkührliche Constanten und ist folglich das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung.
Die bereits mehrere Male in Erinnerung gebrachte Formel:

$$x = \frac{\Sigma \pm k_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1}}{\Sigma \pm a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1}},$$

welche den Werth irgend einer der durch ein System von n Gleichungen des ersten Grades bestimmten n Unbekannten giebt, zeigt unmittelbar, daß der Werth von y oder das gesuchte Integral aus n Gliedern besteht, welche den zweiten Theilen der Gleichungen des ersten Grades proportional sind, und folglich von folgender Form ist:

$$y = \lambda_1 e^{r_1 x}(C' + \int X e^{-r_1 x} dx) + \lambda_2 e^{r_2 x}(C'' + \int X e^{-r_2 x} dx) + \ldots$$
$$+ \lambda_n e^{r_n x}(C^{(n)} + \int X e^{-r_n x} dx),$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, Constanten bezeichnen, welche Functionen der Coefficienten $\mathfrak{S}'_1, \mathfrak{S}''_1, \ldots \mathfrak{S}_1^{(n-1)}$ sind.

Da die Gleichungen, welche $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ geben, vom ersten Grade sind, so müssen die Werthe von $y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ ganz von derselben Form sein, wie der von y, und schon diese eine Bemerkung giebt ein leichtes Mittel zur Berechnung der Coefficienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ an die Hand.

Größerer Einfachheit wegen wollen wir bemerken, daß sich der Werth von y auf folgende Weise ausdrücken läßt:

$$y = \Sigma \lambda e^{rx}(C + \int X e^{-rx} dx),$$

wo das Zeichen Σ andeutet, daß man die Summe der den n Wurzeln der Gleichung mit r entsprechenden n Glieder bilden soll. Differenzirt man nun diese letzte Gleichung, so findet man:

$$y' = \Sigma \lambda r e^{rx}(C + \int X e^{-rx} dx) + \Sigma \lambda X,$$

und da y' von derselben Form sein muß als y; so hat man nothwendig:

$$y' = \Sigma \lambda r e^{rx}(C + \int X e^{-rx} dx),$$
$$\Sigma \lambda X = 0, \text{ und folglich } \Sigma \lambda = 0.$$

Differenzirt man ein zweites Mal, so erhält man:

$$y'' = \Sigma \lambda r^2 e^{rx}(C + \int X e^{-rx} dx) + \Sigma \lambda r X = 0$$

und folglich:

$$y'' = \Sigma\lambda r^2 e^{rx}(C + \int Xe^{-rx}dx),$$
$$\Sigma\lambda r X = 0, \quad \Sigma\lambda r = 0.$$

Fährt man auf dieſe Weiſe fort, ſo findet man ſucceſſive:

$$y''' = \Sigma\lambda r^3 e^{rx}(C + \int Xe^{-rx}dx), \quad \Sigma\lambda r^2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n-1)} = \Sigma\lambda r^{n-1} e^{rx}(C + \int Xe^{-rx}dx), \quad \Sigma\lambda r^{n-2} = 0,$$
$$y^{(n)} = \Sigma\lambda r^n e^{rx}(C + \int Xe^{-rx}dx) + \Sigma\lambda r^{n-1} X.$$

Subſtituirt man nun für y und ſeine Ableitungen ihre Werthe in die gegebene Gleichung, ſo erhält man:

$$\Sigma\lambda e^{rx}(C + \int Xe^{-rx}dx)(A_n + A_{n-1}r + A_{n-2}r^2 + \ldots + A_1 r^{n-1} + r^n) + \Sigma\lambda r^{n-1} X = X.$$

Das erſte Glied des erſten Theiles dieſer Gleichung iſt identiſch $= 0$, weil ſich die Summe Σ blos auf die Wurzeln der Gleichung:

$$A_n + A_{n-1}r + A_{n-2}r^2 + \ldots + A_1 r^{n-1} + r^n = 0$$

erſtreckt, woraus folgt:

$$\Sigma\lambda r^{n-1} X = X, \text{ oder } \Sigma\lambda r^{n-1} = 1.$$

Man hat alſo zur Beſtimmung der Coefficienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots. \lambda_n$ die n Gleichungen des erſten Grades:

$$\Sigma\lambda = 0, \quad \Sigma\lambda r = 0, \ldots, \quad \Sigma\lambda r^{n-2} = 0, \quad \Sigma\lambda r^{n-1} = 1,$$

oder vielmehr:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n = 0,$$
$$\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3 + \ldots + \lambda_n r_n = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_1 r_1^{n-2} + \lambda_2 r_2^{n-2} + \lambda_3 r_3^{n-2} + \ldots + \lambda_n r_n^{n-2} = 0,$$
$$\lambda_1 r_1^{n-1} + \lambda_2 r_2^{n-1} + \lambda_3 r_3^{n-1} + \ldots + \lambda_n r_n^{n-1} = 1.$$

Die ſymboliſche Formel:

$$x = \frac{(b-k)(c-k)\ldots(h-k)(c-b)\ldots(h-b)\ldots(h-g)}{(b-a)(c-a)\ldots(h-a)(c-b)\ldots(h-b)\ldots(h-g)},$$

welche den allgemeinen Werth irgend einer der durch n Gleichungen des erſten Grades beſtimmten Unbekannten giebt, reducirt ſich in dem beſondern Falle, wo $k_0 = 0$, $k_1 = 0, \ldots.$, $k_{n-2} = 0$, $k_{n-1} = 1$ iſt, auf:

$$x = \frac{1}{(a-b)(a-c)\ldots(a-h)}$$

und giebt folglich:

$$\lambda_1 = \frac{1}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)\ldots(r_1-r_n)},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)\ldots(r_2-r_n)}, \ldots.$$

Wenn man den ersten Theil der Gleichung:

$$r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0$$

mit $f(r)$ bezeichnet, so hat man:

$$f(r) = (r-r_1)(r-r_2)\ldots(r-r_n),$$

$$\frac{1}{(r-r_2)(r-r_3)\ldots(r-r_n)} = \frac{r-r_1}{f(r)}$$

und wenn man $r = r_1$ setzt, so findet man, indem man bemerkt, daß der wahre Werth des für $r = r_1$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheinenden Bruches $\frac{r-r_1}{f(r)} = \frac{1}{f'(r_1)}$ ist:

$$\lambda_1 = \frac{1}{f'(r_1)}.$$

Ebenso fände man:

$$\lambda_2 = \frac{1}{f'(r_2)}, \ldots, \lambda_n = \frac{1}{f'(r_n)}$$

und der allgemeine Werth von y ist folglich, wenn man $\frac{1}{f'(r)}$ mit in der Constante C begreift:

$$y = \Sigma \frac{1}{f'(r)} e^{rx}(C + \int X e^{-rx}\,dx) = \Sigma C e^{rx} + \Sigma \frac{1}{f'(r)} e^{rx} \int X e^{-rx}\,dx$$

$$= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}$$

$$+ \frac{1}{f'(r_1)} e^{r_1 x} \int X e^{-r_1 x}\,dx + \ldots + \frac{1}{f'(r_n)} e^{r_n x} \int X e^{-r_n x}\,dx.$$

Wenn $X = 0$ ist, d. h. wenn die gegebene Differenzialgleichung keinen zweiten Theil hat, so ist ihr allgemeines Integral:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + \ldots + C_n e^{r_n x} = \Sigma C e^{rx}.$$

Man sieht leicht ein, daß dieser Werth von y, welcher n willkührliche Constanten enthält, wirklich der Differenzialgleichung:

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = 0$$

genügt. Denn der Ausdruck $y = \Sigma C e^{rx}$ giebt:

$$D_x y = \Sigma C r e^{rx},\ D_x^2 y = \Sigma C r^2 e^{rx}, \ldots,\ D_x^n y = \Sigma C r^n e^{rx},$$

und wenn man substituirt; so erhält man:

$$\Sigma Ce^{rx}(r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n) = 0,$$

welcher Gleichung offenbar genügt wird, weil ſich die Summe im erſten Theil derſelben blos auf die Wurzeln der Hülfsgleichung:

$$f(r) = r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0$$

erſtreckt.

§. 237. Zweite Methode. — Succeſſive Erniedrigung der Ordnung der gegebenen Differenzialgleichung.

Wir wollen in der gegebenen Differenzialgleichung:

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = X$$

$y = e^{\alpha_1 x} \int u_1 dx$ ſetzen, wo α_1 eine unbeſtimmte Conſtante und u_1 eine unbeſtimmte Function von x bezeichnet; ſo findet man, wenn man n mal hintereinander differenzirt, oder ſich einer bekannten Formel erinnert:

$$\begin{aligned}
D_x y &= e^{\alpha_1 x}(\alpha_1 \int u_1 dx + u_1),\\
D_x^2 y &= e^{\alpha_1 x}(\alpha_1^2 \int u_1 dx + 2\alpha_1 u_1 + D_x u_1,\\
D_x^3 y &= e^{\alpha_1 x}(\alpha_1^3 \int u_1 dx + 3\alpha_1^2 u_1 + 3\alpha_1 D_x u_1 + D_x^2 u_1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$D_x^n y = e^{\alpha_1 x}\left[\begin{array}{l}\alpha_1 \int u_1 dx + n\alpha_1^{n-1} u_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha_1^{n-2} D_x u_1\\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\alpha_1^{n-3} D_x^2 u_1 + \ldots D_x^{n-1} u_1\end{array}\right].$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in die gegebene Gleichung und dividirt durch $e^{\alpha_1 x}$, ſo findet man:

$$\begin{aligned}
&A_n + A^{n-1}\alpha_1 + A_{n-2}\alpha_1^2 + A_{n-3}\alpha_1^3 + \ldots + A_1 \alpha_1^{n-1} + \alpha_1^n) \int u_1 dx,\\
&+ (A_{n-1} + 2A_{n-2}\alpha_1 + 3A_{n-3}\alpha_1^2 + \ldots + n\alpha_1^{n-1}) u_1\\
&+ \left[A_{n-2} + 3A_{n-3}\alpha_1 + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha_1^{n-2}\right] D_x u_1\\
&+ \left[A_{n-3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\alpha_1^{n-3}\right] D_x^2 u_1 + \ldots\\
&+ D_x^{n-1} u_1 = X e^{-\alpha_1 x}.
\end{aligned}$$

Da nun α_1 eine unbeſtimmte Conſtante iſt, ſo kann man dieſelbe ſo annehmen, daß der Coefficient von $\int u_1 dx$ verſchwindet, zu welchem Zwecke es ſchon genügt, wenn α_1 eine Wurzel der Gleichung:

$$f(r) = r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0$$

ist. Zur Bestimmung von u_1 hat man alsdann die lineare Differenzialgleichung der $(n-1)^{ten}$ Ordnung:

$$D_x^{n-1} u_1 + B_2 D_x^{n-2} u_1 + \ldots + B_{n-1} D_x u_1 + B_n u_1 = X e^{-\alpha_1 x},$$

worin:

$$B_n = A_{n-1} + 2A_{n-2}\alpha_1 + 3A_{n-3}\alpha_1^2 + \ldots + n\alpha_1^{n-1},$$

$$B_{n-1} = A_{n-2} + 3A_{n-3}\alpha_1 + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^{n-2},$$

. . . . . .

ist.

Setzt man nun $u = e^{\alpha_2 x} \int u_2 dx$ und verfährt wieder auf dieselbe Weise, so findet man, wenn man für α_2 eine der Wurzeln der Gleichung:

$$r^{n-1} + B_2 r^{n-2} + \ldots + B_{n-1} r + B_n = 0$$

nimmt, daß die Bestimmung von u_2 von der linearen Differenzialgleichung der $(n-2)^{ten}$ Ordnung:

$$D_x^{n-2} u_2 + C_2 D_x^{n-3} u_2 + \ldots + C_{n-1} D_x u_2 + C_n u_2 = X e^{-(\alpha_1+\alpha_2)x}$$

abhängt, worin der Kürze wegen:

$$C_n = B_{n-1} + 2B_{n-2}\alpha_2 + 3B_{n-3}\alpha_2^2 + \ldots + (n-1)\alpha_2^{n-2},$$

$$C_{n-1} = B_{n-2} + 3B_{n-3}\alpha_2 + \ldots$$

. . . . . .

gesetzt ist. Setzt man ferner:

$$u_2 = e^{\alpha_2 x} \int u_3 dx \ldots$$

und fährt auf diese Weise fort, so kann man die Glieder der gegebenen Differenzialgleichung successive verschwinden machen, wodurch ihre Ordnung bei jeder Operation um eine Einheit erniedrigt wird, so daß man zuletzt, wenn man $u_{n-1} = e^{\alpha_n x} \int u_n dx$ setzt, auf die Gleichung:

$$u_n = X e^{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)x}$$

kommt. Ehe wir zu dem Werthe von y zurückgehen, wollen wir bemerken, daß die Wurzeln α_2, α_3, α_4, ... α_n resp. den Differenzen:

$$r_2 - r_1,\ r_3 - r_2,\ r_4 - r_3, \ldots,\ r_n - r_{n-1}$$

der n Wurzeln der Hülfsgleichung:

$$r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0$$

gleich sind. Denn multiplicirt man den Ausdruck:

$$\alpha_2^{n-1} + B_2 \alpha_2^{n-2} + \ldots + B_{n-1}\alpha_2 + B_n$$

mit α_2, addirt das Product zu der Gleichung:

$$\alpha^n + A_1\alpha_1^{n-1} + A_2\alpha_1^{n-2} + \ldots + A_{n-1}\alpha_1 + A_n = 0$$

und substituirt für die Coefficienten B_2, B_3, ..., B_{n-1} ihre Werthe; so erhält man:

$$\left[\alpha_1^n + n\alpha_1^{n-1}\alpha_2 + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha_1^{n-2}\alpha_2^2 + \ldots\alpha_2^n\right] + \ldots$$
$$+ A_{n-3}(\alpha_1^3 + 3\alpha_1^2\alpha_2 + 3\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2^3)$$
$$+ A_{n-2}(\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + A_{n-1}(\alpha_1 + \alpha_2) + A_n = 0$$

oder:

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^n + A_1(\alpha_1 + \alpha_2)^{n-1} + \ldots$$
$$+ A_{n-2}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + A_{n-1}(\alpha_1 + \alpha_2) + A_n = 0.$$

Diese letzte Gleichung zeigt, daß $\alpha_1 + \alpha_2$, sowohl als α_1 eine Wurzel der Gleichung $f(r) = 0$ ist. Bezeichnet also r_2 eine zweite Wurzel dieser letzten Gleichung, so hat man:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = r_1 + \alpha_2 = r_2, \quad \alpha_2 = r_2 - r_1.$$

Allgemein, wenn man die n Wurzeln der Gleichung $f(r) = 0$ mit r_1, r_2, ... r_n und mit α_2, α'_2, ... $\alpha_2^{(n-1)}$ die $n-1$ Wurzeln der Gleichung:

$$\alpha_2^{n-1} + B_2\alpha^{n-2} + \ldots + B_{n-1}\alpha_2 + B_n = 0$$

bezeichnet; so hat man:

$$\alpha_2 = r_2 - r_1, \quad \alpha'_2 = r_3 - r_1,$$
$$\alpha''_2 = r_4 - r_1, \ldots, \quad \alpha_2^{(n-1)} = r_n - r_1.$$

Ebenso beweist man, daß die $n-2$ Werthe von α_3 durch die Gleichungen:

$$\alpha_3 = \alpha'_2 - \alpha_2, \quad \alpha'_3 = \alpha''_2 - \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_3^{(n-3)} = \alpha_2^{(n-2)} - \alpha_2$$

gegeben werden, oder wenn man für α_2, α'_2, α''_2, ... ihre vorhin gefundenen Werthe substituirt:

$$\alpha_3 = r_3 - r_2, \quad \alpha'_3 = r_4 - r_2, \ldots, \quad \alpha_3^{(n-3)} = r_n - r_2.$$

Wenn man auf diese Weise fortfährt, so findet man successive die Werthe von α_4, α'_4, ...; α_5, α'_5, ..., α_n, welche durch die Gleichungen:

$$\alpha_4 = r_4 - r_3, \quad \alpha'_4 = r_5 - r_3, \ldots,$$
$$\alpha_5 = r_5 - r_4, \quad \alpha'_5 = r_6 - r_5, \ldots, \quad \alpha_n = r_n - r_{n-1}$$

gegeben werden. Es ist also bewiesen, daß α_2, α_3, α_4, ... α_n

die Differenzen $r_2 - r_1$, $r_3 - r_2$, ..., $r_n - r_{n-1}$ der Wurzeln der Gleichung $f(r) = 0$ sind. Man hat folglich alsdann:

$$y = e^{r_1 x} \int u_1 dx, \quad u_1 = e^{(r_2 - r_1)x} \int u_2 dx, \ldots,$$
$$u_{n-1} = e^{(r_n - r_{n-1})x} \int u_n dx, \quad u_n = \mathrm{X} e^{-r_n x}$$

und wenn man $u_1, u_2, \ldots. u_n$ eliminirt und endlich zu jedem Integrale eine willkührliche Constante hinzufügt; so findet man:

$$\text{(A)} \begin{cases} y e^{-r_1 x} = \int e^{(r_2 - r_1)x} dx \int e^{(r_3 - r_2)x} dx \int \ldots \int e^{(r_n - r_{n-1})x} dx \int \mathrm{X} e^{-r_n x} dx \\ \quad + C' \int e^{(r_2 - r_1)x} dx \int e^{(r_3 - r_2)x} dx \ldots \int e^{(r_n - r_{n-1})x} dx \\ + C'' \int e^{(r_2 - r_1)x} dx \ldots \int e^{(r_{n-1} - r_{n-2})x} dx + \ldots + C^{(n-1)} \int e^{(r_2 - r_1)x} dx + C^{(n)}. \end{cases}$$

Wenn man mit $C_1, C_2, \ldots. C_n$ die Verbindungen der Constanten $C', C'', \ldots, C^{(n)}$ in ihrem ursprünglichen Zustande vor der Entwickelung der zugehörigen vielfachen Integrale mit den Wurzeln $r_1, r_2, \ldots. r_n$ der Hülfsgleichung nach dieser Entwickelung bezeichnet; so findet man, wenn alle Wurzeln ungleich sind:

$$\text{(B)} \begin{cases} y = e^{r_1 x} \int e^{(r_2 - r_1)x} dx \int e^{(r_3 - r_2)x} dx \ldots \int e^{(r_n - r_{n-1})x} dx \int \mathrm{X} e^{-r_n x} dx \\ \quad + C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}. \end{cases}$$

Die Substitution der vielfachen Integrale für die einfachen bietet keine Schwierigkeit dar; denn man braucht zu dem Zwecke nur zu bemerken: 1) daß die für sich klare Gleichung:

$$d_x \left[\frac{e^{(r_m - r_{m-1})x}}{r_m - r_{m-1}} \int \mathrm{X} e^{-r_m x} dx \right] = e^{(r_m - r_{m-1})x} dx \int \mathrm{X} e^{-r_m x} dx + \frac{1}{r_m - r_{m-1}} \mathrm{X} e^{-r_{m-1} x} dx$$

giebt, wenn man beide Theile derselben integrirt:

$$\int e^{(r_m - r_{m-1})x} dx \int \mathrm{X} e^{-r_m x} dx = \frac{e^{(r_m - r_{m-1})x} dx}{r_m - r_{m-1}} \int \mathrm{X} e^{-r_m x} dx - \frac{1}{r_m - r_{m-1}} \int \mathrm{X} e^{-r_{m-1} x} dx$$

und 2) daß man hat:

$$\int e^{(r_\alpha - r_\beta)x} dx \int e^{(r_\gamma - r_\alpha)x} dx = \frac{e^{(r_\gamma - r_\beta)x}}{(r_\gamma - r_\alpha)(r_\gamma - r_\beta)}.$$

Wenn man diese Gleichungen mehrere Male anwendet, und setzt:

$$\lambda_1 = \frac{1}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3) \ldots (r_1 - r_n)}, \ldots,$$
$$\lambda_n = \frac{1}{(r_{n-1} - r_1) \ldots [r_{(n-1)} - r_n]},$$

so findet man den bekannten Werth von y wieder:

$$y = \Sigma \lambda e^{rz}(C + \int X e^{-rz} dx).$$

§. 238. Dritte Methode. Durch den Uebergang von der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil zu der mit einem zweiten Theile.

Wir wollen die beiden Differenzialgleichungen:

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = X,$$
$$D_x^n z + A_1 D_x^{n-1} z + \ldots + A_{n-1} D_x z + A_n z = 0$$

betrachten, und annehmen, daß der zweiten durch die n Werthe:

$$z = z_1, \quad z = z_2, \quad z = z_3, \ldots, \quad z = z_n$$

genügt wird; so geschieht derselben auch durch die Werthe:

$$z = C_1 z_1, \quad z = C_2 z_2, \quad z = C_3 z_3, \ldots, \quad z = C_n z_n,$$

wo $C_1, C_2, \ldots C_n$ willkührliche Constanten sind, und durch die Summe:

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + \ldots + C_n z_n,$$

welche das allgemeine Integral derselben ist, Genüge.

Nun kann man aber die Functionen $u_1, u_2, \ldots u_n$ von x immer so bestimmen, daß die Summe:

$$y = u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 + \ldots + u_n z_n = \Sigma u z$$

der obigen Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile genügt Denn wenn man ein erstes Mal differenzirt, so hat man:

$$D_x y = \Sigma z D_x u + \Sigma u D_x z$$

oder:

$$D_x y = \Sigma u D_x z,$$

wenn man setzt:

$$\Sigma z D_x u = 0.$$

Differenzirt man ein zweites Mal, so erhält man:

$$D_x^2 y = \Sigma u D_x^2 z + \Sigma D_x z D_x u,$$

oder blos:

$$D_x^2 y = \Sigma u D_x^2 z,$$

wenn man setzt:

$$\Sigma D_x z D_x u = 0.$$

Setzt man also successive:

$$\Sigma D_x^2 z D_x u = 0, \quad \Sigma D_x^3 z D_x u = 0, \ldots, \quad \Sigma D_x^{n-2} z D_x u = 0,$$

so behalten die durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
D_x y &= \Sigma u D_x z = u_1 D_x z_1 + u_2 D_x z_2 + \ldots + u_n D_x z_n,\\
D_x^2 y &= \Sigma u D_x^2 z = u_1 D_x^2 z_1 + u_2 D_x^2 z_2 + \ldots + u_n D_x^2 z_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
D_x^{n-1} y &= \Sigma u D_x^{n-1} z = u_1 D_x^{n-1} z_1 + u_2 D_x^{n-1} z_2 + \ldots + u_n D_x^{n-1} z_n
\end{aligned}$$

gegebenen Ableitungen von y bis zu der von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung inclusive dieselbe Form, als in dem Falle, wo $u_1, u_2, \ldots u_n$ Constanten waren. Differenzirt man endlich ein letztes Mal, so hat man:

$$D_x^n y = \Sigma u D_x^n z + \Sigma D_x u D_x^{n-1} z,$$

und wenn man nun alle diese Werthe in die Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile substituirt; so erhält man:

$$\Sigma u\,(D_x^n z + A_1 D_x^{n-1} z + A_2 D_x^{n-2} z + \ldots + A_{n-1} D_x z + A_n) + \Sigma D_x u D_x^{n-1} z = X.$$

Nun verschwindet aber das erste Glied im ersten Theile dieser Gleichung; denn die mit Σ bezeichnete Summe erstreckt sich blos auf die Werthe $z_1, z_2, \ldots, z_n$, welche nach der Voraussetzung alle der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil genügen. Die Summe:

$$y = u_1 z_1 + u_2 z_2 + \ldots + u_n z_n$$

verificirt also die Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile, wenn man außer den Gleichungen:

$$\Sigma z D_x u = 0, \quad \Sigma D_x z D_x u = 0,$$
$$\Sigma D_x^2 z D_x u = 0, \ldots, \quad \Sigma D_x^{n-2} z D_x u = 0$$

auch hat:

$$\Sigma D_x^{n-1} z D_x u = X.$$

Wenn man der Kürze wegen setzt:

$$D_x u_1 = v_1 X, \quad D_x u_2 = v_2 X, \ldots, \quad D_x u_n = v_n X,$$

so lassen sich die vorhergehenden Gleichungen auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned}
z_1 v_1 + z_2 v_2 + \ldots + z_n v_n &= 0,\\
z'_1 v_1 + z'_2 v_2 + \ldots + z'_n v_n &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_1^{(n-2)} v_1 + z_2^{(n-2)} v_2 + \ldots + z_n^{(n-2)} v_n &= 0,\\
z_1^{(n-1)} v_1 + z_2^{(n-1)} v_2 + \ldots + z_n^{(n-1)} v_n &= 1
\end{aligned}$$

und geben die gesuchten Werthe von v_1, v_2, ..., v_n, welche in die Gleichungen:

$$D_x u_1 = v_1 X, \quad D_x u_2 = v_2 X, \ldots,$$

substituirt, durch eine leichte Integration die folgenden Werthe von u_1, u_2, ...:

$$u_1 = C_1 + \int v_1 X dx, \quad u_2 = C_2 + \int v_2 X dx, \ldots,$$
$$u_n = C_n + \int v_n X dx$$

geben, und das allgemeine Integral der Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile ist folglich:

$$y = z_1 (C_1 + \int v_1 X dx) + \ldots + z_n (C_n + \int v_n X dx)$$
$$= \Sigma z (C + \int v X dx).$$

Das vorhin Gesagte ist sogar auf den Fall anwendbar, wo die Coefficienten A_0, A_1, ..., A_n Functionen von x sind, weil wir bis dahin durchaus keine Beschränkung gemacht haben. Kommen wir wieder auf den Fall zurück, wo diese Coefficienten Constanten sind; so ist einleuchtend, daß der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil durch die folgenden Werthe:

$$z_1 = C_1 e^{r_1 x}, \quad z_2 = C_2 e^{r_2 x}, \ldots, \quad z_n = C_n e^{r_n x}$$

genügt wird, wo r_1, r_2, ..., r_n die n Wurzeln der Hülfsgleichung:

$$r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0$$

sind, und der allgemeine Werth von z oder das allgemeine Integral der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil ist:

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n.$$

Wenn man in derselben Voraussetzung setzt:

$$v_1 z_1 = \lambda_1, \quad v_2 z_2 = \lambda_2, \ldots, \quad v_n z_n = \lambda_n,$$

so verwandeln sich die Gleichungen, welche v_1, v_2, ..., v_n geben, in folgende:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0,\\
&\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \ldots + \lambda_n r_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_1 r_1^{n-1} + \lambda_2 r_2^{n-1} + \ldots + \lambda_n r_n^{n-1} = 0
\end{aligned}$$

und das allgemeine Integral der Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile ist:

$$y = e^{r_1 x} (C_1 + \lambda_1 \int X e^{-r_1 x} dx) + e^{r_2 x} (C_2 + \lambda_2 \int X e^{-r_2 x} dx + \ldots,$$

welches genau der durch die frühern Methoden gefundene Werth von y ist.

§. 239. Wenn man blos $n-1$ particuläre Integrale z, z_2, ... z_{n-1} der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil kännte, so wäre der Ausdruck:

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_{n-1} z_{n-1}$$

nicht mehr das vollständige Integral dieser Differenzialgleichung; aber gleichwohl kann man noch annehmen, daß das allgemeine Integral der Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile durch diesen Ausdruck dargestellt wird, unter der Bedingung, daß die $n-1$ Größen C_1, C_2, ... nicht mehr Constanten, sondern schicklich gewählte Functionen u_1, u_2, u_{n-1} von x sind. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß die gegebene Differenzialgleichung blos von der vierten Ordnung sei, nämlich:

$$D_x^4 y + A_1 D_x^3 y + A_2 D_x^2 y + A_3 D_x y + A_4 y = X,$$

so muß bewiesen werden, daß der Ausdruck:

$$y = u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3$$

das allgemeine Integral derselben werden kann. Da die Bedingung, daß diese Function der gegebenen Differenzialgleichung genügt, nur eine einzige Gleichung zwischen den drei Größen u, u_2, u_3 giebt, so kann man diese Größen noch zwei andern willkührlichen Bedingungen unterwerfen, und sie z. B. so annehmen, daß die erste und zweite Ableitung von y, nämlich $D_x y$, $D_x^2 y$ dieselbe Form behalten, als die, welche sie haben, wenn u_1, u_2, u_3 Constanten sind. Auf diese Weise erhält man drei Gleichungen, welche man der Kürze wegen, wie folgt ausdrücken kann:

$$\Sigma z D_x u = 0, \quad \Sigma D_x z D_x u = 0, \quad \Sigma(z D_x^3 z + A_1 D_x^2 z) D_x u = 0,$$

wo sich das Zeichen Σ auf die drei particulären Werthe z_1, z_2, z_3 und auf die drei Größen u_1, u_2, u_3 erstreckt.

Aus den beiden ersten Gleichungen kann man z. B. die Werthe von $D_x u_2$, $D_x u_3$ als Functionen von $D_x u_1$ ableiten, um sie in die dritte zu substituiren; so erhält man auf diese Weise, wenn man $D_x u_1 = t$ setzt, eine lineare Differenzialgleichung der ersten Ordnung $D_x t + pt = q$, wo p, q Functionen von x sind, und wenn man integrirt, so erhält man den Werth von t, und folglich den von u_1 durch die Gleichung $u_1 = C' + \int t dx$, welche, wie man sieht, zwei willkührliche Constanten enthält. Substituirt man den Werth von u_1 in die beiden Gleichungen:

$$\Sigma z D_x u = 0, \quad \Sigma D_x z D_x u = 0,$$

so erhält man die Werthe von u_2 und u_3, welche durch einfache Quadraturen mit zwei neuen Constanten gegeben werden, und

man hat folglich das Integral der gegebenen Gleichung mit vier willkührlichen Constanten.

Man sieht leicht ein, daß dieselben Schlüsse auch auf eine lineare Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung angewandt werden können, und daß man in allen Fällen auf eine lineare Differenzialgleichung der ersten Ordnung kommt, welche den Werth der ersten Function u_1 mit zwei willkührlichen Constanten giebt, worauf man die übrigen Functionen u_2, u_3, ... durch einfache Quadraturen berechnet.

Wenn man blos $n-2$ particuläre Integrale der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil gekannt hätte, so würde die Integration der Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile auf die einer linearen Differenzialgleichung der zweiten Ordnung zurückgeführt. Betrachten wir der Einfachheit wegen wieder die lineare Differenzialgleichung der vierten Ordnung:

$$D_x^4 y + A_1 D_x^3 y + A_2 D_x^2 y + A_3 D_x y + A_4 y = X$$

und nehmen an, daß der Ausdruck:

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2$$

der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil genügt; so kommt es darauf an, zu zeigen, daß dieser Ausdruck, indem C_1, C_2 als Functionen u_1, u_2 von x betrachtet werden, der Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile genügen kann. Außer der Gleichung, welche ausdrückt, daß der Werth $y = u_1 z_1 + u_2 z_2$ der gegebenen Differenzialgleichung genügt, kann man zwischen den Größen u_1, u_2 nur noch eine neue Relation festsetzen, welche darin bestehen mag, daß die erste Abtheilung $D_x y$ dieselbe Form wieder behält, als wenn u_1, u_2 Constanten wären; so werden die Functionen u_1, u_2 durch die beiden Gleichungen:

$$z_1 D_x u_1 + z_2 D_x u_2 = 0,$$

$$A_1 D_x u_1 + A_2 D_x^2 u_1 + A_3 D_x^3 u_1 + A'_1 D_x u_2 + A'_2 D_x^2 u_2 + A'_3 D_x^3 u_2 = X$$

bestimmt. Wenn man den aus der ersten dieser Gleichungen abgeleiteten Werth von $D_x u_1$ in die zweite substituirt und $D_x u_1 = t$ setzt; so ist einleuchtend, daß t durch eine Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$D_x^2 t + p D_x t + q t = r$$

bestimmt wird, wo p, q, r Functionen von x sind. Integrirt man diese Gleichung und geht von dem Werthe von t zu dem von u_1 zurück; so findet man:

$$u_1 = C' + \int t dx.$$

Dieser Werth von u_1, welcher offenbar drei willkührliche Constanten enthält, dient in Verbindung mit der Gleichung:

$$z_1 D u_1 + z_2 D_x u_2 = 0$$

zur Berechnung des Werthes von u_2, welcher noch eine vierte willkührliche Conſtante enthält, und man hat folglich das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung, welches vier willkührliche Conſtanten enthält.

Wenn man das Vorhergehende verallgemeinert, ſo kann man leicht beweiſen, daß, wenn man m particuläre Integrale der Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung ohne zweiten Theil kennt, die Beſtimmung des Integrales der Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung mit einem zweiten Theile ſich auf die Integration einer Differenzialgleichung von der $(n-m)^{ten}$ Ordnung zurückführen läßt, ſo daß man auf dieſe Weiſe wieder auf einen bereits bewieſenen Lehrſatz kommt.

§. 240. Wir wollen noch bemerken: 1) daß in dem erhaltenen Werthe die n Conſtanten $C_1, C_2, \ldots, C_n$ blos in dem Theile vorkommen, welcher das allgemeine Integral der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil bildet, und 2) daß man in allen Fällen die n Conſtanten durch die Bedingung beſtimmen kann, daß für $x = x_0$, wo x_0 ein beliebiger Werth von x iſt, die Function y und ihre $n-1$ erſten Ableitungen gegebenen Werthe $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ annehmen. Denn zu dem Zwecke braucht man die Integrale:

$$\int X e^{-r_1 x} dx, \int X e^{-r_2 x} dx, \ldots$$

nur von $x = x_0$ an zunehmen und den Werth von:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots$$

den ausgeſprochenen Bedingungen genügen zu laſſen. Dieſer Werth läßt ſich zunächſt auf folgende Form bringen:

$$y = C_1 e^{r_1 (x - x_0)} + C_2 e^{r_2 (x - x_0)} + \ldots + C_n e^{r_n (x - x_0)};$$

denn dieſe Transformation beſteht blos darin, daß man in jeder Conſtante einen conſtanten Factor $e^{-r_1 x_0}$, $e^{-r_2 x_0}$, ... abſondert, und wenn man alsdann, nachdem man $n-1$ mal hintereinander differenzirt hat, ausdrückt, daß y und deſſen $n-1$ erſte Ableitungen die gegebenen Werthe $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ annehmen; ſo hat man die n folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
C_1 &+ C_2 &&+ \ldots + C_n &&= y_0,\\
C_1 r_1 &+ C_2 r_2 &&+ \ldots + C_n r_n &&= y_1,\\
C_1 r_1^2 &+ C_2 r_2^2 &&+ \ldots + C_n r_n^2 &&= y_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_1 r_1^{n-1} &+ C_2 r_2^{n-1} &&+ \ldots + C_n r_n^{n-1} &&= y_{n-1}.
\end{aligned}$$

Da nun die aus dieſen n Gleichungen des erſten Grades abgeleiteten Werthe, welche man vermittelſt der mehrfach erwähnten Formel berechnet, im Allgemeinen endlich und beſtimmt ſind; ſo folgt,

daß man der gegebenen Differenzialgleichung immer genügen kann. Man sieht leicht ein, daß eine beliebige C_m dieser Constanten durch die Gleichung:

$$C_m = \frac{y_{n-1} + k_{n-2} y_{n-2} + k_{n-3} y_{n-3} + \ldots + k_1 y_1 + k_0 y_0}{f'(r_m)}$$

gegeben wird, worin $f(r)$ wieder das Polynom:

$$r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n,$$

aber k_{n-2}, k_{n-3}, ..., k_1, k_0 die Coefficienten von r^{-2}, r^{-3}, ..., r, r_0 in der Entwickelung von $\frac{f(r)}{r - r_m}$ bezeichnen.

§. 241. Vierte Methode. Durch Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

Wir wollen wieder die beiden Differenzialgleichungen:

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = X = F(x),$$

$$D_x^n z + A_1 D_x^{n-1} z + A_2 D_x^{n-2} z + \ldots + A_{n-1} D_x z + A_n z = 0$$

betrachten, und annehmen, daß man einen Werth von z, nämlich $z = \varphi(x, \alpha)$ gefunden habe, welcher der zweiten dieser Differenzialgleichungen und für $\alpha = x$ den folgenden Bedingungsgleichungen:

$$z = 0, \quad D_x z = 0, \quad D_x^2 z = 0, \ldots, \quad D_x^{n-2} z = 0, \quad D_x^{n-1} z = F(\alpha)$$

genügt, und außerdem wollen wir setzen:

$$y = \int_0^x z d\alpha,$$

wo $z = \varphi(x, \alpha)$ eine Function der Veränderlichen x und der unbestimmten Größe α ist. Differenzirt man diesen Werth von y in Beziehung auf x, welches eine der Grenzen des Integrales ist und in z vorkommt; so hat man (§. 53):

$$D_x y = \int_0^x D_x z d\alpha + \varphi(x, x);$$

Nun ist aber der Werth von $z = \varphi(x, x)$ für $\alpha = x$, d. h. $\varphi(x, \alpha)$ nach der Voraussetzung Null, und man hat folglich blos:

$$D_x y = \int_0^x D_x z d\alpha.$$

Differenzirt man nun ein zweites, ein drittes, ... mal und bemerkt, daß die successiven Ableitungen:

$$D_x z, \quad D_x^2 z, \ldots, \quad D_x^{n-2} z$$

für $\alpha = x$ ebenfalls nach der Voraussetzung verschwinden, während die $(n-1)^{te}$ Ableitung alsdann gleich $F(x)$ wird; so hat man:

$$D_x^2 y = \int_0^x D_x^2 z d\alpha, \ldots, \quad D_x^{n-1} y = \int_0^x D_x^{n-1} z d\alpha,$$

$$D_x^n y = \int_0^x D_x^n z d\alpha + F(x),$$

Substituirt man dieſe Werthe in die Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile, ſo findet man:

$$\int_0^x \left(D_x^n z + A_1 D_x^{n-1} z + \ldots + A_{n-1} D_x z + A_n z \right) d\alpha = 0,$$

oder $0 = 0$, weil z nach der Vorausſetzung der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil genügt. Der Werth:

$$y = \int_0^x z d\alpha$$

verificirt alſo die Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile, oder wird ein particuläres Integral derſelben. Um daraus das allgemeine Integral abzuleiten, braucht man offenbar nur zu ſetzen:

$$y = \int_0^x z d\alpha + v = u + v,$$

wo v das allgemeine Integral der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil bezeichnet; denn das Reſultat der Subſtitution dieſes Werthes in die Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile beſteht aus zwei verſchiedenen Theilen, wovon der eine identiſch Null iſt, weil v der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil genügt, und der andere iſt identiſch $= F(x)$, weil $u = \int_0^x z d\alpha$ der Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile Genüge leiſtet, woraus folgt, daß der Werth $y = u + v$, welcher übrigens n willkührliche Conſtanten enthält, derſelben Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile Genüge leiſtet und das allgemeine Integral derſelben iſt.

In dem beſondern Falle, wo die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Conſtanten ſind, kann man, wie wir geſehen haben, ſetzen:

$$v = C_1 e^{r_1 (x-\alpha)} + C_2 e^{r_2 (x-\alpha)} + \ldots + C_n e^{r_n (x-\alpha)}.$$

Ferner muß man einen Werth von z beſtimmen, welcher für $\alpha = x$ den Bedingungsgleichungen:

$$z = 0, \ D_x z = 0, \ D_x^2 z = 0, \ldots, \ D_x^{n-2} z = 0, \ D_x^{n-1} z = F(\alpha)$$

genügt, zu welchem Zwecke die Conſtanten $C_1, C_2, \ldots C_n$ den Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} C_1 &+ C_2 &+ \ldots + C_n &= 0, \\ C_1 r_1 &+ C_2 r_2 &+ \ldots + C_n r_n &= 0, \\ C_1 r_1^2 &+ C_2 r_2^2 &+ \ldots + C_n r_n^2 &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 r_1^{n-1} &+ C_2 r_2^{n-1} &+ \ldots + C_n r_n^{n-1} &= F(\alpha) \end{aligned}$$

genügen müſſen, welche, wie wir bereits geſehen haben, geben:

$$C_1 = \frac{F(\alpha)}{f'(r_1)}, \quad C_2 = \frac{F(\alpha)}{f'(r_2)}, \ldots, \quad C_n = \frac{F(\alpha)}{f'(r_n)},$$

wo $f(r)$ wieder das Polynom:

$$r^n + A_1 r^{n-1} + \ldots + A_{n-1} r + A_n$$

bezeichnet. Hieraus ergiebt ſich:

$$z = \frac{F(\alpha)}{f'(r_1)} e^{r_1(x-\alpha)} + \frac{F(\alpha)}{f'(r_2)} e^{r_2(x-\alpha)} + \ldots + \frac{F(\alpha)}{f'(r_n)} e^{r_n(x-\alpha)},$$

$$y = C_1 e^{r_1(x-\alpha)} + \ldots + C_n e^{r_n(x-\alpha)} + \int_0^x \frac{e^{r_1(x-\alpha)} F(\alpha) d\alpha}{f'(r_1)} + \ldots + \int_0^x \frac{e^{r_n(x-\alpha)} F(\alpha) d\alpha}{f'(r_n)}$$

oder:

$$y = \Sigma C e^{r(x-\alpha)} + \Sigma \int_0^x \frac{e^{r(x-\alpha)}}{f'(r)} F(\alpha) d\alpha = \Sigma e^{rx} \left[C + \frac{1}{f'(r)} \int_0^x X e^{-rx} dx \right],$$

wo ſich die Summe im zweiten Theile dieſer Gleichung auf alle Wurzeln der Gleichung:

$$f(r) = r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0$$

erſtreckt.

§. 242. In allem Vorhergehenden haben wir wenigſtens ſtillſchweigend vorausgeſetzt, daß die n Wurzeln der Gleichung $f(r) = 0$ reell und ungleich ſind; denn wenn zwei dieſer Wurzeln einander gleich wären, z. B. $r_1 = r_2$, ſo gäben die beiden particulären Integrale $C_1 e^{r_1 x}$, $C_2 e^{r_1 x}$, weil ſie ſich zuſammenaddiren:

$$(C_1 + C_2) e^{r_1 x} = C' e^{r_1 x}$$

und man erhielte, ſtatt der beiden Conſtanten C_1, C_2 nur eine $C_1 + C_2$, welche ihre Summe iſt. Das allgemeine Integral enthielte alſo nur $n - 1$ Conſtanten; allein ſeine Allgemeinheit läßt ſich leicht wieder herſtellen, zu welchem Zwecke man verſchiedene Kunſtgriffe anwendet, welche wir in aller Kürze angeben wollen.

Zunächst wollen wir bemerken, daß wir nur das Integral der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil zu betrachten brauchen, weil durch dasselbe die n willkührlichen Constanten in das Integral der Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile übertragen werden.

Erstes Verfahren. Jedes der particulären Integrale:

$$y = e^{r_1 x},\ y = e^{r_2 x}, \ldots, \text{ oder } y - e^{r_1 x} = 0,\ y - e^{r_2 x} = 0, \ldots$$

kann auf die Form:

$$\varphi(r_1) = 0,\quad \varphi(r_2) = 0, \ldots$$

gebracht werden, und wie bei den gleichzeitigen Differenzialgleichungen ergiebt sich, daß, wenn eine zweite Wurzel r_2 der ersten r_1 gleich wird, zwei Integrale zusammenfallen und eine neue Gleichung:

$$\varphi'(r_1) = 0, \text{ oder } y = xe^{r_1 x}$$

entsteht, so daß die Differenzialgleichung ohne zweiten Theil durch die beiden Werthe $y = e^{r_1 x}$, $y = xe^{r_1 x}$ und durch die Summe $y = C'e^{r_1 x} + C''e^{r_1 x}$, welche zwei verschiedene Constanten enthält, verificirt wird. Wenn auch eine dritte Wurzel $r_3 = r_1$ würde, so hätte man nicht blos:

$$\varphi(r_1) = 0,\quad \varphi'(r_1) = 0,$$

sondern auch:

$$\varphi''(r_1) = 0$$

und die Differenzialgleichung würde sowohl durch die drei Werthe $e^{r_1 x}$, $xe^{r_1 x}$, $x^2 e^{r_1 x}$, als durch die Summe:

$$C'e^{r_1 x} + C''xe^{r_1 x} + C'''x^2 e^{r_1 x}$$

verificirt, welche drei verschiedene Constanten enthält. Allgemein, wenn $m-1$ Wurzeln $r_2, r_3, \ldots r_m$ gleich r_1 werden, so wird die Summe:

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + \ldots + C_m e^{r_m x},$$

welche einem einzigen Gliede $Ce^{r_1 x}$ gleich zu achten ist, durch die andere Summe:

$$C'e^{r_1 x} + C''xe^{r_1 x} + C'''x^2 e^{r_1 x} + \ldots + C^{(m)}x^{m-1}e^{r_1 x},$$

welche m willkührliche Constanten enthält und dem Integrale seine Allgemeinheit wieder ertheilt, ersetzt.

Zweites Verfahren. Wir wollen $r_2 = r_1 + \varepsilon$ setzen, so muß, wenn $r_2 = r_1$ werden soll, nothwendig $\varepsilon = 0$ sein, und man hat:

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{x(r_1+\varepsilon)}$$
$$= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_1 x}\left(1 + \frac{\varepsilon x}{1} + \frac{\varepsilon^2 x^2}{1.2} + \ldots\right)$$
$$= (C_1 + C_2) e^{r_1 x} + C_2 \varepsilon x e^{r_1 x}\left(1 + \frac{\varepsilon x}{1.2} + \frac{\varepsilon^2 x^2}{1.2.3} + \ldots\right)$$

oder wenn man setzt:

$$C_1 + C_2 = C', \quad C_2 \varepsilon = C''$$

und dann $\varepsilon = 0$ nimmt:

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C' e^{r_1 x} + C'' x e^{r_1 x} + \ldots.$$

Wenn drei Wurzeln einander gleich würden, so hätte man, indem man $r_3 = r_1 + \varepsilon$ setzt:

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} = C' e^{r_1 x} + C'' x e^{r_1 x} + C_3 e^{x(r_1+\varepsilon)}$$
$$= e^{r_1 x}\left(C' + C'' x + C_3 + C_3 \varepsilon x + C_3 \frac{\varepsilon^2 x^2}{1.2} + C_3 \frac{\varepsilon^3 x^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$

oder wenn man:

$$C' + C_3 = C', \quad C'' + C_3 \varepsilon = C'', \quad C_3 \varepsilon^2 = C''', \ldots$$

setzt:

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} = C' e^{r_1 x} + C'' x e^{r_1 x} + C''' x^2 e^{r_1 x} + \ldots$$

Drittes Verfahren. Wenn man in der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil $y = ue^{rx}$ setzt und die bekannte Gleichung:

$$D_x^n(uv) = vD_x^n u + nD_x v D_x^{n-1} u + \frac{n(n-1)}{1.2} D_x^2 v D_x^{n-2} u + \ldots + uD_x^n v$$

berücksichtigt, so ist das Resultat der Substitution offenbar:

$$uf(r) + D_x u\, f'(r) + D_x^2 u\, f''(r) + \ldots$$
$$+ D_x^{n-1}(u) f^{(n-1)}(r) + D_x^n u = 0,$$

wo $f(r)$ wieder das Polynom:

$$r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n$$

ausdrückt. Wenn nun die Gleichung $f(r) = 0$ keine gleichen Wurzeln hat, so wird die vorhergehende Gleichung erfüllt, wenn man $r = r_1$ setzt, wenn r_1 irgend eine Wurzel der Gleichung $f(r) = 0$ und $D_x u = 0$ oder $u = C_1$ ist, und folglich ist der Werth $y = C_1 e^{r_1 x}$ ein particuläres Integral. Wenn die Gleichung $f(r) = 0$ zwei gleiche Wurzeln, jede $= r_1$ hat, so verificirt diese doppelte Wurzel auch die Gleichung $f'(r) = 0$, und der Gleichung mit u wird genügt, wenn man setzt:

$$D_x^2 u = 0, \quad u = C' + C''x.$$

In diesem Falle verificirt also der Werth:

$$y = C'e^{r_1 x} + C''xe^{r_1 x}$$

die gegebene Differenzialgleichung, und wenn man auf diese Weise weiter schließt, so ergiebt sich leicht, daß, wenn die Gleichung $f(r) = 0$, m gleiche Wurzeln, jede gleich r_1 hat, der Ausdruck:

$$y = C'e^{r_1 x} + C''xe^{r_1 x} + \ldots + C^{(m)}x^{m-1}e^{r_1 x}$$

welcher m verschiedene Constanten enthält, der gegebenen Differenzialgleichung genügt.

§. 243. Viertes Verfahren. Wir wollen direct untersuchen, was der Ausdruck:

$$y = \Sigma e^{rx}(C + \lambda \int Xe^{-rx}dx) = e^{r_1 x}(C_1 + \lambda_1 \int Xe^{-r_1 x}dx) + e^{r_2 x}(C_2 + \lambda_2 \int Xe^{-r_2 x}dx) + \ldots$$

in dem Falle gleicher Wurzeln wird. Bekanntlich ist:

$$\lambda_1 = \frac{1}{f'(r_1)} = \frac{1}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)\ldots(r_1 - r_n)},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{f'(r_2)} = \frac{1}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)\ldots(r_2 - r_n)},$$

welche Werthe für $r_1 = r_2$ unendlich werden, und es ist a priori nicht einzusehen, was die beiden ersten Glieder des allgemeinen Integrales werden. Um dieses zu erfahren, wollen wir setzen:

$$\frac{1}{(r_1 - r_3)(r_1 - r_4)\ldots(r_1 - r_n)} e^{r_1 x} \int Xe^{-r_1 x}dx = \varphi_1(r)$$

und:

$$r_2 = r_1 + \varepsilon,$$

so ergiebt sich:

$$\frac{1}{f'(r_1)} e^{r_1 x} \int Xe^{-r_1 x}dx = \frac{\varphi_1(r_1)}{r_1 - r_2} = \frac{\varphi_1(r_1)}{-\varepsilon},$$

$$\frac{1}{f'(r_2)} e^{r_2 x} \int Xe^{-r_2 x}dx = \frac{\varphi_1(r_2)}{r_2 - r_1} = \frac{\varphi_1(r_1 + \varepsilon)}{\varepsilon},$$

$$\frac{1}{f'(r_1)} e^{r_1 x} \int Xe^{-r_1 x}dx + \frac{1}{f'(r_2)} e^{r_2 x} \int Xe^{-r_2 x} = \frac{\varphi_1(r_1 + \varepsilon) - \varphi_1(r_1)}{\varepsilon} = \varphi'_1(r_1 + \vartheta\varepsilon).$$

Wenn man nun $r_2 = r_1$ oder $\varepsilon = 0$ setzt, so reducirt sich diese Summe, welche bis auf die Constanten C_1, C_2 die Summe der beiden ersten Glieder des allgemeinen Integrales ist, auf $\varphi'_1(r_1)$, und man hat folglich:

$$y = \varphi'_1(r_1) + \lambda_2 e^{r_2 x} \int X e^{-r_2 x} dx + \ldots.$$

Wenn noch eine dritte Wurzel $r_3 = r_1$ wird, so wird auch λ_2 unendlich, und um zu erfahren, was das Integral wird, wollen wir setzen:

$$\frac{1}{(r-r_4)\,(r-r_5)\ldots(r-r_n)}\, e^{rx} \int X e^{-rx} dx = \varphi_2(r)$$

und:

$$r_3 = r_1 + \varepsilon,$$

so kommt:

$$\varphi_1(r) = \frac{\varphi_2(r)}{r-r_3},\quad \varphi'_1(r) = -\frac{\varphi_2(r)}{(r-r_3)^2} - \frac{\varphi'_2(r)}{r_3-r},$$

$$\lambda_2 e^{r_3 x} \int X e^{-r_3 x} dx = \frac{1}{f'(r_3)}\, e^{r_3 x} \int X e^{-r_3 x} dx$$

$$= \frac{\varphi_2(r_3)}{(r_3-r_2)(r_3-r_1)} = \frac{\varphi_2(r_3)}{(r_3-r_1)^2} = \frac{\varphi_2(r_1+\varepsilon)}{\varepsilon^2},$$

$$\varphi'_1(r_1) + \lambda_2 e^{r_3 x} \int X e^{-r_3 x} dx = -\frac{\varphi_2(r_1)}{\varepsilon^2} - \frac{\varphi'_2(r_1)}{\varepsilon} + \frac{\varphi_2(r_1+\varepsilon)}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{\varphi_2(r_1+\varepsilon) - \varphi_2(r_1) - \varepsilon\varphi'_2(r_1)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{1.2}\,\varphi''_2(r_1+\vartheta\varepsilon).$$

Wenn man also $r_3 = r_1$ oder $\varepsilon = 0$ setzt, so wird das allgemeine Integral bis auf die Constanten C_1, C_2, C_3 folgendes:

$$y = \frac{1}{1.2}\,\varphi''_2(r_1) + \lambda_1 e^{r_1 x} \int X e^{-r_1 x} dx + \ldots.$$

Wenn vier Wurzeln einander gleich würden, so fände man, wenn man setzt:

$$\varphi_3(r) = \frac{1}{(r-r_5)\ldots(r-r_n)}\, e^{rx} \int X e^{-rx} dx$$

und wie vorhin schließt:

$$y = \frac{1}{1.2.3}\,\varphi_3'''(r_1) + \lambda_3 e^{r_3 x} \int X e^{-r_3 x} dx + \ldots.$$

Allgemein, wenn m Wurzeln gleich r_1 sind, so setzt man:

$$\varphi_{m-1}(r) = \frac{1}{(r-r_{m+1})\ldots(r-r_n)}\, e^{rx} \int X e^{-rx} dx$$

und alsdann hat man:

$$(\alpha)\quad y = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\,\varphi_{m-1}^{(m-1)}(r_1) + \lambda_{m+1} e^{r_{m+1} x} \int X e^{-r_{m+1} x} dx + \ldots.$$

Um diese letzte Formel (α) streng zu erweisen, braucht man offenbar nur zu zeigen, daß sie, wenn sie in dem Falle m gleicher

Wurzeln richtig ist, auch noch in dem Falle $m+1$ gleicher Wurzeln statt findet, was sich leicht auf folgende Weise darthun läßt. Wir wollen setzen:

$$\varphi_m(r) = \frac{1}{(r-r_{m+1})\dots(r-r_n)}\, e^{rz}\int X e^{-rz}dx,\quad r_{m+1}=r_1+\varepsilon,$$

so ist:

$$\varphi_{m-1}(r) = \frac{\varphi_m(r)}{r-r_{m+1}},$$

$$\lambda_{m+1}e^{r_{m+1}}\int X e^{-r_{m+1}x}\,dx = \frac{\varphi_m(r_{m+1})}{(r_{m+1}-r_1)^m} = \frac{\varphi_m(r_1+\varepsilon)}{\varepsilon^m}.$$

Betrachtet man ferner die Größe:

$$\frac{\varphi_m(r)}{r-r_{m+1}} = \frac{1}{r-r_{m+1}} \times \varphi_m(r)$$

als ein Product uv, so hat man:

$$\varphi_{m-1}^{(m-1)}(r) = -\frac{1.2.3\dots(m-1)}{(r_{m+1}-r)^m}\,\varphi_m(r) - \frac{(m-1)}{1}\frac{1.2.3\dots(m-2)}{(r_{m+1}-r)^{m-1}}\,\varphi'_m(r)-\dots,$$

$$\varphi_{m-1}^{(m-1)}(r) =$$

$$-1.2.3\dots(m-1)\left[\frac{\varphi_m(r)}{(r_{m+1}-r)^m}+\frac{1}{1}\frac{\varphi'_m(r)}{(r_{m+1}-r)^{m-1}}+\frac{1}{1.2}\frac{\varphi''_m(r)}{(r_{m+1}-r)^{m-2}}+\dots\right]$$

und hieraus ergiebt sich:

$$\frac{1}{1.2.3\dots(m-1)}\,\varphi_m^{(m-1)}(r_1) =$$

$$-\frac{\varphi_m(r_1)}{\varepsilon^m}-\frac{1}{1}\frac{\varphi'_m(r_1)}{\varepsilon^{m-1}}-\frac{1}{1.2}\frac{\varphi''_m(r_1)}{\varepsilon^{m-2}}\dots-\frac{1}{1.2.3\dots(m-1)}\frac{\varphi_m^{(m-1)}(r_1)}{\varepsilon},$$

$$y = \frac{\varphi_m(r_1+\varepsilon)}{\varepsilon^m}-\frac{\varphi_m(r_1)}{\varepsilon^m}-\frac{1}{1}\frac{\varphi'_m(r_1)}{\varepsilon^{m-1}}-\frac{1}{1.2}\frac{\varphi''(r_1)}{\varepsilon^{m-1}}\dots$$

$$-\frac{1}{1.2.3\dots(m-1)}\frac{\varphi_m^{(m-1)}(r_1)}{\varepsilon}$$

$$+\lambda_{m+2}e^{r_{m+2}}\int X e^{-r_{m+2}x}dx+\dots =$$

$$\frac{1\dots\dots}{1.2.3\dots(m-1)m}\,\varphi_m^{(m)}(r_1+\vartheta\varepsilon)+\lambda_{m+2}e^{r_{m+2}}\int X e^{-r_{m+2}x}dx+\dots.$$

Setzt man endlich $r_{m+1}=r_1$, oder $\varepsilon=0$, so findet man:

$$y = \frac{1}{1.2.3\dots(m-1)m}\,\varphi_m^{(m)}(r_1)+\lambda_{m+2}e^{r_{m+2}}\int X e^{-r_{m+2}x}dx+\dots$$

welches genau die auf den Fall $m+1$ gleicher Wurzeln, jede $=r_1$ erstreckte Formel (a) ist. Wenn also diese Formel für m gleiche Wurzeln richtig ist, so ist sie auch für $m+1$ gleiche Wurzeln, jede $=r_1$, richtig und folglich gilt sie allgemein.

Es bleibt nun noch der Werth von $\varphi_{m-1}^{(m-1)}(r_1)$ zu bestimmen übrig, um darzuthun, daß das Integral wieder n verschiedene Constanten enthält. Nun ist aber:

$$\varphi_{m-1}(r) = \frac{1}{(r-r_{m+1})(r-r_{m+2})\ldots(r-r_n)} e^{rx} \int X e^{-rx}\, dx$$
$$= f_{(m-1)}(r) \times f(r),$$

wenn man setzt:

$$f_{m-1}(r) = \frac{1}{(r-r_{m+1})(r-r_{m+2})\ldots(r-r_n)},$$
$$f(r) = e^{rx} \int X e^{-rx}\, dx;$$

folglich:

$$\varphi_{m-1}^{(m-1)}(r) = f_{(m-1)}(r)\, f^{m-1}(r) + \frac{m-1}{1} f'_{m-1}(r)\, f^{(m-2)}(r) + \ldots$$
$$+ f_{m-2}^{(m-1)}(r) f(r).$$

Wenn man in dieser Gleichung r_1 für r setzt, so ist die Function $f_{m-1}(r)$, sowie jede ihrer Ableitungen, eine Zahl und es bleibt folglich blos noch übrig, die Werthe der successive Ableitungen von:

$$f(r) = e^{rx} \int X e^{-rx}\, dx$$

zu finden. Nun ist aber:

$$f'(r) = e^{rx}(x \int X e^{-rx}\, dx - \int X x e^{-rx}\, dx) = e^{rx} \iint X e^{-rx}\, dx^2,$$
$$f''(r) = e^{rx}(x^2 \int X e^{-rx} dx - 2x \int X x e^{-rx} dx + \int X x^2 e^{-rx} dx)$$
$$= 1.2.e^{rx} \iiint X e^{-rx}\, dx^3,$$

. . . . . .

und endlich:

$$f^{m-1}(r) = 1.2.3\ldots(m-1)\, e^{rx} \int\int\int\ldots \int X e^{-rx}\, dx^m.$$

Substituirt man diese verschiedenen Werthe in die Gleichung, welche $\varphi_{m-1}^{(m-1)}(r_1)$ giebt, nachdem man $r = r_1$ gesetzt hat; so findet man:

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)} \varphi_{m-1}^{(m-1)}(r_1)$$
$$= e^{r_1 x}[f_{m-1}(r_1) \int\int\int\ldots \int X e^{-r_1 x} dx^m + f'_{m-1}(r_1) \int\int\int\ldots \int X e^{-r_1 x} dx^{m-1} + \ldots].$$

Wenn man bemerkt, daß vermöge der in der zehnten Vorlesung abgeleiteten Formeln ein vielfaches Integral der $m$ten Ordnung

$$\int\int\int\ldots \int F(x)\, dx^m$$

einer um die Summe:

$$C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_m x^{m-1}$$

vermehrten Function von x gleich ist, so ergiebt sich, daß der Werth von $\varphi_{m-1}^{(m-1)}(r_1)$ und folglich das gesuchte Integral m verschiedene Constanten enthält. Um das vielfache Integral in einfache zu verwandeln, müßte man sich der Formel:

$$\int\int\int \ldots \int F(x)\,dx^n = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \left[\begin{array}{l} x^{n-1}\int F(x)dx - (n-1)\,x^{n-2}\int xF(x)\,dx \\ \quad + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\,x^{n-3}\int x^2 F(x)dx \\ \quad - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\,x^{n-4}\int x^3 F(x)dx \ldots \pm 1 \int x^{n-1} F(x)dx \end{array} \right] + C' + C''x + C'''x^2 + \ldots + C^{(n)}x^{n-1}$$

bedienen, welche sich leicht aus den verschiedenen im §. 65 abgeleiteten Formeln ergiebt, und welche man unmittelbar durch mehrere theilweise Integrationen verificiren kann.

§. 244. Das eben befolgte Verfahren hat mit einer der Methoden, welche wir zur Integration der linearen Differenzialgleichung angewandt haben, viel Aehnlichkeit, und die gehörig entwickelte Gleichung:

$$(A)\,y = e^{r_1 x}\left[\begin{array}{l} \int e^{(r_2-r_1)x}\,dx \int \ldots \int e^{(r_n-r_{n-1})x}\,dx \int X e^{-r_n x}dx \\ \quad + C' \int e^{(r_2-r_1)x}dx \int \ldots \int e^{(r_n-r_{n-1})x}dx \\ + C'' \int e^{(r_2-r_1)x}\,dx \int \ldots \int e^{(r_{n-1}-r_{n-2})x}\,dx \ldots \\ \quad + C^{(n-1)} \int e^{(r_2-r_1)x}\,dx + C_n \end{array} \right],$$

oder ihre transformirte Gleichung (B) in §. 237 geben in allen Fällen den Werth des allgemeinen Integrales mit n verschiedenen willkührlichen Constanten.

Wenn alle Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_n$ der Hülfsgleichung $f(r)=0$ einander gleich wären, d. h. wenn man die Differenzialgleichung:

$$D_x^n y + n r_1 D_1^{n-1} y - n\,\frac{(n-1)}{1.2}\,r_1^2 D_x^{n-2} y + \ldots \mp n\,\frac{(n-1)}{1.2}\,r_1^{n-1} D_x^2 y \pm n r_1^{n-1} D_x y \mp r_1^n = 0$$

zu integriren hätte, deren Hülfsgleichung:

$$(r-r_1)^n = 0$$

ist; so erschienen alle die Coefficienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ unter der Form des Unendlichen; aber wenn man die vorhergehende Formel berücksichtigt, so findet man:

$$y = e^{rx}\left[\int dx \int dx \int dx \ldots \int X e^{-rx}dx + C' \int\int\int \ldots \int dx^n + C'' \int\int\int \ldots \int dx^{n-1} + \ldots + C^{(n-1)} \int dx + C^{(n)}\right].$$

Der zweite Theil dieſer Gleichung iſt offenbar die Entwickelung von:

$$e^{r_1 x} \int\int\int \ldots \int X e^{r x} dx^n,$$

und man hat folglich:

$$y = e^{r_1 x} \int\int\int \ldots \int X e^{r_1 x} dx^n,$$

oder wenn man entwickelt:

$$y = \frac{e^{r_1 x}}{1.2.3 \ldots (n-1)} \left[\begin{array}{l} x^{n-1} \int X e^{-r_1 x} dx - (n-1) x^{n-2} \int X x e^{-r_1 x} dx \ldots \\ \qquad \pm \int X x^{n-1} e^{-r_1 x} dx \\ + C' x^{n-1} + C'' x^{n-2} + \ldots + C^{(n-1)} x + C^{(n)} \end{array} \right].$$

§. 245. Betrachten wir endlich den Fall, wo einige der Wurzeln der Hülfsgleichung imaginär ſind. Da die imaginären Wurzeln immer paarweiſe vorkommen, ſo braucht man nur die beiden Glieder der vorhergehenden Formel zu betrachten, welche zwei conjugirten imaginären Wurzeln entſprechen. Wir wollen alſo annehmen, daß man habe:

$$r_1 = \alpha + \beta \sqrt{-1}, \quad r_2 = \alpha - \beta \sqrt{-1}$$

und mit R die Summe der den reellen Wurzeln entſprechenden Glieder bezeichnen. Die beiden Coefficienten λ_1, λ_2 können imaginär ſein, und man hat im Allgemeinen:

$$\lambda_1 = A + B \sqrt{-1}, \quad \lambda_2 = A - B \sqrt{-1},$$

während die übrigen Coefficienten immer reell ſind; denn ſie enthalten gleichzeitig die beiden Factoren:

$$(r_m - r_1) = (r_m - \alpha - \beta \sqrt{-1}), \quad r_m - r_2 = (r_m - \alpha + \beta \sqrt{-1}),$$

deren Product $= (r_m - \alpha)^2 + \beta^2$ iſt. Demnach hat man:

$$y = \frac{e^{\alpha x} e^{\beta x \sqrt{-1}} (C_1 + \int X e^{-\alpha x} e^{-\beta x \sqrt{-1}} dx)}{A + B \sqrt{-1}} + \frac{e^{\alpha x} e^{-\beta x \sqrt{-1}} (C_2 + \int X e^{-\alpha x} e^{+\beta x \sqrt{-1}})}{A - B \sqrt{-1}} + R,$$

oder wenn man auf denſelben Nenner reducirt, bemerkt, daß:

$$e^{\pm \beta x \sqrt{-1}} = \cos \beta x \pm \sqrt{-1} \sin \beta x$$

iſt, und mit $2C'$, $2C''$ die unbeſtimmten Conſtanten $C_1 + C_2$, $(C_1 - C_2)\sqrt{-1}$ bezeichnet:

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 2e^{\alpha x} \dfrac{(A \cos \beta x + B \sin \beta x)(C' + \int X e^{-\alpha x} \cos \beta x dx)}{A^2 + B^2} \\ \quad + 2e^{\alpha x} \dfrac{(A \sin \beta x - B \cos \beta x)(C'' + \int X e^{-\alpha x} \sin \beta x dx)}{A^2 + B^2} + R. \end{array} \right.$$

Die Integrationen im zweiten Theile dieser Gleichung lassen sich in jedem besondern Falle leicht verrichten; denn nach §. 29 hat man:

$$\int a^x \sin bx dx = \frac{a^x}{b^2 + la^2} (la \sin bx - b \cos bx),$$

$$\int a^x \cos bx dx = \frac{a^x}{b^2 + la^2} (la \cos bx - b \sin bx),$$

aber:

$$d.X \int a^x \sin bx dx = dX \int a^x \sin bx dx + X a^x \sin bx dx,$$

folglich:

$$\int X a^x \sin bx dx = X \int a^x \sin bx dx - \int dX \int a^x \sin bx dx,$$

und wenn man für $\int a^x \sin bx\, dx$ seinen Werth substituirt; so kommt:

$$\int X a^x \sin b x dx = \frac{a^x}{b^2 + la^2} (la \sin bx - \cos bx) X$$
$$- \frac{la}{b^2 + la^2} \int D_x X . a^x \sin bx dx + \frac{b}{b^2 + la^2} \int D_x X . a^x \cos bx dx,$$

und ebenso fände man:

$$\int X a^x \cos bx\, dx = \frac{a^x}{b^2 + la^2} (la \cos bx + b \sin bx)$$
$$- \frac{la}{b^2 + la^2} \int D_x X . a^x \cos bx dx - \frac{b}{b^2 + la^2} \int D_x X . a^x \sin bx dx.$$

Substituirt man in diese Formeln successive:

$$D^x X \text{ und } D_x^2 X,\ D_x^2 X \text{ und } D_x^3 X,\ D_x^3 X \text{ und } D_x^4 X, \ldots$$

für X und $D_x X$, so erhält man eine Reihe von Gleichungen, welche die Werthe von:

$$\int D_x X . a^x \sin bx dx,\ \int D_x X . a^x \cos bx dx;$$
$$\int D_x^2 X . a^x \sin bx dx,\ \int D_x^2 X . a^x \cos bx dx, \ldots$$

geben, und folglich auch durch successive Substitutionen die Werthe der gesuchten Integrale. Auf diese Weise findet man, wenn man $b^2 + l.a^2 = m$, $l.a = n$ setzt:

$$\int X a^x \sin bx\, dx =$$

$$\frac{ax}{m} (n \sin bx - b \cos bx) \left[X \frac{n}{m} D_x X + \frac{n^2 - b^2}{m^2} D_x^2 X - \frac{n(n^2 - 3b^2)}{m^3} D_x^3 X + \ldots \right]$$
$$+ \frac{bax}{m^2} (n \cos bx + b \sin bx) \left(D_x X - \frac{2n}{m} D_x^2 X + \frac{3n^2 - b^2}{m^2} D_x^3 X - \ldots \right),$$

$$\int X a^x \cos bx\,dx =$$

$$\frac{a^x}{m}(n\cos bx + b\sin bx)\left[X - \frac{n}{m}D_x X + \frac{n^2-b^2}{m^2}D_x^2 X - \frac{n(n^2-3b^2)}{m^3}D_x^3 X + \ldots\right]$$

$$- \frac{ba^x}{m^2}(n\sin bx - b\cos bx)\left(D_x X - \frac{2n}{m}D_x^2 X + \frac{3n^2-b^2}{m^2}D_x^3 X + \ldots\right).$$

Wenn man $a = e^{-\alpha}$, $b = \beta$, folglich:

$$la = -\alpha,\quad la^2 = \alpha^2,\quad m = \alpha^2+\beta^2,\quad n = -\alpha$$

ſetzt; ſo kommt:

$$\int X e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx =$$

$$-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x)\left[X + \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}D_x X + \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}D_x^2 X + \frac{\alpha(\alpha^2-3\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^3}D_x^3 X + \ldots\right]$$

$$+\frac{\beta e^{-\alpha x}}{(\alpha^2+\beta^2)^2}(\beta\sin\beta x - \alpha\cos\beta x)\left[D_x X + \frac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}D_x^2 X + \frac{3\alpha^2-\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}D_x^3 X + \ldots\right],$$

$$\int X e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx =$$

$$-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x)\left[X + \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}D_x X + \frac{\alpha^2-\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}D_x^2 X + \frac{\alpha(\alpha^2-3\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)^3}D_x^3 X + \ldots\right]$$

$$+\frac{\beta e^{-\alpha x}}{(\alpha^2+\beta^2)^2}(\beta\cos\beta x + \alpha\sin\beta x)\left[D_x X + \frac{2\alpha}{\alpha^2+\beta^2}D_x^2 X + \frac{3\alpha^2-\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}D_x^3 X + \ldots\right]$$

welche Formeln ſich leicht anwenden laſſen.

Unterſuchen wir endlich noch den Fall, wo eine imaginäre Wurzel r_1 zwei- oder dreifach vorkommt. Es ſei z. B. $r_1 = \alpha+\beta\sqrt{-1}$ eine dreifache Wurzel und $r_2 = \alpha-\beta\sqrt{-1}$ die conjugirte Wurzel derſelben; ſo iſt der Theil des Werthes von y, welcher dieſen beiden Wurzeln entſpricht, wenn die Differenzialgleichung keinen zweiten Theil hat:

$$\begin{aligned}
y &= e^{r_1 x}(C' + C''x + C'''x^2) + e^{r_2 x}(c' + c''x + c'''x^2)\\
&= e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})x}(C' + C''x + C'''x^2) + e^{(\alpha-\beta\sqrt{-1})x}(c' + c''x + c'''x^2)\\
&= e^{\alpha x}(C'e^{\beta x\sqrt{-1}} + c'e^{-\beta x\sqrt{-1}}) + x(C''e^{\beta x\sqrt{-1}} + c''e^{-\beta x\sqrt{-1}})\\
&\qquad + x^2(C'''e^{\beta x\sqrt{-1}} + c'''e^{-\beta x\sqrt{-1}})\\
&= e^{\alpha x}(C\cos\beta x + c'\sin\beta x) + x(C'\cos\beta x + c''\sin\beta x)\\
&\qquad + x^2(C''\cos\beta x + c'''\sin\beta x)\\
&= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\cos\beta x + (c_1 + c_2 x + c_2 x^2)\sin\beta x].
\end{aligned}$$

§. 246. Anwendungen. — I. Die Differenzialgleichung hat keinen zweiten Theil.

Beispiel 1. Es sei:

$$D_x^5 y - 12 D_x^4 y + 62 D_x^3 y - 172 D_x^2 y + 266 D_x y - 160 y = 0$$

die gegebene Differenzialgleichung, so ist die Hülfsgleichung:

$$r^5 - 12r^4 + 62r^3 - 172r^2 + 266r - 160 = 0,$$

ihre Wurzeln sind:

$$r_1 = 2 + 2\sqrt{-1}, \quad r_2 = 2 - 2\sqrt{-1},$$
$$r_3 = 3 + \sqrt{-1}, \quad r_4 = 3 - \sqrt{-1}, \quad r_5 = 2$$

und man findet:

$$y = e^{2x}[(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^x (C_3 \cos x + C_4 \sin x) + C_5]$$

Beispiel 2. Es sei:

$$D_x^3 y - 14 D_x^2 y + 64 D_x y - 96 y = 0$$

die gegebene Differenzialgleichung, so ist die Hülfsgleichung:

$$r^3 - 14r^2 + 64r - 96 = 0$$

und ihre Wurzeln sind:

$$r_1 = 6, \quad r_2 = 4, \quad r_3 = 4.$$

Wenn man in der Formel (A) nur die Glieder mit den willkührlichen Constanten nimmt, weil $X = 0$ ist; so hat man:

$$y = e^{6x}(C_1 \int e^{-2x} dx \int dx + C_2 \int e^{-2x} dx + C_3).$$

Nun ist aber:

$$C_1 \int e^{-2x} dx \int dx = -\frac{C_1}{2} e^{-2x}(x + \tfrac{1}{2}),$$

$$C_2 \int e^{-2x} dx = -\frac{C_2}{2} e^{-2x};$$

folglich:

$$y = e^{4x}(C'x + C'' + C''' e^{2x}).$$

Beispiel 3. Die gegebene Differenzialgleichung sei:

$$D_x^4 y - 8 D_x^3 y + 26 D_x^2 y - 48 D_x y + 45 y = 0,$$

so ist die Hülfsgleichung:

$$r^4 - 8r^3 + 26r^2 - 48r + 45 = 0$$

und deren Wurzeln sind:

$$r_1 = 3,\ r_2 = 3,\ r_3 = 1 + 2\sqrt{-1},\ r_4 = 1 - 2\sqrt{-1}.$$

Dieselbe Formel (A) giebt:

$$y = e^{3x}\left[\begin{array}{l} C_1 \int dx \int e^{-2(1-\sqrt{-1})}\, dx \int e^{-4x\sqrt{-1}}\, dx \\ \quad + C_2 \int dx \int e^{-2(1-\sqrt{-1})x}\, dx + C_3 \int dx + C_4 \end{array}\right]$$

und wenn man entwickelt, so findet man:

$$y = e^x [C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + e^{2x}(C_3 x + C_4)].$$

Beispiel 4. Es sei:

$$D_x^n y - n r_1 D_x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} r_1^2 D_x^{n-2} y \ldots$$
$$\pm \frac{n(n-1)}{1.2} r_1^{n-2} D_x^2 y \mp n r_1^{n-1} D_x y \pm r_1^n = 0$$

die gegebene Differenzialgleichung, so ist die Hülfsgleichung:

$$r^n - nAr^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2} A^2 r^{n-2} \ldots \mp nA^{n-1} \pm A^n = (r - A)^n = 0,$$

welche lauter gleiche Wurzeln hat, und das allgemeine Integral ist:

$$y = e^{r_1 x}(C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + C_3 x^{n-3} + \ldots + C_{n-1} x + C_n).$$

§. 247. — II. Die Differenzialgleichung hat einen zweiten constanten Theil:

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = A.$$

In der Formel (B) kann man die Constante $X = A$ successive aus allen Integrationszeichen heraustreten lassen, so daß man hat:

$$y = A e^{r_1 x} \int e^{(r_2 - r_1)x}\, dx \int e^{(r_3 - r_2)x}\, dx \ldots \int e^{r_n - r_{n-1})x}\, dx \int e^{-r_n x}\, dx$$
$$+ C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}.$$

Nun ist aber:

$$\int e^{-r_n x} dx = \frac{-1}{r_n} e^{-r_n x},$$

$$\int e^{(r_n - r_{n-1})x}\, dx \int e^{-r_n x}\, dx = \frac{-1}{r_n} \int e^{-r_{n-1} x}\, dx = \frac{1}{r_n r_{n-1}} e^{-r_{n-1} x},$$

. . . . . .

und wenn man diese successiven Integrationen bis zu dem ersten Integralzeichen fortsetzt, die Multiplication des letzten Integrales mit $e^{r_1 x}$ verrichtet und bemerkt, daß das Product aller Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, r_n$ der Hülfsgleichung dem letzten Gliede A_n

derselben gleich ist; so erhält man für das vollständige Integral der gegebenen Differenzialgleichung:

$$y = \frac{A}{A_n} + C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_{n-1} e^{r_{n-1} x} + C_n e^{r_n x}.$$

Wenn zwei Wurzeln der Hülfsgleichung imaginär und gleich $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ wären, so hätte man:

$$y = \frac{A}{A_n} + e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + C_3 e^{r_3 x} + \ldots + C_n e^{r_n x},$$

und wenn alle Wurzeln der Hülfsgleichung einander gleich wären, so giebt die Gleichung (B), wenn man wieder die Constante $X = A$ aus sämmtlichen Integrationszeichen herausſetzt:

$$y = e^{r_1 x}(A \int dx \int dx \ldots \int e^{-r_1 x} dx + C_1 \int\int\int \ldots \int dx^{n-1} + C_2 \int\int\int \ldots dx^{n-2} + \ldots C_n).$$

Es ist aber:

$$A \int dx \int dx \ldots \int e^{-r_1 x} dx = \pm \frac{A}{r_1^n} e^{-r_1 x},$$

und außerdem $r_1^n = \pm A_n$; folglich:

$$y = \frac{A}{A_n} + e^{r_1 x}(C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots C_{n-1} x + C_n).$$

§. 248. — II. Die Differenzialgleichung hat einen veränderlichen zweiten Theil.

Beispiel 1. Es sei die Differenzialgleichung:

$$D_x^3 y - 7a^2 D_x^2 y + 6a^3 y = x^2$$

gegeben, so ist die Hülfsgleichung:

$$r^3 - 7a^2 r + 6a^3 = 0$$

und ihre drei Wurzeln sind:

$$r_1 = -3a,\ r_2 = 2a,\ r_3 = a.$$

Wenn man wieder die Formel (B) anwendet, so findet man:

$$y = e^{-3ax} \int e^{5ax} dx \int e^{-ax} dx \int x^2 e^{-ax} dx + C_1 e^{-3ax} + C_2 e^{2ax} + C_3 e^{ax}.$$

Nun ist aber:

$$\int x^2 e^{-ax} dx = -\frac{e^{-ax}}{a}\left(x^2 + \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right),$$

folglich:

$$\int e^{-ax}\,dx \int x^2 e^{-ax}\,dx = \frac{e^{-2ax}}{2a^3}\left(x^2+\frac{3x}{a}+\frac{7}{2a^2}\right),$$

$$\int e^{5ax}dx \int e^{-ax}dx \int x^2 e^{-ax}dx = \frac{e^{-3ax}}{6a^3}\left(x^2+\frac{7x}{3a}+\frac{49}{18a^2}\right)$$

und wenn man substituirt; so erhält man für das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung:

$$y = \frac{1}{6a^3}\left(x^2+\frac{7x}{3a}+\frac{49}{18a^2}\right)+C_1e^{-3ax}+C_2e^{2ax}+C_3e^{ax},$$

Beispiel 2. Es sei die Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y + aD_x y - 6a^2 y = b^x$$

gegeben, so ist die Hülfsgleichung:

$$r^2+ar-6a^2=0$$

und ihre beiden Wurzeln sind $r_1=2a$, $r_2=-3a$. Die Formel (B) giebt:

$$y = e^{2ax}\int e^{-5ax}dx \int b^x e^{3ax}dx + C_1e^{2ax}+C_2e^{-3ax};$$

es ist aber:

$$\int b^x e^{3ax}dx = \int (be^{3a})^x dx = \frac{(be^{3a})^x}{lb+3a},$$

folglich:

$$\int e^{-5ax}dx \int b^x e^{3ax}dx = \frac{(be^{-2a})^x}{(lb+3a)(lb-2a)},$$

und wenn man substituirt; so erhält man als das gesuchte Integral:

$$y = \frac{b^x}{(lb+3a)(lb-2a)}+C_1e^{2ax}+C_2e^{-3ax}.$$

Beispiel 3. Die gegebene Differenzialgleichung sei:

$$D_x^3 y - 3D_x^2 y + 7D_x y - 5y = x^2,$$

so ist die Hülfsgleichung:

$$r^3-3r^2+7r-5=0$$

und ihre drei Wurzeln sind:

$$r_1=1+2\sqrt{-1},\ r_2=1-2\sqrt{-1},\ r_3=1.$$

Ferner ist:

$$\frac{1}{\lambda_1} = (r_1 - r_2)(r_1 - r_3) = -8,$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = (r_2 - r_1)(r_2 - r_3) = -8,$$

$$\frac{1}{\lambda_3} = (r_3 - r_1)(r_3 - r_2) = \quad 4$$

und die Formel (B) giebt:

$$y = -\frac{e^{-x}}{4}[\cos 2x\,(C_1 + \int x^2 e^{-x}\cos 2x dx) +$$
$$\sin 2x\,(C_2 + \int x^2 e^{-x}\sin 2x dx)] + \frac{e^x}{4}(C_3 + \int x^2 e^{-x} dx).$$

Um das gesuchte allgemeine Integral unter endlicher Form zu erhalten, braucht man nur die aus den oben erwähnten Formeln abgeleiteten Werthe der beiden Integrale:

$$\int x^2 e^{-x}\cos 2x dx,\ \int x^2 e^{-x}\sin 2x dx$$

zu substituiren.

Beispiel 4. Die gegebene Differenzialgleichung sei:

$$D_x^2 y + A_1 D_x y + A_2 y = X,$$

so ist die Hülfsgleichung:

$$r^2 + A_1 r + A_2 = 0,$$

und wenn man annimmt, daß ihre beiden Wurzeln imaginär sind nämlich:

$$r_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1},\ r_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1};$$

so hat man:

$$r_1 - r_2 = 2\beta\sqrt{-1},\ r_2 - r_1 = -2\beta\sqrt{-1},$$

$$y = \frac{e^{\alpha x}}{\beta}[\sin\beta x\,(C_1 + \int X e^{-\alpha x}\cos\beta x dx)$$
$$+ \cos\beta x\,(C_2 - \int X e^{-\alpha x}\sin\beta x dx)].$$

Es sei z. B.:

$$D_x^2 y + 2D_x y + 2y = x,$$

so ist:

$$A_1 = 2,\ A_2 = 2,\ X = x,\ \alpha = -1,\ \beta = 1,$$

$$y = \frac{C_1\sin x + C_2\cos x}{e^x} + \tfrac{1}{2}(x - 1).$$

Beispiel 5. Die gegebene Differenzialgleichung sei:

$$D_x^2 y + Ay = X,$$

welches die Gleichung des berühmten astronomischen Problemes von den drei Körpern ist; so ist $r^2 + A = 0$ die Hülfsgleichung; ferner:

$$r_1 = \sqrt{A}\sqrt{-1},\ r_2 = -\sqrt{A}\sqrt{-1},\ \alpha = 0,\ \beta = \sqrt{A},$$

und man hat:

$$y\sqrt{A} = \sin(x\sqrt{A})[C_1 + \int X\cos(x\sqrt{A})dx + \cos(x\sqrt{A})[C_2 - \int X\sin(x\sqrt{A})]dx.$$

Beispiel 6. Es sei:

$$D_x^4 y - 8D_x^3 y + 23D_x^2 y - 28D_x y + 12y = x$$

die gegebene Differenzialgleichung, so ist die Hülfsgleichung:

$$r^4 - 8r^3 + 23r^2 - 28r + 12 = 0$$

und ihre Wurzeln sind:

$$r_1 = 2,\ r_2 = 2,\ r_3 = 1,\ r_4 = 3.$$

Die Gleichung (A) giebt ferner:

$$y = e^{2x}\left(\int dx\int e^{-x}dx\int e^{2x}dx\int xe^{-3x}dx + C_1\int dx\int e^{-x}dx\int e^{2x}dx + C_2\int dx\int e^{-x}dx + C_3\int dx + C_4\right)$$

und wenn man entwickelt:

$$y = \frac{x}{12} + \frac{7}{36} + C_1 xe^{2x} + C_2 e^{2x} x + C_3 e^x + C_4 e^{3x}.$$

Beispiel 7. Die gegebene Differenzialgleichung sei:

$$D_x^n y - nr_1 D_x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} r_1^2 D_x^{n-2} y + \ldots - nr_1^{n-1} D_x y + r_1^n y = X,$$

so ist die Hülfsgleichung $(r - r_1)^n = 0$ und alle Wurzeln derselben sind einander gleich. Bedient man sich in diesem Falle wieder der Formel (A), so findet man:

$$y = \frac{e^{r_1 x}}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[x^{n-1}\int Xe^{-r_1 x}dx - (n-1)x^{n-2}\int Xxe^{-r_1 x}dx + \ldots \pm \int Xx^{n-1}e^{-r_1 x}dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n\right].$$

Beispiel 8. Es sei:

$$D_x^n y + a^n y = X$$

die gegebene Differenzialgleichung, so ist $r^n + a^n = 0$ die Hülfsgleichung, und wenn n eine ungerade Zahl ist; so ist $r + a$ einer der Factoren des ersten Grades oder $r = -a$ eine der Wurzeln und alle übrigen Factoren werden durch den Ausdruck:

$$r^2 - 2ar \cos \vartheta + a^2$$

gegeben, worin $\vartheta = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ ist. Der der reellen Wurzel entsprechende Theil des Integrales ist:

$$\frac{C}{na^{n-1}} e^{-ax} \int X e^{ax} dx,$$

während jedes Paar imaginärer Wurzeln ein particuläres Integral:

$$\frac{2e^{ax\cos\vartheta}}{na^{n-1}} \left[\begin{array}{l} C_1 \cos(\vartheta + ax\sin\vartheta) \int X e^{-ax\cos\vartheta} \cos(ax\sin\vartheta)\, dx \\ + C_2 \sin(\vartheta + ax\sin\vartheta) \int X e^{-ax\cos\vartheta} \sin(ax\sin\vartheta)\, dx \end{array} \right]$$

giebt, und um das gesuchte Integral zu bekommen, braucht man nur die Summe aller der Glieder zu bilden, welche man erhält, wenn man für ϑ successive alle Vielfache von $\frac{\pi}{n}$, welche kleiner sind als π, setzt. Wenn n eine ungerade Zahl ist, so ist eins dieser Vielfachen $= \frac{n\pi}{n} = \pi$, welchem einerseits die reelle Wurzel $r = -a$ und andererseits das Glied:

$$2 \frac{e^{-ax}}{na^{n-1}} \int X e^{ax} dx$$

entspricht, welches man auf die Hälfte reduciren muß, weil nicht $a^2 + 2ar + r^2$, sondern $a + r$ ein Factor des ersten Theiles der Gleichung $x^n + a^n = 0$ ist.

Wenn $X = 0$ ist, so wird jedes einem Factor des zweiten Grades entsprechende Glied:

$$\frac{-2e^{ax\cos\vartheta}}{na^{n-1}} [C_1 \cos(\vartheta + ax\sin\vartheta) + C_2 \sin(\vartheta + ax\sin\vartheta)],$$

welches man auf folgende Form bringen kann:

$$Ce^{ax\cos\vartheta} \cos(c + ax\sin\vartheta),$$

wo c einen beliebigen constanten Winkel bezeichnet.

Beispiel 9. Es sei:

$$D_x^n y - a^n y = X$$

die gegebene Differenzialgleichung, so ist $r^n - a^n = 0$ die Hülfsgleichung, einer der Factoren des ersten Grades $= r - a$ oder eine der Wurzeln derselben $r = a$, und das entsprechende Glied des Integrales ist:

$$\frac{-1}{na^{n-1}}\, e^{ax} \int X e^{-ax}\, dx.$$

Wenn n eine ungerade Zahl ist, so ist $a+r$ auch ein Factor, $r=-a$ eine Wurzel und der entsprechende Theil des Integrales:

$$\frac{1}{na^{n-1}}\, e^{-ax} \int X e^{ax}\, dx.$$

Jedes Paar imaginärer Wurzeln wird durch den Factor des zweiten Grades:

$$r^2 - 2ar\cos\vartheta + a^2$$

gegeben, worin $\vartheta = \frac{2k\pi}{n}$ ist, und der entsprechende Theil des Integrales ist:

$$\frac{2e^{ax\cos\vartheta}}{na^{n-1}} \begin{bmatrix} C_1\cos(\vartheta + ax\sin\vartheta) \int X e^{-ax\cos\vartheta} \cos(ax\sin\vartheta)\, dx \\ + C_2 \sin(\vartheta + ax\sin\vartheta) \int X e^{-ax\cos\vartheta} \sin(ax\sin\vartheta)\, dx \end{bmatrix},$$

und um endlich das gesuchte Integral zu erhalten, braucht man nur die Summe aller der Glieder zu bilden, welche man erhält, wenn man für ϑ successive alle geraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$, welche kleiner sind als π, setzt. Wenn n eine gerade Zahl ist, so sind 0 und $\frac{2n\pi}{2} = 2\pi$ zwei dieser Vielfachen, welchen die reellen Wurzeln $r=a$, $r=-a$ und die Glieder des gesuchten Integrales:

$$\frac{-2}{na^{n-1}}\, e^{ax} \int X e^{-ax}\, dx,\quad \frac{2}{na^{n-1}}\, e^{-ax} \int X e^{ax}\, dx$$

entsprechen, welche man wieder aus dem bereits angegebenen Grunde auf die Hälfte reduciren muß.

Beispiel 10. Die gegebene Differenzialgleichung sei:

$$D_x^n y + D_x^{n-1} y + \ldots + D_x^3 y + D_x^2 y + D_x y + y = X,$$

so ist die Hülfsgleichung:

$$r^n + r^{n-1} + \ldots + r^4 + r^3 + r^2 + r = 0$$

oder:

$$\frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} = 0.$$

Wenn $n+1$ eine gerade Zahl ist, so ist $r=-1$ eine der Wurzeln dieser Gleichung, welcher das Glied:

$$\frac{2}{n+1}\, e^{-x} \int X e^{x}\, dx$$

entspricht. Jedes Paar imaginärer Wurzeln wird durch den Factor des zweiten Grades:

$$r^2 - 2r\cos\vartheta + 1$$

gegeben, worin $\vartheta = \frac{2k\pi}{n+1}$ ist. Der entsprechende Theil des Integrales ist:

$$\frac{-4}{n+1} e^{x\cos\vartheta} \sin\tfrac{1}{2}\vartheta \begin{bmatrix} C_1 \sin\tfrac{1}{2}(3\vartheta + 2x\sin\vartheta) \int X e^{-x\cos\vartheta} \cos(x\sin\vartheta)\,dx \\ -C_2 \cos\tfrac{1}{2}(3\vartheta + 2x\sin\vartheta) \int X e^{-x\cos\vartheta} \sin(x\sin\vartheta)\,dx \end{bmatrix}$$

und um das gesuchte Integral zu erhalten, braucht man nur die Summe aller der Glieder zu bilden, welche man erhält, wenn man für ϑ successive die geraden Vielfachen von $\frac{\pi}{n+1}$ setzt.

Wenn $X = 0$ wäre, so würde der einem Paare imaginärer Wurzeln entsprechende Theil des Integrales:

$$e^{x\cos\vartheta}[C_1 \sin\tfrac{1}{2}(3\vartheta + 2x\sin\vartheta) + C_2 \cos\tfrac{1}{2}(3\vartheta + 2x\sin\vartheta),$$

oder einfacher:

$$Ce^{x\cos\vartheta} \cos(c + x\sin\vartheta),$$

wo c ein beliebiger Winkel und C eine willkührliche Constante ist.

Beispiel 11. Es sei:

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y + A_3 D_x^{n-3} y + \ldots$$
$$+ A_{n-1} D_x y + A_n y = ax^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

die gegebene Differenzialgleichung, so wollen wir derselben durch einen Werth von der Form:

$$y_1 = bx^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m$$

zu genügen suchen. Substituirt man für y diesen Werth, so findet man:

$$\left.\begin{matrix} A_n b x^m + A_n b_1 \\ + A_{n-1} b m \end{matrix}\right| x^{m-1} + \ldots = ax^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

und zur Bestimmung der $m+1$ Coefficienten b, b_1, ... b_m hat man die $n+1$ Gleichungen des ersten Grades:

$$A_n b = a, \quad A_n b_1 + A_{n-1} mb = a_1, \ldots.$$

Kennt man y_1, so wird das allgemeine Integral vollständig gemacht, wenn man zu diesem Werthe y_1 das Integral z der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil:

$$D_x^n z + A_1 D_x^{n-1} z + \ldots + A_{n-1} D_x z + A_n z = 0$$

addirt.

Beiſpiel 12. Die gegebene Differenzialgleichung ſei:

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = A\cos mx + B\sin mx,$$

wo A, B, m gegebene Conſtanten ſind. Setzt man:

$$y_1 = a\cos mx + b\sin mx$$

und ſubſtituirt, ſo erhält man eine Gleichung von der Form:

$$a(G\cos mx + H\sin mx) + b(K\cos mx + L\sin mx) = A\cos mx + B\sin mx,$$

wo G, H, K, L von m abhängige Conſtanten ſind. Dieſer letzten Gleichung wird daher genügt, wenn man hat:

$$a = \frac{AL - BK}{GL - HK}, \qquad b = \frac{BG - AH}{GL - HK},$$

und dieſe Werthe von a, b ſind ſo lange zuläſſig, als der Nenner $GL - HK$ nicht $= 0$ iſt, und wir werden ſogleich ſehen, wie man verfahren muß, wenn dieſer Nenner verſchwindet.

Wenn der aus zwei oder mehreren Gliedern von derſelben Form beſtehende zweite Theil X folgende Form hätte:

$$X = A\cos mx + B\sin mx + A'\cos m'x + B'\cos m'x + \ldots,$$

ſo könnte man das particuläre Integral y_1 mit der größten Leichtigkeit erhalten, und wenn man $y = u + v$ ſetzt, wo u, v zwei neue Veränderliche ſind, und in die gegebene Gleichung ſubſtituirt; ſo kann man dieſelbe in zwei oder mehrere neue Gleichungen:

$$D_x^n u + A_1 D_x^{n-1} u + \ldots + A_n u = A\cos mx + B\sin mx,$$

$$D_x^n v + A_1 D_x^{n-1} v + \ldots + A_n v = A'\cos m'x + B'\sin m'x$$

zerlegen. Verfährt man auf die bereits angegebene Weiſe, ſo kann man zwei particuläre Integrale:

$$u_1 = a\cos mx + b\sin mx, \quad v_1 = a'\cos m'x + b'\sin m'x$$

dieſer Gleichungen beſtimmen, und die Summe $y = u_1 + v_1$ dieſer beiden Integrale verificirt offenbar die gegebene Differenzialgleichung, deren allgemeines Integral durch den auf die weiter oben angegebene Weiſe beſtimmten Werth von z vervollſtändigt wird.

Beiſpiel 13. Die gegebene Differenzialgleichung ſei:

$$D_x^2 y + y = \cos x,$$

ſo findet man durch Anwendung der vorhergehenden Methode, daß der Nenner der Ausdrücke von a, b Null wird, und um in dieſem

Falle den wahren Werth des Integrales zu erhalten, wollen wir von der Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y + y = \cos nx$$

ausgehen; so findet man für ein particuläres Integral dieser Gleichung:

$$a = \frac{1}{1-n^2},\quad b = 0,\quad y_1 = \frac{\cos nx}{1-n^2},$$

und wenn man das Integral der Differenzialgleichung $D_x^2 z + z = 0$, welches offenbar gleich $C' \cos x + C'' \sin x$ ist, wo C', C'' zwei willkührliche Constanten sind, mit z bezeichnet; so ist das allgemeine Integral der Differenzialgleichung $D_x^2 y + y = \cos nx$ folgendes:

$$y = \frac{\cos nx}{1-n^2} + C' \cos x + C'' \sin x,$$

oder wenn man $C' = C' - \frac{1}{1-n^2}$ setzt:

$$y = \frac{\cos nx - \cos x}{1-n^2} + C' \cos x + C'' \sin x.$$

Nun erscheint aber der Ausdruck $\frac{\cos nx - \cos x}{1-n^2}$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ für $n = 1$, und der wahre Werth desselben ist $\frac{x \sin x}{2}$; folglich ist das allgemeine Integral der Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y + y = \cos x$$

folgendes:

$$y = \frac{x \sin x}{2} + C' \cos x + C'' \sin x.$$

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man den d'Alembert'schen Kunstgriff anwendet; denn setzt man $n = 1 + \varepsilon$, so verwandelt sich das allgemeine Integral der Differenzialgleichung

$$D_x^2 y + y = \cos nx$$

in folgendes:

$$y = \frac{\cos(x + \varepsilon x)}{-\varepsilon(2+\varepsilon)} + C' \cos x + C'' \sin x.$$

Nun ist aber:

$$\frac{\cos(x+\varepsilon x)}{-\varepsilon(2+\varepsilon)} = \frac{\cos x \cos \varepsilon x - \sin x \sin \varepsilon x}{-\varepsilon(2+\varepsilon)}$$

und wenn man $\cos \varepsilon x$, $\sin \varepsilon x$ entwickelt und $C' + \frac{1}{-\varepsilon(2-\varepsilon)} = C'$ setzt:

$$y = \cos x (C' + A\varepsilon) + \sin x \left(C'' + \frac{x}{2+\varepsilon} + B\varepsilon \right),$$

wo A, B zwei Coefficienten sind, welche für $\varepsilon = 0$, $n = 1$ nicht unendlich werden. Man hat also endlich:

$$y = \frac{x \sin x}{2} + C' \cos x + C'' \sin x,$$

was bereits bekannt war.

Acht und dreißigste Vorlesung.

Integration einiger linearer Differenzialgleichungen der n^{ten} Ordnung mit veränderlichen Coefficienten.

---

§. 249. Wir wollen zunächst die Differenzialgleichung:

$$D_x^n y + \frac{A_1}{a+bx} D_x^{n-1} y + \frac{A_2}{(a+bx)^2} D_x^{n-2} y + \ldots + \frac{A_n y}{(a+bx)^n} = 0$$

betrachten. Wenn man setzt:

$$y = (a+bx)^r,$$

so kommt:

$$r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1) + A_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + A_{n-1} r + A_n = f(r) = 0$$

und hieraus folgt, daß der Ausdruck $y=(a+bx)^r$ der gegebenen Gleichung genügt, wenn man für r irgend eine der n Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_n$ der Hülfsgleichung $f(r)=0$ setzt. Die n Größen:

$$(a+bx)^{r_1}, \quad (a+bx)^{r_2}, \ldots, \quad (a+bx)^{r_n}$$

sind folglich eben so viele particuläre Integrale der gegebenen Differenzialgleichung, und das allgemeine Integral derselben ist:

$$y = C_1 (a+bx)^{r_1} + C_2 (a+bx)^{r_2} + \ldots + C_n (a+bx)^{r_n}.$$

Vermittelst einer ganz ähnlichen Methode, wie die in Vorlesung 36 befolgte, kann man leicht von diesem Integrale zu dem der Differenzialgleichung:

$$D_x^n y + \frac{A_1}{a+bx} D_x^{n-1} y + \frac{A_2}{(a+bx)^2} D_x^{n-2} y \ldots + \frac{A_n y}{(a+bx)^n} = X$$

übergehen, und wenn einige der Wurzeln $r_1, r_2, \ldots, r_n$ einander gleich, oder imaginär würden; so müßte man ganz dieselbe Transformationsmethode anwenden, wie die, welche wir bei einer linearen Differenzialgleichung mit constanten Coefficienten angewandt haben.

Wir wollen z. B. die Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y + \frac{A_1}{a+bx} D_x y + \frac{A_2 y}{(a+bx)^2} = 0$$

nehmen, so ist die Hülfsgleichung:

$$r(r-1) + A_1 r + A_2 = 0$$

und wenn r_1, r_2 die beiden als ungleich vorausgesetzten Wurzeln derselben sind; so ist das gesuchte Integral:

$$y = C_1 (a+bx)^{r_1} + C_2 (a+bx)^{r_2}.$$

Um zu erfahren, was stattfindet, wenn diese Wurzeln einander gleich werden, wollen wir das gefundene Integral auf folgende Form bringen:

$$y = C_1 \varphi(r_1) + C_2 \varphi(r_2).$$

und setzen:

$$r_2 = r_1 + \varepsilon;$$

so ergiebt sich:

$$\varphi(r_2) = \varphi(r_1 + \varepsilon) = \varphi(r_1) + \varepsilon \varphi'(r_1 + \vartheta\varepsilon),$$

$$y = (C_1 + C_2)\varphi(r_1) + C_2 \varepsilon \varphi'(r_1 + \vartheta\varepsilon) = C' \varphi(r_1) + C'' \varphi'(r_1 + \vartheta\varepsilon)$$

und wenn man zu der Grenze übergeht und bemerkt, daß:

$$\varphi'(r) = D_r (a+bx)^r = (a+bx)^r 1(a+bx)$$

ist; so sieht man, daß das Integral, wenn die beiden Wurzeln einander gleich sind, sich in folgendes verwandelt:

$$y = (a+bx)^{r_1} [C' + C'' 1(a+bx)].$$

Ebenso ergiebt sich, daß, wenn drei Wurzeln r_1, r_2, r_3 einander gleich sind, das allgemeine Integral folgendes ist:

$$y = (a+bx)^{r_1} [C' + C'' 1(a+bx) + C''' 1(a+bx)^2] + C_4 (a+bx)^{r_4} + \ldots.$$

§. 250. Als zweite Anwendung wollen wir die Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y + X_1 D_x y + X_2 y = X$$

betrachten, so brauchen wir bekanntlich nur ein particuläres Integral der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil:

$$D_x^2 z + X_1 D_x z + X_2 z = 0$$

zu kennen, um die Differenzialgleichung mit einem zweiten Theile auf eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung zurückzuführen. Es sei z_1 dieses particuläre Integral, und wir wollen $y = uz_1$ setzen, so ergiebt sich durch Differenzirung:

$$D_x y = uD_x z_1 + z_1 D_x u,$$
$$D_x^2 y = uD_x^2 z_1 + 2D_x z_1 D_x u + z_1 D_x^2 u.$$

Substituirt man in die gegebene Gleichung und reducirt, so findet man:

$$(2D_x z_1 + X_1 z_1) D_x u + z_1 D_x^2 u = X,$$

und wenn man $D_x u = v$ setzt:

$$z_1 D_x v + (2D_x z_1 + X_1 z_1) v = X.$$

Aus dieser letzten Gleichung ergiebt sich der Werth von v, und man erhält:

$$u = C + \int v dx, \quad y = z_1 (C + \int v dx).$$

Beispiel. Es sei:

$$D_x^2 y + X_2 y = X,$$

so ist die Gleichung mit z:

$$D_x^2 z + X_2 z = 0$$

und die Gleichung mit v wird:

$$z_1 D_x v + 2v D_x z_1 = X, \text{ oder } z_1 dv + 2v dz_1 = X dx.$$

Multiplicirt man mit z_1 und integrirt, so erhält man:

$$vz_1^2 = C_1 + \int_{x_0}^{x} X z_1 dx,$$
$$u = C_2 + \int \frac{C_1 + \int X z_1 dx}{z_1^2} dx,$$
$$y = C_2 z_1 + z_1 \int \frac{C_1 + \int X z_1 dx}{z_1^2} dx.$$

Das allgemeine Integral der Gleichung mit z ist:

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_1 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{z_1^2}.$$

Um die Ordnung der Differenzialgleichung ohne zweiten Theil zu erniedrigen, braucht man bekanntlich keinen particulären Werth von z zu kennen; aber die neue Differenzialgleichung der ersten Ordnung ist nicht mehr linear, und man braucht nur zu setzen:

$$z = e^{\int_{x_0}^{x} t\,dx},$$

woraus folgt:

$$D_x z = te^{\int_{x_0}^{x} t\,dx} = tz,$$

$$D_x^2 z = t D_x z + z D_x t = (D_x t + t^2) z, \ldots$$

Substituirt man diese Werthe in die gegebene Differenzialgleichung, so wird z ein gemeinschaftlicher Factor und es bleibt eine Differenzialgleichung mit t von der ersten Ordnung, welche aber nicht linear ist, weil sie Potenzen von t enthält.

Beispiel. Es sei:

$$D_x^2 z + X_2 z = 0,$$

so ist die Gleichung mit t:

$$D_x t + t^2 + X_2 = 0.$$

Da ferner $D_x z = z' = tz$ ist, so hat man:

$$t = \frac{z'}{z}$$

und es scheint, daß der Werth von t, wie der von z, zwei Constanten enthält, was nicht der Fall sein kann, weil die Gleichung mit t von der ersten Ordnung ist; allein die beiden Constanten des Werthes von t reduciren sich wirklich auf eine einzige. Denn der Werth von z wird durch die Gleichung:

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_1 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{z_1^2},$$

oder:

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2$$

gegeben, wenn man setzt:

$$z_2 = z_1 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{z_1^2},$$

und man hat folglich:

$$t = \frac{C_1 z'_1 + C_2 z'_2}{C_1 z_1 + C_2 z_2} = \frac{z'_1 + \frac{C_2}{C_1} z'_2}{z_1 + \frac{C_2}{C_1} z_2} = \frac{z'_1 + C z'_2}{z_1 + C z_2}.$$

§. 251. Wir wollen $X_2 = -ax^m$ setzen, wo a ein constanter Coefficient ist, und das Integral der Differenzialgleichung:

$$D_x^2 z - ax^m z = 0,$$

suchen; so wird die Gleichung mit t:

$$D_x t + t^2 = ax^m, \text{ oder } dt + t^2 dx = ax^m dx,$$

welches die Riccati'sche Differenzialgleichung ist, die man folglich integriren kann, wenn man die Differenzialgleichung:

$$D_x^2 z - ax^m z = 0$$

integriren kann.

Zu diesem Zwecke wollen wir setzen:

$$z = \int_0^\infty e^{-x^\alpha u} \varphi(u)\, du$$

und sehen, ob wir die Zahl α und die Function $\varphi(u)$ so bestimmen können, daß der Gleichung mit z genügt wird. Es ist:

$$D_x z = -\alpha x^{\alpha-1} \int_0^\infty u\varphi(u) e^{-x^\alpha u} du,$$

$$D_x^2 z = \alpha^2 x^{2\alpha-2} \int_0^\infty u^2 \varphi(u) e^{-x^\alpha u} du - \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} \int_0^\infty u\varphi(u) e^{-x^\alpha u} du$$

und wenn man in die Differenzialgleichung:

$$D_x^2 z - ax^m z = 0$$

substituirt und ausdrückt, daß sie verificirt wird; so findet man zunächst, daß $\alpha - 2 = m$ oder $\alpha = m + 2$ sein und $\varphi(u)$ durch die Gleichung:

$$\int_0^\infty [\alpha^2 x^\alpha u^2 - \alpha(\alpha-1)u - a] \varphi(u) e^{-x^\alpha u} du = 0$$

bestimmt werden muß. Nun kann man aber $\varphi(u)$ so annehmen, daß das vorhergehende Integral, zwischen beliebigen Grenzen genommen, $= \psi(u) e^{-x^\alpha u}$ ist; denn wenn man die beiden Theile der Gleichung:

$$\int [\alpha^2 x^\alpha u^2 - \alpha(\alpha-1)u - a] \varphi(u) e^{-x^\alpha u} du = \psi(u) e^{-x^\alpha u}$$

differenzirt, so findet man:

$$[\alpha^2 x^\alpha u^2 - \alpha(\alpha-1)u - a] \varphi(u) = -x^\alpha \psi(u) + \psi'(u),$$

und dieſe letzte Gleichung wird bei jedem Werthe von α erfüllt, wenn man hat:

$$\psi(u) = -\alpha^2 u^2 \varphi(u), \quad \psi'(u) = -[\alpha(\alpha-1)u + a]\varphi(u),$$

$$\frac{\psi'(u)}{\psi(u)} = \frac{\alpha-1}{\alpha u} + \frac{a}{\alpha^2 u^2}, \quad l\psi(u) = \frac{\alpha-1}{\alpha} lu - \frac{a}{\alpha^2 u} + C,$$

$$\psi(u) = Cu^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} e^{-\frac{a}{\alpha^2 u}}.$$

Man hat folglich:

$$\int [\alpha^2 x^\alpha u^2 - \alpha(\alpha-1)u - a]\varphi(u) e^{-x^\alpha u} du = Cu^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} e^{-x^\alpha u - \frac{a}{\alpha^2 u}},$$

und das zwiſchen den Grenzen 0, ∞ genommene beſtimmte Integral verſchwindet nothwendig, weil der zweite Theil der vorhergehenden Gleichung an dieſen beiden Grenzen verſchwindet. Aus den Gleichungen:

$$\psi(u) = Cu^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} e^{-\frac{\beta}{\alpha^2 u}}, \quad \psi(u) = -\alpha^2 u^2 \varphi(u)$$

ergiebt ſich ferner:

$$\varphi(u) = -\frac{C}{\alpha^2} u^{-1-\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{a}{\alpha^2 u}} = C' u^{-1-\frac{1}{\alpha}} e^{-\frac{\alpha}{\alpha^2 u}},$$

und wenn man für $\varphi(u)$ ſeinen Werth ſubſtituirt; ſo findet man endlich, daß der Ausdruck:

$$z = C' \int_0^\infty u^{-1-\frac{1}{\alpha}} e^{-x^\alpha u - \frac{a}{\alpha^2 u}} du,$$

die gegebene Differenzialgleichung:

$$D_x^2 z = ax^m z$$

verificirt, wenn $\alpha = m + 2$ iſt. Wenn man der Kürze wegen $\frac{a}{\alpha^2} = k^\alpha$ ſetzt und $u^{\frac{1}{\alpha}}$ in u verwandelt, ſo findet man, daß der Werth von z die einfachere Form:

$$z = C\alpha \int_0^\infty e^{-\frac{x^\alpha}{u^\alpha} - k^\alpha u^\alpha} du$$

annimmt, und wenn man endlich in dieſem letzten Ausdrucke u in $\frac{u}{k}$ umſetzt, wodurch die Grenzen ebenfalls nicht geändert werden; ſo erhält man:

$$z = \frac{C\alpha}{k} \int_0^\infty e^{-u^\alpha - \frac{k^\alpha x^\alpha}{u^\alpha}} du,$$

§. 252. Es läßt sich leicht zeigen, daß dieser Werth von z wirklich der gegebenen Differenzialgleichung genügt. Denn setzt man zunächst:

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-u^\alpha - \frac{x^\alpha}{u^\alpha}} du,$$

oder wenn man u in $u^{\frac{1}{\alpha}}$ verwandelt:

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \int u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u - \frac{x^\alpha}{u}} du;$$

so ergeben sich leicht einige Eigenschaften der Function $f(x)$. Differenzirt man die beiden Theile der vorhergehenden Gleichung in Beziehung auf x, so findet man:

$$f'(x) = -x^{\alpha-1} \int_0^\infty u^{\frac{1}{\alpha}-2} e^{-u - \frac{x^\alpha}{u}} du,$$

und wenn man mit x multiplicirt:

$$xf'(x) = -\int_0^\infty u^{\frac{1}{\alpha}} e^{-u} x^\alpha e^{-\frac{x^\alpha}{u}} \frac{du}{u^2}.$$

Wir wollen nun theilweise integriren, und bemerken: 1) daß, wenn man setzt:

$$x^\alpha e^{-\frac{x^\alpha}{u}} \frac{du}{u^2} = dq,$$

man hat:

$$e^{-\frac{x^\alpha}{u}} = q$$

und 2) wenn man ferner setzt:

$$u^{\frac{1}{\alpha}} e^{-u} = p,$$

so ist:

$$xf'(x) = -\int_0^\infty pdq = -pq + \int_0^\infty qdp = \int_0^\infty qdp;$$

denn $qp = u^{\frac{1}{\alpha}} e^{-u - \frac{x^\alpha}{u}}$ verschwindet für $u = 0$ und $u = \infty$.

Ferner hat man:

$$dp = \frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u} du - u^{\frac{1}{\alpha}} e^{-u} du,$$

$$qdp = \frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u-\frac{x^\alpha}{u}} du - u^{\frac{1}{\alpha}} e^{-u-\frac{x^\alpha}{u}} du,$$

und folglich:

$$\int qdp = xf'(x) = f(x) - \int_0^\infty u^{\frac{1}{\alpha}} e^{-u-\frac{x^\alpha}{u}} du.$$

Differenzirt man nochmals in Beziehung auf x, so erhält man:

$$xf''(x) = \alpha x^{\alpha-1} \int_0^\infty u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u-\frac{x^\alpha}{u}} du = \alpha^2 x^{\alpha-1} f(x)$$

und $f(x)$ genügt der Gleichung:

$$f''(x) = \alpha^2 x^{\alpha-2} f(x),$$

welche mit der gegebenen Differenzialgleichung schon große Aehnlichkeit hat, aber nicht so allgemein ist, weil sie $a = \alpha^2 = (m+2)^2$ voraussetzt. Um ihr die erforderliche Allgemeinheit zu geben, wollen wir setzen:

$$z = f(kx);$$

so ist:

$$D_x^2 z = k^2 f''(kx),$$

$$\frac{D_x^2 z}{k^2} = \alpha^2 (kx)^{\alpha-2} z, \quad D_x^2 z = k^\alpha \alpha^2 x^{\alpha-2} z,$$

und wenn man $k^\alpha = \frac{a}{\alpha^2}$ setzt:

$$D_x^2 z = ax^{\alpha-2} z = ax^m z.$$

Es ist also gewiß, daß der Werth:

$$z = Cf(kx) = C \int_0^\infty e^{-u^\alpha - \frac{k^\alpha x^\alpha}{u^\alpha}} du = C \int_0^\infty e^{-u^\alpha - \frac{ax^\alpha}{\alpha^2 u^\alpha}} du$$

die gegebene Differenzialgleichung:

$$D_x^2 z = ax^{\alpha-2} z.$$

verificirt.

Beispiel. Es sei $\alpha = 2$, so reducirt sich diese Differenzialgleichung auf $D_x^2 z = az$, und man hat:

$$z = C\int_0^\infty e^{-u^2-\frac{ax^2}{4u^2}}\,du.$$

Nun iſt aber:

$$\int_0^\infty e^{-u^2-\frac{x^2}{4u^2}} = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-x},$$

und folglich:

$$\int_0^\infty e^{-u^2-\frac{ax^2}{4u^2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-x\sqrt{a}}.$$

Mithin iſt der Werth:

$$z_1 = C_1\sqrt{\pi}\,e^{-x\sqrt{a}}$$

ein particuläres Integral der Differenzialgleichung $D_x^2 z = az$; aber wie wir geſehen haben, iſt das allgemeine Integral derſelben:

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_1\int\frac{dx}{z_1^2} = C_1 e^{-x\sqrt{a}} + \frac{C_2}{2\sqrt{a}}e^{-x\sqrt{a}}\int e^{2x\sqrt{a}}\,dx$$
$$= C_1 e^{-x\sqrt{a}} + \frac{C_1}{4a}e^{-x\sqrt{a}} \times e^{2x\sqrt{a}},$$

und folglich iſt endlich das allgemeine Integral der Differenzialgleichung $D_x^2 z = az$ folgendes:

$$z = C' e^{-x\sqrt{a}} + C'' e^{x\sqrt{a}}.$$

§. 253. Betrachten wir nun die Differenzialgleichung:

$$D_x^2 z = ax^{-\alpha-2}z,$$

ſo iſt ein particuläres Integral derſelben offenbar:

$$z_1 = C'\int_0^\infty e^{-\frac{1}{u^\alpha}-\frac{a}{\alpha^2}\frac{u^\alpha}{x^\alpha}}\,du.$$

Verwandelt man u in $x\sqrt{\frac{\alpha^2}{a}}.u$, wodurch die Grenzen nicht geändert werden, und reducirt; ſo findet man:

$$z_1 = Cx\int_0^\infty e^{-u^\alpha-\frac{\alpha\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}{\alpha^2 u^\alpha}}\,du.$$

Wenn alſo $\varphi(x)$ das particuläre Integral der Differenzialgleichung:

$$D_x^2 z = ax^{\alpha-2}z$$

ist, so ist $z = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ das particuläre Integral der Differenzialgleichung, welche aus der vorhergehenden abgeleitet wird, wenn man α in $-\alpha$ umsetzt. Dasselbe gilt von dem allgemeinen Integrale; denn wenn $\varphi(x)$ das allgemeine Integral der Differenzialgleichung:

$$D_x^2 z = ax^{\alpha-2} z$$

ausdrückt, so hat man:

$$\varphi''(x) = ax^{\alpha-2}\varphi(x),$$

und folglich:

$$\varphi''\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a}{x^{\alpha-2}}\varphi\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wenn man aber den Ausdruck $z = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ zweimal hintereinander differenzirt, so findet man:

$$D_x z = \varphi\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{1}{x}\right),\ D_x^2 z = \frac{1}{x^3}\varphi''\left(\frac{1}{x}\right)$$

und wenn man für $\varphi''\left(\frac{1}{x}\right)$, $\varphi'\left(\frac{1}{x}\right)$ ihre Werthe substituirt:

$$D_x^2 z = \frac{a}{x^{\alpha+1}}\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{az}{x^{\alpha+2}} = ax^{-\alpha-2}z.$$

Wenn also $\varphi(x)$ der Differenzialgleichung:

$$D_x z = ax^{\alpha-2} z$$

genügt, so verificirt auch $x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ die Differenzialgleichung:

$$D_x^2 z = ax^{-\alpha-2},$$

welche aus derselben abgeleitet wird, wenn man α in $-\alpha$ verwandelt.

Beispiel. Wenn α positiv und $= 2$ ist, so reducirt sich, wie wir gesehen haben, die Differenzialgleichung auf $D_x^2 z = az$ und hat zum allgemeinen Integrale:

$$z = C' e^{-x\sqrt{a}} + C'' e^{x\sqrt{a}} = \varphi(x).$$

Wenn man also α in $-\alpha$ verwandelt, d. h. $\alpha = -2$ setzt, so verwandelt sich die Differenzialgleichung in $D_x^2 z = ax^{-4} z$, und das allgemeine Integral derselben ist:

$$z = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(C' e^{-\frac{\sqrt{a}}{x}} + C'' e^{\frac{\sqrt{a}}{x}}\right).$$

Ueberhaupt kann man, wenn man das einem gewiſſen poſitiven Werthe von α entſprechende allgemeine Integral kennt, daraus unmittelbar das demſelben negativen Werthe von α entſprechende Integral ableiten.

§. 254. In gewiſſen beſondern Fällen kann man das allgemeine Integral der Differenzialgleichung:

$$D_x^2 z = ax^{\alpha-2} z$$

unter endlicher Form erhalten, z. B. wenn $\frac{1}{\alpha} = n + \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{2}{2n+1}$ iſt, wo n eine ganze Zahl bezeichnet. Denn alsdann verwandelt ſich das gefundene Integral:

$$z = C \int_0^1 e^{-u^\alpha - \frac{\alpha x^\alpha}{\alpha^2 u^\alpha}} du,$$

wenn man ſucceſſive u in $u^{\frac{1}{\alpha}}$ und u in au verwandelt und $\frac{x^\alpha}{\alpha^2} = s$, $C\frac{a^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} = C$ ſetzt, in:

$$z = C \int_0^1 u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-au - \frac{s}{u}} du.$$

Wir wollen nun für den Augenblick annehmen, daß $\alpha = 2$ ſei, ſo wird die Differenzialgleichung $D_x^2 z = az$, und ihr allgemeines Integral iſt, wie wir geſehen haben:

$$z = C \int_0^\infty e^{-u^2 - \frac{ax^2}{4u^2}} du = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-x\sqrt{a}},$$

oder wenn man $x^2 = 4s$ ſetzt:

$$z = C \int_0^\infty e^{-u^2 - \frac{as}{u^2}} du = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2\sqrt{a}\sqrt{s}}.$$

Da der vorhergehende Werth von z nur eine Transformation dieſes letztern iſt, ſo hat man nothwendig, wenn man für α und C ihre Werthe 2 und $\frac{C\sqrt{a}}{2}$ ſetzt:

$$\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-au - \frac{s}{u}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-2\sqrt{a}\sqrt{s}},$$

und wenn man n mal in Beziehung auf a differenzirt; ſo findet man:

$$\int_0^\infty u^{n+\frac{1}{2}-1} e^{-au - \frac{s}{u}} du = (-1)^n \sqrt{\pi}\, D_a^n \left(a^{-\frac{1}{2}} e^{-x\sqrt{a}}\right).$$

Der Werth dieſer Ableitung der n^{ten} Ordnung, welche man auf die Form $f(x, \sqrt{a})$ bringen kann, und welche bis auf die Conſtante C_1 ein particuläres Integral z_1 der Differenzialgleichung:

$$D_x^2 z = ax^{\alpha-2} z$$

iſt, wenn $\frac{1}{\alpha} = n + \frac{1}{2}$ iſt, kann man leicht in allen Fällen berechnen. Uebrigens ſieht man leicht ein, daß derſelben Differenzialgleichung auch durch den Ausdruck $z_1 = f(x, -\sqrt{a})$ genügt wird; denn der Werth des Integrales:

$$\int_0^\infty u^{n+\frac{1}{2}-1} e^{-au - \frac{x}{u}} du$$

bleibt offenbar ungeändert, wenn man $\sqrt{a}$ in $-\sqrt{a}$ umſetzt. Das allgemeine Integral der Differenzialgleichung $D_x^2 z = ax^{\alpha-2}$ iſt alſo, wenn $\frac{1}{\alpha} = n + \frac{1}{2}$ iſt:

$$z = C_1 f(x, \sqrt{a}) + C_2 f(x, -\sqrt{a}),$$

und läßt ſich folglich unter endlicher Form ausdrücken.

§. 255. Wir wollen nun die Differenzialgleichung:

$$D_x^n x - xy = 0$$

zu integriren ſuchen, und zu dem Zwecke zunächſt die allgemeinere Differenzialgleichung:

$$D_x^n y - xy = C_1$$

betrachten, worin C_1 eine willkührliche Conſtante bezeichnet. Ferner wollen wir $y = \int e^{xz} Z\, dz$ ſetzen, wo Z eine beliebige Function der neuen unabhängigen Veränderlichen z iſt und das Integral zwiſchen noch zu beſtimmenden Grenzen genommen werden muß; ſo iſt:

$$D_x^n y = \int e^{xz} Z z^n\, dz,$$

und wenn man in die Differenzialgleichung:

$$D_x^n y - xy = C_1$$

ſubſtituirt:

$$\int e^{xz} X z^n\, dz - \int e^{xz} x Z\, dz = C_1.$$

Integrirt man theilweiſe, ſo erhält man:

$$\int e^{xz} x Z\, dz = e^{xz} Z - \int e^{xz}\, dZ$$

und folglich:

$$\int e^{zz}(Zz^n\,dz + dZ) - e^{zz}Z = C_1.$$

Da die Function Z und die Grenzen des Integrales völlig willkührlich sind, so können wir sie so annehmen, daß der mit dem Integralzeichen behaftete Theil verschwindet, und daß die Differenz zwischen den beiden Werthen des integrirten Theiles $e^{zz}Z$ an den Grenzen $= -C_1$ ist. Die erste Bedingung giebt unmittelbar die Differenzialgleichung:

$$\frac{dZ}{Z} = -z^n\,dz,$$

woraus folgt:

$$Z = Ce^{-\frac{z^{n+1}}{n+1}}, \quad e^{zz}Z = Ce^{-\frac{z^{n+1}}{n+1}}e^{zz},$$

und die zweite wird erfüllt, wenn man $z = 0$, $z = \infty$ zu den Grenzen nimmt; und wenn man $C = C_1$ setzt, so hat man folglich:

$$y = C_1\int_0^\infty e^{-\frac{z^{n+1}}{n+1}}e^{zz}\,dz.$$

Dieser Werth von y ist jedoch nur ein particuläres Integral y_1 der gegebenen Differenzialgleichung. Um ein zweites particuläres Integral zu erhalten, braucht man nur zu bemerken, daß die Größe Z sich nicht ändert, wenn man $\alpha_1 z$ für z setzt, wo α_1 eine der Wurzeln der Gleichung $\alpha^{n+1} - 1 = 0$ ist, und daß dasselbe von den beiden Integrationsgrenzen gilt, so daß man ein zweites particuläres Integral erhält, wenn man für y den Ausdruck:

$$C_1\alpha_1\int_0^\infty e^{-\frac{z^{n+1}}{n+1}}e^{\alpha_1 zz}dz$$

nimmt. Ueberdies bildet die Differenz dieser beiden particulären Integrale nothwendig ein particuläres Integral y_1 der Differenzialgleichung:

$$D_x^n y - xy = 0,$$

und man hat folglich:

$$y_1 = C_1\int_0^\infty e^{-\frac{z^{n+1}}{n+1}}(e^{zz} - \alpha_1 e^{\alpha_1 zz})dz,$$

wo C_1 eine beliebige Constante bezeichnet.

Die $n-1$ übrigen particulären Integrale werden offenbar erhalten, wenn man die $n-1$ übrigen Wurzeln $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ der Gleichung $\alpha^{n+1} - 1 = 0$ anwendet, und folglich ist das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung, wenn man:

$$C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n = c$$

und:

$$C_1 = -c_1, \quad C_2 = -c_2, \ldots, \quad C_n = -c_n$$

ſetzt:

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{z^{n+1}}{n+1}} dz(ce^{zz} + c_1\alpha_1 e^{\alpha_1 zz} + c_2\alpha_2 e^{\alpha_2 zz} + \ldots + c_n\alpha_n e^{\alpha_n zz}).$$

Wenn man dieſen Werth von y, n mal hintereinander nach x differenzirt, ſo ergiebt ſich leicht, daß ſich der Differenzialquotient $D_x^n y$ für $z = 0$ auf die Summe $c + c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ reducirt, woraus folgt, daß das allgemeine oder vollſtändige Integral der Differenzialgleichung:

$$D_x^n y - xy = C_1$$

durch denſelben Werth von y ausgedrückt wird, wofern die $n+1$ Conſtanten der Bedingung:

$$c + c_1 + c_2 + \ldots + c_n = C_1$$

genügen.

§. 256. Betrachten wir ferner die Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y + abx^n y = 0,$$

welche man auf die Form:

$$\frac{D_x^2 y}{x^n} = c^2 y$$

bringen kann, wenn man $ab = c^2$ ſetzt. Wenn man die durch die Gleichung:

$$dz = x^{\frac{n}{2}} dx$$

beſtimmte Veränderliche z zur unabhängigen Veränderlichen nimmt, ſo hat man:

$$z = \frac{2}{n+2} x^{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{m} x^m,$$

wenn man ſetzt:

$$m = \frac{n}{2} + 1,$$

und folglich:

$$D_z y = D_x y \times x^{m-1},$$

$$D_z^2 y = (m-1)x^{m-2} D_x y + x^{2(m-1)} D_x^2 y,$$

$$\frac{1}{x^n} D_z^2 y = \frac{m-1}{x^m} D_x y + D_x^2 y.$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in die gegebene Differenzialgleichung, ſo verwandelt ſie ſich in folgende:

$$D_z^2 y + \frac{m-1}{m}\frac{1}{z} D_z y = c^2 y.$$

Setzt man, um dieſe letzte Gleichung zu integriren:

$$y = \int e^{-tz} T\, dt,$$

ſo erhält man ſucceſſive:

$$zy = \int e^{-tz} T z dt = -e^{-tz} T + \int e^{-tz} dT,$$
$$D_z y = -\int e^{-tz} T t dt,$$
$$zD_z^2 y = \int e^{-tz} T t^2 z dt = -e^{-tz} T t^2 + \int e^{-tz} d.Tt^2,$$

und wenn man dieſe Werthe in die Gleichung:

$$D_z^2 y + \frac{m-1}{m}\frac{1}{z} D_z y = c^2 y,$$

nachdem ſie auf die Form:

$$z(D_z^2 y - c^2 y) + \frac{m-1}{m} D_z y = 0$$

gebracht iſt, ſubſtituirt; ſo kommt:

$$e^{-tz} T(c^2 - t^2) + \int e^{-tz} \left(dTt^2 - c^2 dT - \frac{m-1}{m} T t dt \right) = 0.$$

Wenn man den unter dem Integralzeichen ſtehenden Theil gleich Null ſetzt, ſo erhält man zur Beſtimmung von T die Differenzialgleichung:

$$(t^2 - c^2) dT + \frac{m+1}{m} T t dt = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{m+1}{m} \frac{t dt}{t^2 - c^2},$$

und wenn man integrirt:

$$T = (c^2 - t^2)^{-\frac{m+1}{2m}}.$$

Es ſind nun noch die Grenzen durch die Bedingung zu beſtimmen, daß die Differenz zwiſchen den beiden Grenzwerthen des Ausdruckes:

$$e^{-tz} T (c^2 - t^2) = e^{-tz} (c^2 - t^2)^{\frac{m-1}{2m}}.$$

gleich Null wird. So lange aber der Exponent $\frac{m-1}{2m}$ positiv ist, wird diese Bedingung erfüllt, wenn man $t=0$, $t=\infty$ für die Grenzen von t nimmt, und folglich ist eins der particulären Integrale der gegebenen Differenzialgleichnng folgendes:

$$y=C_1\int_0^{\infty} e^{-tz}(c^2-t^2)^{-\frac{m-1}{2m}}\,dt$$

$$=C_1\int_0^{\infty} e^{\frac{-2t}{n+2}x^{\frac{n}{2}}+1}(c^2-t^2)^{-\frac{n+4}{2n+4}}dt.$$

Aber die Bedingung in Beziehung auf die Grenzen würde auch noch erfüllt, wenn man $t=-c$, $t=+c$ nähme, und man erhält auf diese Weise, wenn man successive t in ct und t in $-ct$ verwandelt, die beiden neuen Werthe von y:

$$y=C_1\int_{-c}^{+c} e^{-tz}(c^2-t^2)^{-\frac{m+1}{2m}}dt=C_1\int_{-1}^{+1} e^{-ctz}(1-t^2)^{-\frac{m+1}{2m}}dt,$$

$$y=C_1\int_{+c}^{-c} e^{tz}(c^2-t^2)^{-\frac{m+1}{2m}}dt=C_1\int_{-1}^{+1} e^{+ctz}(1-t^2)^{-\frac{m+1}{2m}}dt,$$

woraus sich leicht ergiebt:

$$y=C\int_0^1 (e^{ctz}+e^{-ctz})(1-t^2)^{-\frac{m+1}{2m}}dt.$$

Um einen zweiten particulären Werth von y zu erhalten, wollen wir $y=zy_1$ setzen, so verwandelt sich die gegebene Differenzialgleichung in:

$$xD_x^2y_1+2D_xy_1=c^2x^{n+1}y_1,$$

oder:

$$D_z^2y_1+\frac{1+m}{+m}\frac{1}{z}D_zy_1=c^2y_1,$$

wenn man $dz=x^{\frac{n}{2}}dx$ für das Differenzial der unabhängigen Veränderlichen nimmt. Vergleicht man diese letzte Gleichung mit der weiter oben erhaltenen:

$$D_z^2y+\frac{m-1}{m}\frac{1}{z}D_zy=c^2y,$$

oder:

$$D_z^2y+\frac{1-m}{-m}\frac{1}{z}D_zy=c^2y,$$

so gelangt man zu der wichtigen Folgerung: Wenn die gegebene Differenzialgleichung durch einen gewissen Werth $y=y_1$ verificirt wird, so wird sie es auch durch das Product xy_1, wofern man in dem Werthe von y_1 die Zahl m in $-m$ verwandelt, und die Summe der beiden auf diese Weise erhaltenen particulären Integrale, ist das gesuchte allgemeine Integral.

Lobatto, von welchem wir diese Transsformation entlehnt haben, bemerkt am Schlusse seiner Abhandlung noch, daß die vorhin für die allgemeinen oder vollständigen Integrale der beiden Differenzialgleichungen:

$$\mathrm{D}_x^n y = xy, \quad \mathrm{D}_x^2 y = c^2 x^n y$$

gefundenen Werthe unmittelbar auf die vollständigen Integrale der beiden partiellen Differenzialgleichungen:

$$\mathrm{D}_x^n y = x\mathrm{D}_t^{n+1} y, \quad \mathrm{D}_x^2 y = x^n \mathrm{D}_t^2 y$$

führen.

§. 257. Um die vorhin auseinander gesetzten Theorien noch mehr zu erläutern, mit den Rechnungskunstgriffen vertraut zu machen, welche man bei der Unvollkommenheit der allgemeinen Theorien in der Integralrechnung beständig anwenden muß, und endlich, um den gegenwärtigen Zustand der Wissenschaft besser kennen zu lehren, haben wir es für nothwendig gehalten, die verschiedenen Classen der Differenzialgleichungen in der Kürze durchzugehen, welche die Geometer entweder direct, oder mit Hülfe mehr oder weniger indirecter Methoden bis jetzt integrirt haben. Die beiden Differenzialgleichungen:

$$\mathrm{D}_x y - xy = 0, \quad \mathrm{D}_x y - abx^n = 0,$$

welche Lobatto so elegant integrirt hat, sind schon zwei merkwürdige Beispiele, wie man durch schickliche Transformationen die Integration bewerkstelligen kann.

I. Differenzialgleichungen, worin eine Ableitung einer beliebigen Ordnung als Function der um eine oder zwei Einheiten niedrigern Ableitung ausgedrückt ist.

Wir wollen setzen:

$$dy = pdx, \quad dp = qdx, \quad dq = rdx, \ldots,$$

dann resp. mit Y, P, Q, R, ... Functionen von y, p, q, r, ... von solcher Beschaffenheit bezeichnen, daß man hat:

$$\mathrm{Y} = f(y), \quad \mathrm{P} = \mathrm{f}(p), \quad \mathrm{Q} = \varphi(q), \ldots,$$

und die Differenzialgleichungen:

$$p = \mathrm{Y} = f(y), \quad q = \mathrm{P} = \mathrm{f}(p), \quad r = \mathrm{Q} = \varphi(q), \ldots$$

zu integriren ſuchen. Da $p = \frac{dy}{dx}$ iſt, ſo wird die erſte dieſer Gleichungen:

$$dx = \frac{dy}{Y},$$

und giebt unmittelbar:

$$x = \int \frac{dy}{Y}.$$

Wegen $q = \frac{dp}{dx}$ giebt die zweite Gleichung:

$$dx = \frac{dp}{P},\ dy = \frac{pdp}{P},\ x = \int \frac{dp}{P},\ y = \int \frac{pdp}{P}.$$

Die dritte Gleichung $r = Q = \varphi(q)$ giebt, wenn man für r ſeinen Werth $r = \frac{dq}{dx}$ ſubſtituirt:

$$dx = \frac{dq}{Q},\ qdx = dp = \frac{qdq}{Q},$$

woraus folgt:

$$x = \int \frac{dq}{Q},\ p = \int \frac{qdq}{Q},$$

$$dy = pdx = \frac{dq}{Q} \int \frac{qdq}{Q},\ y = \int \frac{dq}{Q} \int \frac{qdq}{Q}.$$

Ebenſo findet man, daß die Gleichungen $s = R$, $t = S$, ... reſp. geben:

$$x = \int \frac{dr}{R},\ y = \int \frac{dr}{R} \int \frac{dr}{R} \int \frac{rdr}{R},$$

$$x = \int \frac{ds}{S},\ y = \int \frac{ds}{S} \int \frac{ds}{S} \int \frac{ds}{S} \int \frac{sds}{S},\ \text{etc.}$$

Zuſatz. Wenn man in den Gleichungen:

$$x = \int \frac{dp}{P},\ y = \int \frac{pdp}{P}$$

$x = P$ ſetzt, ſo erhält man:

$$\frac{dp}{P} = dP,\ y = \int pdP = Pp - \int Pdp,$$

wie es ſein muß. Setzt man dagegen $x = Q$, ſo hat man:

$$dx = dQ,\ qdx = dp = qdQ,$$

$$p = \int qdQ,\ y = \int dQ \int qdQ = Q \int qdQ - \int qQdQ,$$

oder wenn man transformirt:

$$y = \tfrac{1}{2} qQ^2 + \tfrac{1}{2} \int Q^2 dq - Q \int Q dq,$$
$$2y = Q^2 q - 2Q \int Q dq + \int Q^2 dq.$$

Wenn man $x = R$, $x = S$,... setzte, so fände man ebenso:

$$6y = R^3 r - 3R^2 \int R dr + 3R \int R^2 dr - \int R^3 dr,$$
$$24y = S^4 s - 4S^3 \int S ds + 6S^2 \int S^2 ds - 4S \int S^3 ds + \int S^4 ds, \ldots$$

Wir wollen unter Beibehaltung der frühern Bezeichnungen die Integrale:

$$q = Y, \quad r = P, \quad s = Q, \quad t = R, \ldots$$

suchen. Für die erste Gleichung $q = Y$ hat man:

$$q = p \frac{dp}{dy},$$

und folglich:

$$pdp = Y dy, \; p^2 = 2 \int Y dy, \; p = \sqrt{2 \int Y dy} = \frac{dy}{dx},$$
$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int Y dy}}.$$

Für die zweite Gleichung $r = P$ hat man wegen $r = \frac{qdq}{dp}$:

$$qdq = P dp, \quad q = \sqrt{2 \int P dp} = \frac{pdp}{dy} = \frac{dp}{dx},$$

folglich:

$$x = \int \frac{dp}{\sqrt{2 \int P dp}}, \; y = \int \frac{pdp}{\sqrt{2 \int P dp}}.$$

Für die dritte, vierte, ... Gleichung erhält man durch dasselbe Verfahren:

$$x = \int \frac{dq}{\sqrt{2 \int Q dq}}, \; y = \int \frac{dq}{\sqrt{2 \int Q dq}} \int \frac{qdq}{\sqrt{2 \int Q dq}},$$
$$x = \int \frac{dr}{\sqrt{2 \int R dr}}, \; y = \int \frac{dr}{\sqrt{2 \int R dr}} \int \frac{dr}{\sqrt{2 \int R dr}} \int \frac{rdr}{\sqrt{2 \int R dr}}.$$

. . . . . .

. . . . . .

Die vorhergehenden Gleichungen sind sämmtlich in den beiden Gleichungen:

$$F(D_x^{n-1} y, D_x^n y) = 0, \quad F(D_x^{n-2} y, D_x^n y) = 0$$

enthalten, welche sich auf folgende Weise integriren lassen: Setzt man successive:

$$D_x^{n-1} y = z, \quad D_x^{n-2} y = z,$$

so verwandeln sich diese beiden Gleichungen in folgende:

$$F\left(z, \frac{dz}{dx}\right) = 0, \; F\left(z, \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$dx = f(z)\,dz, \quad x = \int f(z)\,dz + C = \varphi(z),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = f(z), \; 2\frac{dz}{dx}d\frac{dz}{dx} = f(z)dz, \; \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 2\int f(z)dz + C,$$

$$dx = \varphi(z)\,dz, \quad x = \chi(z).$$

Wenn man die Gleichung $x = \varphi(z)$ für z auflösen kann, so kennt man $D_x^{n-1} y$, und man erhält den Werth von y durch eine Reihe von Quadraturen. Wenn man diese Gleichung nicht in Beziehung auf z auflösen kann, so erhält man y auf folgende Weise: Die Gleichung $D_x^{n-1} y = z$ giebt:

$$D_x^{n-2} y = \int z dx = \int z f(z)\,dz + C,$$

und wenn man wieder in Beziehung auf y integrirt und in dem zweiten Theile $f(z)\,dz$ für dx substituirt; so kommt man durch eine Reihe von Quadraturen auf einen Werth von der Form $y = f(z)$, und man braucht alsdann blos z zwischen den Gleichungen $x = \varphi(z)$, $y = f(z)$ zu eliminiren, um das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung mit n willkührlichen Constanten zu erhalten.

Desgleichen, wenn man die Gleichung $x = \chi(z)$ für z auflösen kann, so kennt man $D_x^{n-2} y$, und folglich y durch $n-2$ Quadraturen, wodurch $n-2$ willkührliche Constanten eingeführt werden. Wenn man diese Gleichung nicht für z auflösen kann, so erhält man y als Function von z, wenn man die Differenzialgleichung $D_x^{n-2} y = z$, $(n-2)$ mal hintereinander integrirt, indem man jedesmal den ersten Theil mit dx und den zweiten mit $f(z)\,dz = dx$ multiplicirt.

Allgemeiner, wenn man hat:

$$F(x, D_x^m y, D_x^{m+1} y, \ldots, D_x^n y) = 0,$$

so wird die Ordnung dieser Gleichung um m Einheiten erniedrigt, wenn man $D_x^m y = z$ setzt, und wenn man die Differenzialgleichung:

$$F(x, z, D_x z, \ldots, D_x^{n-m} z) = 0$$

integriren und dann in Beziehung auf x oder z auflösen kann; so erhält man die Gleichung mit x und mit y auf dieselbe Weise, wie in den vorhergehenden Fällen.

Wenn die gegebene Differenzialgleichung folgende wäre:

$$F(y, D_x y, D_x^2 y, \ldots, D_x^m y) = 0,$$

so könnte man dieselbe durch eine Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen auf die Form:

$$F(y, D_y x, D_y^2 x, \ldots, D_y^m x) = 0$$

bringen und sie erniedrigen, wenn man setzte:

$$D_y x = p.$$

Beispiele von Differenzialgleichungen, welche bei der Anwendung der Integralrechnung am häufigsten vorkommen.

Beispiel 1. Es sei:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}, \text{ oder } q = \frac{p}{a},$$

so ist:

$$dx = a\frac{dp}{p}, \quad x = C_1 + a\,lp,$$

$$dy = a\,dp, \quad y = C_2 + ap, \quad x = C_1 + a\,l\frac{y - C_2}{a}.$$

Beispiel 2. Es sei:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}, \text{ oder } q = \sqrt{1+p^2},$$

so ist:

$$x = C_1\, l\frac{y + \sqrt{y^2 - C_1^2}}{C_2}.$$

Beispiel 3. Es sei:

$$-a\,dx\,d^2y = (dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}, \text{ so ist } x = C_1 - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$y = C_2 + \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}, \quad (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^2.$$

Beispiel 4. Es sei:

$$\frac{ds\,dy}{d^2x} = a\frac{dx}{dy},$$

so hat man, wenn $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ für das Differenzial der unabhängigen Veränderlichen genommen wird:

$$d^2s = 0 = d^2x\sqrt{1+p^2} + \frac{pdxdp}{\sqrt{1+p^2}},$$

folglich:

$$d^2x = -\frac{pdxdp}{1+p^2},$$

und wenn man in die gegebene Differenzialgleichung ſubſtituirt:

$$\frac{pdx(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{-pdp} = \frac{a}{p},\ dy = -\frac{adp}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}},\ y = c_2 - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Setzt man ferner $p = \frac{1}{u}$, ſo iſt:

$$dx = \frac{au^2du}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{adu}{\sqrt{u^2+1}} - \frac{adu}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

$$x = C_1 - \frac{au}{\sqrt{1+u^2}} + al\,(u+\sqrt{1+u^2})$$

oder:

$$x = C_1 - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + al\,\frac{1+\sqrt{1+p^2}}{p}.$$

Beiſpiel 5. Es ſei:

$$\frac{dsdy}{d^2y} = a\,\text{arc tang}\,\frac{dy}{dx},$$

ſo hat man, wenn ds wieder das Differenzial der unabhängigen Veränderlichen iſt:

$$-\frac{dx(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{dp} = a\,\text{arc tang}\,p,$$

$$dx = -\frac{adp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\,\text{arc tang}\,p,\ dy = -\frac{apdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und da das Differenzial von arc. tang $p = \frac{dp}{1+p^2}$ iſt; ſo hat man:

$$x = -\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\,\text{arc tang}\,p + a\int\frac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}\,\text{arc tang}\,p - a\int\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$x = C_1 - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\,\text{arc tang}\,p,$$

$$y = C_2 - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}\,\text{arc tang}\,p.$$

Beiſpiel 6. Es ſei:

$$a\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+\frac{d^2y}{dx^2}},\text{ oder }aqdq=dx\sqrt{1+q^2},$$

ſo iſt:

$$x=C_1+a\sqrt{1+q^2},$$

$$\frac{dy}{dx}=\int qdx=\int\frac{aq^2dq}{\sqrt{1+q^2}}=\frac{aq}{2}\sqrt{1+q^2}-\frac{a}{2}l(q+\sqrt{1+q^2})+C_1,$$

$$y=\frac{a^2q^3}{6}-\frac{a^2}{2}\sqrt{1+q^2}l(q+\sqrt{1+q^2})+\frac{a^2}{2}q+aC_1\sqrt{1+q^2}+C_2,$$

und die Elimination von q zwiſchen dieſen beiden Gleichungen giebt das geſuchte Integral.

Beiſpiel 7. Es ſei:

$$a\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^3y}{dx^3}\text{ oder }a\frac{dr}{dx}=r,$$

ſo iſt:

$$x=alr+C_1,\ y=a^3r+\frac{a^2C_2}{2}lr^2+aC_3lr+C_4.$$

Beiſpiel 8. Es ſei:

$$\frac{d^4y}{dx^4}=a\sqrt{\frac{d^3y}{dx^3}},\text{ ſo iſt }x=\frac{2\sqrt{r}}{a}+C_1,$$

$$y=\frac{2r^{\frac{5}{2}}}{3.5.a^3}+\frac{2C_2r}{a^2}+\frac{2C_3\sqrt{r}}{a}+C_4.$$

Beiſpiel 9. Es ſei:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a}{x},\text{ oder }dp=\frac{adx}{x},$$

ſo iſt:

$$p=alx+C_1,\quad y=axlx+C_1x+C_2.$$

Beiſpiel 10. Es ſei:

$$\frac{ds^2d^2y}{dx^4}=\frac{1}{a}\cos\frac{x}{b},$$

ſo hat man, wenn $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ conſtant, und folglich:

$$dsd^2s=dxd^2x+dyd^2y=0,\quad d^2x=-\frac{pdxdp}{1+p^2}$$

geſetzt wird:

$$dp = (1+p^2)\frac{d^2y}{dx} = \frac{dx^2d^2y}{dx^3} = \frac{dx}{a}\cos\frac{x}{b}; p = \frac{b}{a}\sin\frac{x}{b} + C_1,$$

$$y = -\frac{b^2}{a}\cos\frac{x}{b} + C_1x + C_2.$$

Beispiel 11. Es sei:

$$\frac{d^2x}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{ady}{y} = \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

so hat man, wenn y als unabhängige Veränderliche betrachtet wird:

$$p+\sqrt{1+p^2} = \left(\frac{y}{C_1}\right)^a, \quad x = \frac{y^{a+1}}{2(a+1)C_1{}^a} + \frac{C_1{}^a}{2(a-1)y^{a-1}} + C_2.$$

Beispiel 12. Es sei:

$$a^2\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

oder:

$$\frac{a^2d^2q}{dx^2} = q, \quad \frac{dqd^2q}{dx^2} = \frac{qdq}{a^2}, \quad \frac{dq^2}{dx^2} = \frac{q^2+C_1}{a^2},$$

so ist:

$$x = \int\frac{adq}{\sqrt{q^2+C_1}} = a\,l\frac{q+\sqrt{q^2+C_1}}{C_2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \int qdx = a\sqrt{q^2+C_1} + C_2, \quad y = a^2q + aC_3l(q+\sqrt{q^2+C_1}) + C_4,$$

$$y = \frac{a^2C_2}{2}e^{\frac{x}{a}} - \frac{C_1a^2}{2C_2}e^{-\frac{x}{a}} + C_3x + C_1 = C'e^{\frac{x}{a}} + C''e^{-\frac{x}{a}} + C'''x + C^{iv}.$$

§. 258. — II. Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung, worin eine der Veränderlichen x, y fehlt, oder von der Form $F(x,p,q)=0$, $F(y,p,q)=0$.

Wenn y in der Gleichung fehlt, so substituirt man für q seinen Werth $\frac{dp}{dx}$, und man hat alsdann blos noch eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung zu integriren, woraus man den Werth von p als Function von x oder den von x als Function von p ableitet. Wenn dieses nicht möglich ist, so sucht man x und p als Functionen einer neuen Veränderlichen z auszudrücken. Man hat also entweder $p=X$, $x=P$, oder $x=Z_1$, $p=Z_2$, und das gesuchte Integral wird alsdann durch eine der drei Gleichungen:

$$y = \int Xdx, \quad y = \int pdP, \quad y = \int Z_2dZ_1$$

gegeben. Im zweiten Falle, d. h. wenn x fehlt, ergiebt sich aus den Gleichungen:

$$q = \frac{dp}{dx}, \quad dx = \frac{dy}{p}$$

der Werth:

$$q = p\frac{dp}{dy},$$

welchen man in die gegebene Gleichung substituirt, die alsdann von der ersten Ordnung ist und nur noch y und p enthält. Aus dieser Gleichung ergiebt sich entweder $p = Y$, $y = P$, oder $p = Z_1$, $y = Z_2$, und x wird durch eine der folgenden Gleichungen gegeben:

$$x = \int \frac{dy}{Y}, \quad x = \int \frac{dP}{p} = \frac{P}{p} + \int \frac{P dp}{p^2}, \quad x = \int \frac{dZ_2}{Z_1}.$$

Zahlenbeispiele.

Beispiel 1. Es sei:

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y} = X = \frac{a^2}{2x}, \text{ so ist } \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dx}{X} = \frac{2xdx}{a^2},$$

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{x^2+aC_1}{a^2},$$

$$p = \frac{x^2+aC_1}{\sqrt{a^4-(x^2+aC_1)^2}}, \quad y = \int \frac{(x^2+aC_1)dx}{\sqrt{a^4-(x^2+aC_1)^2}}.$$

Beispiel 2. Es sei:

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y} = \frac{x^2}{a}, \text{ so ist } p = \frac{C_1x-a}{\sqrt{x^2-(C_1x-a)^2}},$$

$$y = \int \frac{(C_1x-a)dx}{\sqrt{1-C_1^2}\sqrt{x^2+\frac{2aC_1x}{1-C_1^2}-\frac{a^2}{1-C_1^2}}}$$

$$= -\frac{a}{(1-C_1^2)^{\frac{1}{2}}} l\frac{x(1-C_1^2)+aC_1}{\sqrt{1-C_1^2}} + \sqrt{x^2-(C_1x-a)^2} + C_2.$$

Beispiel 3. Es sei:

$$dx(dx^2+dy^2) + xdyd^2y = ad^2y\sqrt{dx^2+dy^2},$$

oder:

$$dx(1+p^2) + xpdp = adp\sqrt{1+p^2},$$

so ist:

$$x = \frac{ap+C_1}{\sqrt{1+p^2}}, \quad y = \frac{C_1p-a}{\sqrt{1+p^2}} - C_1 l\frac{p+\sqrt{1+p^2}}{C_2}$$

$$= \sqrt{a^2+C_1^2-x^2} - C_1 l\frac{C_1+\sqrt{a^2+C_1^2-x^2}}{C_2(x-a)}$$

Beiſpiel 4. Es ſei:

$$a^2d^2y\sqrt{a^2+x^2}+a^2dxdy=x^2dx^2,$$

oder:

$$a^2dp\sqrt{a^2+x^2}+a^2pdx=x^2dx,$$

ſo hat man die lineare Differenzialgleichung der erſten Ordnung:

$$dp+\frac{pdx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x^2dx}{a^2\sqrt{a^2+x^2}},$$

welche giebt:

$$a^2p=-\frac{x^2+2a^2-2x\sqrt{a^2+x^2}}{3}+C_1\sqrt{a^2+x^2}-C_1x,$$

$$a^2y=-\tfrac{1}{9}x^3-\tfrac{2}{3}a^2x+\tfrac{2}{9}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{1}{2}C_1x^2$$
$$+\frac{C_1x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2C_1}{2}\,l\,\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{C_2}.$$

Beiſpiel 5. Es ſei die in Beziehung auf x und p homogene Differenzialgleichung des vierten Grades:

$$(a^2dy^2+x^2dx^2)\,d^2y=nxdx^3dy \text{ oder } (a^2p^2+x^2)dp=npxdx$$

gegeben, ſo erhält man, wenn man $x=pu$ ſetzt:

$$p=C_1\,[a^2+(1-n)\,u^2]^{\frac{n}{2(1-n)}},\quad x=C_1u\,[a^2+(1-n)\,u^2]^{\frac{n}{2(1-n)}},$$

$$y=px-\int xdp=C_1^2\,u\,[a^2+(1-n)\,u^2]^{\frac{n}{1-n}}$$
$$-nC_1^2\int u^2du\,[a^2+(1-n)\,u^2]^{\frac{2n-1}{1-n}}.$$

Wenn $n=1$ iſt, ſo findet man:

$$x=ap\sqrt{2l\frac{p}{C_1}},\quad y=ap^2\,l.\,2l\frac{p}{C_1}-a\int pdp\sqrt{2l\frac{p}{C_1}}.$$

Beiſpiel 6. Es ſei die in Beziehung auf p und x homogene Differenzialgleichung:

$$adxdy^2+x^2dxd^2y=nxdy\sqrt{dx^4+a^2d^2y^2}$$

oder:

$$ap^2dx+x^2dp=npx\sqrt{dx^2+a^2dp^2},$$

oder:

$$ap^2+qx^2=npx\sqrt{1+a^2q^2}$$

gegeben, ſo hat man, wenn man $p=zx$ ſetzt:

$$\frac{dp}{dx}=q=\frac{az^2+nz\sqrt{1-n^2a^2z^2+a^4z^4}}{n^2a^2z^2-1},$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dx}{q-z}=\frac{dz}{z}\,\frac{n^2a^2z^2-1}{1+az-n^2a^2z^2+n\sqrt{1-n^2a^2z^2+a^4z^4}}$$
$$=\frac{dz}{z}\,\frac{1+az-n^2a^2z^2-n\sqrt{1-n^2a^2z^2+a^4z^4}}{n^2-1-2az+(n^2-1)a^2z^2},$$

wo p und q durch die Gleichungen:

$$p=zx,\quad y=\int pdx=\int zxdx$$

gegeben werden. Es sei $n^2=2$ oder $n=\sqrt{2}$, so findet man:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz(1-\sqrt{2})}{z}+\frac{a\,dz(3-2\sqrt{2})}{1-az},$$
$$lx=(1-\sqrt{2})\,lz-(3-2\sqrt{2})l(1-az^2)+C_1,$$
$$xz^{\sqrt{2}-1}(1-az)^{3-2\sqrt{2}}=C_1.$$

Beispiel 7. Es sei:

$$dx^3dy-xds^2d^2y=adxds\sqrt{d^2x^2+d^2y^2},$$

so hat man, wenn $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ als constant betrachtet wird:

$$d^2s=0,\quad d^2x=-\frac{pqdx^2}{1+p^2},\quad d^2y=\frac{qdx^2}{1+p^2},\quad p-xq=aq,$$

und wenn man differenzirt, so erhält man:

$$-xdq=adq,\text{ folglich }dq=0,$$
$$q=\frac{1}{C_1},\ p=\int qdx=\frac{x+a}{C_1},\ y=\int pdx=\frac{x^2+2ax}{2C_1}+C_2.$$

Beispiel 8. Es sei:

$$dx^3dy-xds^2d^2y=\frac{bdx^4ds^2d^2y}{\sqrt{dx^6+a^2ds^4d^2y^2}},$$

so erhält man, wenn s wieder zur unabhängigen Veränderlichen genommen wird, die Differenzialgleichung:

$$p-qx=\frac{bq}{\sqrt{1+a^2q^2}},$$

und wenn man differenzirt:

$$-xdq=\frac{bdq}{\sqrt{(1+a^2q^2)^3}},$$

folglich:

$$dq=0,\ q=\frac{1}{C_1}$$

oder:

$$x = \frac{-b}{\sqrt{(1+a^2q^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

und:

$$p = \frac{x}{C_1} + \frac{b}{\sqrt{C_1^2+a^2}}, y = \int p\,dx = \frac{x^2}{2C_1} + \frac{bx}{\sqrt{C_1^2+a^2}} + C_2.$$

Der Werth:

$$x = -\frac{b}{(1+a^2q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

gäbe:

$$y = -\frac{b^2q(1+2a^2q^2)}{2(1+a^2q^2)^2} - \frac{b^2q}{8(1+a^2q^2)} + \frac{2b^2q}{16(1+a^2q^2)} + \frac{3b^2}{16a}\operatorname{arc\,tang} aq + C$$

und wenn man q zwiſchen den beiden Gleichungen eliminirt, ſo erhält man ein neues Integral, welches nur ein particuläres iſt.

Beiſpiel 9. Es ſei die Differenzialgleichung:

$$abd^2y = dx\sqrt{y^2dx^2+a^2dy^2} \text{ oder } abq = \sqrt{y^2+a^2p^2} = \frac{abpdp}{dy}$$

gegeben, welche in Beziehung auf y und p homogen iſt, ſo erhält man, wenn man $y = pz$ ſetzt:

$$\frac{dy}{y} = \frac{abdz}{abz-z^2\sqrt{a^2+z^2}}$$

und wenn man ſetzt:

$$\sqrt{a^2+z^2} = tz,\ z^2 = \frac{a^2}{t^2-1},\ \frac{dz}{z} = -\frac{tdt}{t^2-1},$$

ſo iſt:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{btdt}{bt^2-bt-b} = -\frac{tdt}{t^2-2nt-1},$$

wo $\frac{a}{b} = 2n$ geſetzt iſt; folglich:

$$\frac{2dy\sqrt{n^2+1}}{y} = -\frac{dt(n+\sqrt{n^2+1})}{t-n-\sqrt{n^2+1}} + \frac{dt(n-\sqrt{n^2+1}}{t-n+\sqrt{n^2+1}},$$

$$y^{2\sqrt{n^2+1}} = \frac{C_1(t-n+\sqrt{n^2+1})^{n-\sqrt{n^2+1}}}{(t-n-\sqrt{n^2+1})^{n+\sqrt{n^2+1}}}.$$

Von dem Werthe $y = f(t) = T$ geht man vermittelſt der Gleichungen:

$$z = \frac{a}{\sqrt{t^2-1}},\ p = \frac{T\sqrt{t^2-1}}{a},\ dx = \frac{adT}{T\sqrt{t^2-1}} = -\frac{atdt}{(t^2-2nt-1)\sqrt{t^2-1}}$$

zu dem Werthe von x über.

Beiſpiel 10. Es ſei:

$$\frac{(dy^2+y^2dx^2)^{\frac{3}{2}}}{2dy^2dx+y^2dx^3-yd^2ydx}=ny, \text{ oder } \frac{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2+y^2-qy}=ny,$$

ſo iſt:

$$dy(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=2np^2ydy+ny^3dy-ny^2pdp$$

eine in Beziehung auf p und y homogene Differenzialgleichung. Setzt man $p=zy$, ſo erhält man:

$$y^3dy(z^2+1)^{\frac{3}{2}}=2nz^2y^3dy+ny^3dy-nz^2y^3dy-nzy^3dz,$$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{nzdz}{(z^2+1)\sqrt{1+z^2}-nz^2-n}=\frac{nzdz}{(z^2+1)(n-\sqrt{1+z^2})}.$$

Wenn $n=1$ iſt, ſo hat man:

$$\frac{dy}{y}=-\frac{zdz}{(z^2+1)(\sqrt{z^2+1}-1)}=\frac{dz(1+\sqrt{1+z^2})}{z(z^2+1)}$$

und:

$$dx=\frac{dz(1+\sqrt{1+z^2})}{z^2(z^2+1)}.$$

Nun iſt aber:

$$\int\frac{dz}{z(z^2+1)}=l\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}, \quad \int\frac{dz}{z^2(z^2+1)}=-\frac{1}{z}-\text{arc tang } z,$$

$$\int\frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}}=l\frac{\sqrt{z^2+1}-z}{z}, \quad \int\frac{dz}{z^2\sqrt{z^2+1}}=-\frac{\sqrt{z^2+1}}{z};$$

folglich:

$$y=C_1\frac{\sqrt{z^2+1}-1}{\sqrt{z^2+1}}=C_1\left(1-\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\right),$$

$$x=C_2-\frac{1-\sqrt{z^2+1}}{z}-\text{arc tang } z, \quad \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}=1-\frac{y}{a},$$

$$z=\frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a-y}, \quad x=C_2-\frac{\sqrt{2a-y}}{y}-\text{arc cos}\frac{a-y}{a},$$

oder wenn man ſetzt:

$$\text{arc cos}\frac{a-y}{a}=\varphi,$$

ſo iſt:

$$y=a(1-\cos\varphi), \quad x=\xi-\varphi-\cot\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Beiſpiel 11. Es ſei:

$$\frac{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2+y^2-qy}=a,$$

so ist, wenn man $p^2+y^2=z^2$ setzt:

$$pdp+ydy=qdy+ydy=zdz,$$

und:

$$q+y=\frac{zdz}{dy},\ z^2dy=2azdy-aydz,\ y^2=\frac{C_1z}{2a-z},$$

und wenn man $y^2=t$ setzt, so ist:

$$dx=\frac{(C_1+t)dt}{2t\sqrt{4a^2t-(C_1+t)^2}}.$$

Setzt man ferner:

$$t=2a^2-C_1+2a\cos\varphi\sqrt{a^2-C_1},$$

so kommt:

$$dx=-\frac{a(a+\cos\varphi\sqrt{a^2-C_1})\,d\varphi}{2a^2-C_1+2a\cos\varphi\sqrt{a^2-C_1}},$$

$$2dx=-d\varphi-\frac{C_1d\varphi}{2a^2-C_1+2a\cos\varphi\sqrt{a^2-C_1}},$$

und wenn man integrirt und setzt:

$$m=\frac{2a\sqrt{a^2-C_1}}{2a^2-C_1},\text{ folglich }C_1=\frac{2a^2\sqrt{1-m^2}}{1+\sqrt{1-m^2}},\sqrt{a^2-C_1}=\frac{ma}{1+\sqrt{1-m^2}},$$

so erhält man:

$$2x=\xi-\varphi-\arccos\frac{m+\cos\varphi}{1+m\cos\varphi},\quad y^2=\frac{2a^2(1+m\cos\varphi)}{1+\sqrt{1-m^2}}.$$

Hieraus folgt:

$$\cos\varphi=\frac{y^2(1+\sqrt{1-m^2})-2a^2}{2ma^2},$$

$$\frac{m+\cos\varphi}{1+m\cos\varphi}=\frac{y^2(1+\sqrt{1-m^2})-2a^2(1-m^2)}{my^2(1+\sqrt{1-m^2})}$$

und wenn man setzt:

$$b=\frac{a(1-\sqrt{1-m^2})}{m},\ y^2=a^2+b^2+2ab\cos\varphi,$$

$$m=\frac{2ab}{a^2+b^2},\qquad\sqrt{1+m^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},$$

so erhält man:

$$2x = \xi - \varphi - \arccos \frac{2ab + (a^2+b^2)\cos\varphi}{a^2+b^2+ab\cos\varphi}$$

$$= \xi - \varphi - \arcsin \frac{(a^2-b^2)\sin\varphi}{y^2}.$$

Beiſpiel 12. Es ſei:

$$d^2y(ydy + adx) = dy(dx^2 + dy^2),$$

oder:

$$dp(py + a) = dy(1+p^2),\ dy - \frac{pydp}{1+p^2} = \frac{adp}{1+p^2},$$

ſo erhält man, wenn man integrirt:

$$\frac{y}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} + C_1,\ y = ap + C_1\sqrt{1+p^2}$$

und:

$$x = \int \frac{dy}{p} = al p + C_1 l(p + \sqrt{1+p^2}) + C_2.$$

Wenn man $C_1 = 0$ ſetzte, ſo erhielte man das particuläre Integral:

$$y = ap,\ \text{und}\ x = alp + C',\ y = C'e^{\frac{x}{a}}.$$

Wenn man dagegen $C_1 = a$ ſetzte, ſo hätte man, weil:

$$p + \sqrt{1+p^2} = \frac{y}{a}\ \text{und}\ p = \frac{y^2-a^2}{2ay}$$

iſt:

$$x = al\frac{y^2-a^2}{2a} + C',\ \text{oder}\ y^2 = a^2 + C'e^{\frac{x}{a}}.$$

Beiſpiel 13. Es ſei:

$$dy^2 - yd^2y = n\sqrt{dx^2dy^2 + a^2d^2y^2}\ \text{oder:}\ p^2 - qy = n\sqrt{p^2+a^2q^2}$$

die gegebene Differenzialgleichung. Setzt man:

$$q = pz\ \text{oder}\ p\frac{dp}{dy} = pz,\ dp = zdy,$$

ſo kommt:

$$p^2 - pzy = np\sqrt{1+a^2z^2},\ p - zy = n\sqrt{1+a^2z^2}$$

und wenn man differenzirt und bemerkt, daß $dp = zdy$ iſt; ſo findet man:

$$-y\,dz=\frac{na^2z\,ds}{\sqrt{1+a^2z^2}},$$

folglich:

$$dz=0 \text{ oder } y=-\frac{na^2z}{\sqrt{1+a^2z^2}};$$

Die erſte Gleichung giebt:

$$z=C_1,\ p=C_1y+C_2,\ dx=\frac{dy}{C_1y+C_2},\ C_1x=l\,(C_1y+C_2);$$

die zweite giebt:

$$p=zy+n\sqrt{1+a^2z^2}=\frac{n}{\sqrt{1+a^2z^2}},$$

$$dx=\frac{dy}{p}=-\frac{a^2dz}{1+a^2z^2},\ x=-a\,\text{arc tang}\,az+C_1$$

und da man hat:

$$z=\frac{y}{a\sqrt{n^2a^2-y^2}},$$

ſo iſt:

$$\frac{C_1-x}{a}=\text{arc tang}\frac{y}{\sqrt{n^2a^2-y^2}}=\text{arc sin}\,\frac{y}{na};\ y=na\sin\frac{b-x}{a}.$$

§. 259. — III. Homogene Differenzialgleichungen.

Eine Differenzialgleichung iſt homogen, wenn, indem man die Veränderlichen x, y und ihre Differenziale dx, dy, d^2y,.... als Factoren des erſten Grades betrachtet, alle Glieder dieſer Gleichung von demſelben Grade ſind. So iſt z. B. die Differenzialgleichung:

$$x^2d^2y+xdx^2+ydy^2=0$$

homogen, weil alle Glieder vom dritten Grade ſind. Aber wenn dx, dy, d^2y,.... als Factoren des erſten Grades betrachtet werden, ſo iſt $p=\frac{dy}{dx}$ vom 0ten Grade, $q=\frac{d^2y}{dx^2}$ vom — 1ten Grade, u. ſ. f. Wenn man alſo die Gleichung auf eine ſolche Form zurückführt, daß ſie nur noch die Größen x, y, p, q,.... enthält, ſo muß man, wenn ſie homogen ſein ſoll, dieſe Größen reſp. als von dem Grade 1, 0, —1, ... betrachten, und alsdann haben alle Glieder der Gleichung wieder denſelben Grad. Hieraus folgt, daß, wenn man $y=zx$, $q=\frac{t}{x}$,.... ſetzt, alle Glieder die Veränderlichen x auf derſelben Potenz enthalten. Dieſe Veränderliche verſchwindet folglich aus der Gleichung, und hierin beſteht eben der unterſcheidende Character der homogenen Gleichungen. Die Integration homogener Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung

läßt ſich immer auf die Integration einer Differenzialgleichung der erſten Ordnung zurückführen. Denn wenn man $y = zx$ und $q = \frac{t}{x}$ ſetzt, ſo verſchwindet x aus der Gleichung, welche blos noch die drei Größen z, t und p enthält, und man kann folglich immer eine dieſer drei Größen vermittelſt der beiden andern ausdrücken. Aber aus den beiden Gleichungen:

$$dy = pdx,\ zdx + xdz = dy$$

folgt:

$$zdx + xdz = pdx,\ \frac{dx}{x} = \frac{dz}{p-z}.$$

Ferner hat man:

$$dp = qdx = \frac{t}{x}dx,$$

folglich:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{t}$$

und wenn man dieſe beiden Werthe von $\frac{dx}{x}$ einander gleich ſetzt; ſo erhält man die Differenzialgleichung der erſten Ordnung:

$$\frac{dz}{p-z} = \frac{dp}{t} \text{ oder } tdz = pdp - zdp,$$

welche ſich vermittelſt der bekannten Methoden wenigſtens näherungsweiſe integriren läßt. Dieſe Gleichung läßt ſich wirklich vermittelſt einfacher Quadraturen integriren: 1) wenn t eine homogene Function von p und z iſt; denn alsdann iſt die Differenzialgleichung homogen und vom erſten Grade; 2) wenn t eine beliebige Function von p iſt, weil alsdann die Gleichung in Beziehung auf z von der erſten Ordnung und vom erſten Grade iſt, und wenn man ſie auf die Form:

$$dz + z\frac{dp}{t} = \frac{pdp}{t}$$

bringt, ſo iſt ihr Integral:

$$e^{\int \frac{dp}{t}} z = \int e^{\int \frac{dp}{t}} \frac{pdp}{t};$$

3) wenn t irgend eine Function der Differenz $p - z$ iſt; denn ſetzt man $p - z = u$, ſo wird t eine Function von u, und die Gleichung $tdz = pdp - zdp$ verwandelt ſich wegen $p = z + u$ in:

$$tdz = udu + udt,$$

folglich iſt:

$$dz = \frac{udu}{t-u},\quad z = \int \frac{udu}{t-u},$$

so daß die Integration auf eine einfache Quadratur zurückgeführt ist. 4) Wenn, indem man wieder $p - z = u$ setzt und mit P, Q, R beliebige Functionen von u bezeichnet, $t = u + \frac{Pu}{Q_z + Rz^n}$ ist; denn alsdann verwandelt sich die Gleichung in:

$$Pdz = Qzdu + Rz^n du$$

und läßt sich integriren. 5) Wenn man, indem M, N beliebige Functionen von z bezeichnen, hat:

$$t = u + Mu^2 + Nu^n;$$

denn alsdann wird die Gleichung:

$$Mudz + Nu^{n-1}dz = du.$$

Allgemein, da die Gleichung:

$$tdz = pdp - zdp$$

auf die Form:

$$udu = (t-u)dz$$

gebracht werden kann, so hat man:

$$t = u + Su,$$

wenn S eine Function der beiden Veränderlichen u, z bezeichnet und die Gleichung $du = Sdz$ integrabel ist.

Beispiel 1. Es sei:

$$x^2d^2y = xdxdy + 3ydx^2, \text{ oder } x^2q = xp + 3y$$

die gegebene Differenzialgleichung. Setzt man:

$$y = zx,\quad q = \frac{t}{x},$$

so ist:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{t} = \frac{dp}{p+3z} = \frac{dz}{p-z},$$

$$(p+3z)dz = pdp - zdp,\quad p = z + \sqrt{4z^2+C_1},$$

$$lx = \int \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}l\frac{2z+\sqrt{4z^2+C_1}}{C_2} = \tfrac{1}{2}l\frac{z+\sqrt{C+z^2}}{C_2},$$

$$x^2 = \frac{z+\sqrt{C+z^2}}{C_2} = \frac{y+\sqrt{C^2x^2+y^2}}{C_2x},\quad y = C_2x^2 - \frac{C}{x}.$$

Beiſpiel 2. Es ſei:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{mx^2dy^2+ny^2dx^2},$$

ſo geben dieſelben Subſtitutionen:

$$dx\sqrt{mp^2+n}=(p-z)\,dp,$$

und wenn man $p=zs$ ſetzt:

$$\frac{dx}{x}=\frac{(s-1)\,ds}{\sqrt{ms^2+n}-s^2+s}.$$

Beiſpiel 3. Es ſei:

$$nx^2d^2y=(ydx-xdy)^2,$$

ſo geben dieſelben Transformationen:

$$ndp=(p-z)dz,$$

und wenn man $p-z=u$ ſetzt, ſo findet man:

$$dz-\frac{ndu}{u-n}=0,\ x=\frac{u-n}{C_1u},$$

$$y=nxl\,\frac{u-n}{C_2}=nx\,l\,\frac{nC_1x}{C_2(1-C_1x)}.$$

Beiſpiel 4. Es ſei:

$$(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}=ndxd^2y\sqrt{x^2+y^2},$$

ſo findet man:

$$(1+p^2)^{\frac{3}{2}}\,dz=n(p-z)\,dp\,\sqrt{1+z^2}.$$

Um dieſe Gleichung zu integriren, wollen wir ſetzen:

$$p=\text{tang}\,\alpha,\quad z=\text{tang}\,\beta,$$

ſo erhalten wir:

$$dx=\frac{d\alpha-d\beta}{1-n\sin(\alpha-\beta)}=\frac{d\gamma}{1-n\sin\gamma},$$

wenn $\gamma=\alpha-\beta$ iſt, und:

$$\frac{dx}{x}=\frac{ds}{p-z}=\frac{d\beta\cos\alpha}{\cos\beta\sin\gamma}=\frac{(\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma)\,d\beta}{\cos\beta\sin\gamma}$$

$$=\frac{\cos\gamma\,d\beta}{\sin\gamma}-\frac{\sin\beta d\beta}{\cos\beta}=\frac{n\cos\gamma d\beta}{1-n\sin\gamma}-\frac{\sin\beta d\beta}{\cos\beta},$$

weil:

$$d\beta = \frac{n \sin\gamma d\gamma}{1 - n \sin\gamma}$$

ist; folglich:

$$x = \frac{C_1 \cos\beta}{1 - n \sin\gamma}, \quad y = \frac{C_1 \sin\beta}{1 - n \sin\gamma}, \quad \beta = \int \frac{n d\gamma}{1 - n \sin\gamma}.$$

§. 260. — IV. Differenzialgleichung, welche homogen wird, wenn man darin y als vom $n$ten und folglich p, q resp. als Größen vom $(n-1)$ten, $(n-2)$ten Grade betrachtet.

Eine solche Gleichung kann man auf eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung zurückführen; denn wenn man setzt:

$$y = x^n z, \quad p = x^{n-1} t, \quad q = x^{n-2} u,$$

so hat man wegen $dy = pdx$, $dp = qdx$:

$$xdz + nzdx = tdx, \quad xdt + (n-1)\, tdx = udx,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{t - nz} = \frac{dt}{u - (n-1)t}, \quad dz[u - (n-1)t] = (t - nz)\, dt.$$

Wenn man aber die Werthe von y, p, q als Functionen von z, t, u in die gegebene Gleichung substituirt, so verschwindet x nach der Voraussetzung aus der resultirenden Gleichung, welche folglich nur z, t, u enthält, und aus dieser Gleichung leitet man den Werth von u ab, um denselben in die Differenzialgleichung der ersten Ordnung mit z und t zu substituiren, welche alsdann durch die bekannten Methoden integrirt wird, und endlich kann man leicht von dem Werthe von t als Function von z zu den Werthen von x und y übergehen.

Beispiel 1. Es sei:

$$x^2 d^2y = aydx^2 + bxdxdy, \text{ oder } qx^2 = ay + bpx,$$

so ist $n = 0$, und wenn man setzt:

$$p = \frac{t}{x}, \quad q = \frac{u}{x^2},$$

so kommt:

$$u = ay + bt$$

und die Differenzialgleichung:

$$dz[u - (n-1)t] = (t - nz)dt$$

verwandelt sich in folgende:

$$aydy + (b+1)\, tdy = tdt.$$

Setzt man nun $t = yz$, so kommt:

$$ady + (b+1)\, zdy = yzdz + zd^2y,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{a + (b+1)z - z^2}$$

und wenn man ſetzt:

$$a+(b+1)z-z^2=(\alpha+z)(\beta-z);$$

ſo erhält man:

$$\alpha\beta=a,\quad \beta-\alpha=b+1,$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}dz}{\alpha+z}+\frac{\frac{\beta}{\alpha+\beta}dz}{\beta-z},$$

$$\mathrm{l}y=C_1-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\mathrm{l}(\alpha+z)-\frac{\beta}{\alpha+\beta}\mathrm{l}(\beta-z),$$

oder:

$$y(\alpha+z)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}(\beta-z)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}=C_1.$$

Ferner hat man:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{(\alpha+z)(\beta-z)},$$

oder:

$$\frac{dx}{x}=\frac{1}{\alpha+\beta}\frac{dz}{\alpha+z}+\frac{1}{\alpha+\beta}\frac{dz}{\beta-z},$$

$$x=C_2\left(\frac{\alpha+z}{\beta-z}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}},\quad \frac{\alpha+z}{\beta-z}=\left(\frac{x}{C_2}\right)^{\alpha+\beta},\quad z=\frac{\beta x^{\alpha+\beta}-\alpha C_2^{\alpha+\beta}}{C_2^{\alpha+\beta}+x^{\alpha+\beta}}$$

und wenn man ſubſtituirt:

$$y=C'\left(\frac{C_2^\alpha}{x^\alpha}+\frac{x^\beta}{C_2^\beta}\right),$$

wo $\frac{C_1}{\alpha+\beta}=C'$ geſetzt iſt.

Beiſpiel 2. Es ſei:

$$x^4d^2y=x^3dxdy+2xydxdy-4y^2dx^2,$$

oder:

$$x^4q=x^3p+2xyp-4y^2,$$

ſo iſt $n=2$, und wenn man ſetzt:

$$y=xz,\quad p=xt,\quad q=u;$$

ſo erhält man:

$$u=t+2zt-4z^2$$

und die Differenzialgleichung mit z, t iſt:

$$2xdz(t-2z)=dt(t-2z),$$

folglich:

$$t = 2z, \text{ oder } t = z^2 + C_1.$$

Wenn $t = 2z$ ist, so muß man wegen $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{t-2z}$ haben:

$$dz = 0, \quad z = C', \quad y = C'x^2.$$

Wenn $t = z^2 + C_1$ ist, so ist:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^2 - 2z + C_1},$$

und jenachdem die Constante C_1, $= 1 - C_2$, oder $= 1 + C_2$ ist, findet man:

$$1\frac{x}{C_1} = \frac{1}{1-z} = \frac{x^2}{x^2 - y}, \quad x^2 = (x^2 - y)1\frac{x}{C'},$$

oder:

$$1x = -\frac{1}{2C'}1\frac{C' + z - 1}{C' - z + 1} + C'', \quad x = C_2\left[\frac{(C+1)x^2 - y}{(C-1)x^2 + y}\right]^{\frac{1}{2C}},$$

oder:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{(z-1)^2 + C_1},$$

$$1\frac{x}{C_2} = \frac{1}{C_1}\text{arc tang}\frac{z-1}{C_1}, \quad \frac{z-1}{C_1} = \frac{y - x^2}{C_1 x^2} = \text{tang } C_1 1\frac{x}{C_2}.$$

§. 261.— V. Die Veränderliche y und ihre Differenziale dy, d^2y, ... haben in der gegebenen Differenzialgleichung überall einerlei Dimensionen.

Eine solche Differenzialgleichung der zweiten Ordnung kann in diesem Falle wieder auf eine von der ersten Ordnung zurückgeführt werden; denn setzt man wie gewöhnlich:

$$dy = pdx, \quad dp = qdx,$$

so haben die Größen y, p, q in der transformirten Gleichung einerlei Dimensionen, und wenn man $p = uy$, $q = vy$ setzt; so kommt y in allen Gliedern auf derselben Potenz vor und verschwindet aus der Gleichung, so daß die resultirende Gleichung nur noch die Größen x, u, v enthält und man daraus z. B. den Werth von v als Function von x und u ableiten kann. Aus den beiden Gleichungen:

$$p = uy, \quad dp = qdx$$

ergiebt sich ferner:

$$dy = uydx, \quad udy + ydu = vydx$$

und folglich:

$$\frac{dy}{y} = u\,dx, \quad \frac{dy}{y} = \frac{v\,dx - du}{u},$$

$$du + u^2 dx = v\,dx.$$

In dieſe Differenzialgleichung der erſten Ordnung braucht man alſo nur für v ſeinen Werth als Function von u und x zu ſubſtituiren, um integriren zu können und den Werth von u als Function von x zu erhalten, worauf man y und vermittelſt der Gleichung:

$$\mathrm{l}y = \int u\,dx, \quad y = e^{\int u\,dx}$$

das geſuchte Integral beſtimmt.

Wenn man $v = u^2 + \mathrm{V}$ ſetzt, ſo verwandelt ſich die Differenzialgleichung:

$$du + u^2 dx = v\,dx$$

in folgende:

$$du = \mathrm{V}\,dx$$

und iſt integrabel: 1) wenn $\mathrm{V} = \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{U}}$ iſt, wo X eine Function von x und U eine Function von u bezeichnet; 2) wenn V eine homogene Function des Grades Null von x und u iſt; 3) wenn $\mathrm{V} = \mathrm{X}_1 u + \mathrm{X}_2 u_n$ iſt, wo X_1, X_2 Functionen von x ſind, und 4) wenn man hat:

$$\mathrm{V} = \frac{1}{\mathrm{U}_1 x + \mathrm{U}_2 x^n},$$

wo U_1, U_2 Functionen von u ſind.

Beiſpiel. Es ſei:

$$\alpha y d^2 y + \beta dy^2 = \frac{y dx\, dy}{\sqrt{a^2 + x^2}} \text{ oder } \alpha y q + \beta d^2 = \frac{py}{\sqrt{a^2 + x^2}},$$

ſo erhält man, wenn man $p = uy$, $q = vy$ ſetzt:

$$\alpha v + \beta u^2 = \frac{u}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad v = \frac{u}{\alpha\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{\beta u^2}{\alpha},$$

$$du + u^2 dx = \frac{u dx}{\alpha\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{\beta u^2 dx}{\alpha},$$

oder wenn man $u = \frac{1}{s}$ ſetzt:

$$ds + \frac{s dx}{\alpha\sqrt{a^2 + x^2}} = \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) dx.$$

Multiplicirt man mit $(x + \sqrt{a^2 + x^2})^{\frac{1}{\alpha}}$ und integrirt, ſo findet man:

$$s(x+\sqrt{a^2+x^2})^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\int dx(x+\sqrt{a^2+x^2})^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Setzt man ferner:

$$x+\sqrt{a^2+x^2} = t^\alpha,$$

folglich:

$$a^2 = t^{2\alpha} - 2t^\alpha x,$$

so ist:

$$x = \frac{t^{2\alpha}-a^2}{2t^\alpha} = \tfrac{1}{2}t^\alpha - \tfrac{1}{2}a^2 t^{-\alpha},\quad dx = \frac{\alpha}{2}\,dt\,(t^{\alpha-1}+a^2t^{-\alpha-1}),$$

$$st = \left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\int\frac{\alpha}{2}(t^\alpha+a^2t^{-\alpha})dt,\ st = C_1+\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}+a^2\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right),$$

aber wegen $\frac{dy}{y} = u dx = \frac{dx}{s}$ hat man:

$$\frac{dx}{s}\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{ds}{s}+\frac{dx}{\alpha\sqrt{a^2+x^2}}$$

folglich:

$$\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)\mathrm{l}y = \mathrm{l}s+\frac{1}{\alpha}\mathrm{l}(x+\sqrt{a^2+x^2}) = \mathrm{l}\,st+C_2,\ y = C'(st)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}},$$

und wenn man $C_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}C'$ setzt:

$$y = C'\left(C'+\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{a^2t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}},$$

und endlich wegen $t = (x+\sqrt{a^2+x^2})^{\frac{1}{\alpha}}$ hat man:

$$C_1 y^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} = A+\frac{1}{\alpha+1}(x+\sqrt{a^2+x^2})^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}+\frac{a^2}{1-\alpha}(x+\sqrt{a^2+x^2})^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

Wenn man diese Gleichung auf die Form:

$$\alpha yq+\beta p^2 = \frac{py}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

brächte und sie mit $\frac{dx}{yp}$ multiplicirte, so ließe sie sich leichter integriren: denn wegen $qdx = dp$, $pdx = dy$ findet man:

$$\frac{\alpha dp}{p}+\frac{\beta dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

folglich wenn man integrirt:

$$p^\alpha y^\beta = C^\alpha(x+\sqrt{a^2+x^2}),\ y^{\frac{\beta}{\alpha}}dy = Cdx(x+\sqrt{a^2+x^2})^{\frac{1}{\alpha}},$$

und eine zweite Integration führt auf die bereits gefundene Gleichung. Die allgemeine Form der Differenzialgleichungen, welche sich auf diese Weise integriren lassen, ist:

$$Pdp + Ydy + Xdx = 0 \text{ oder } Pq + Yp + X = 0,$$

wo P, Y, X resp. Functionen von p, von y, von z sind.

Beispiel. Es sei:

$$xyd^2y = ydxdy + xdy^2 + \frac{bxdy^2}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

oder:

$$xyq = yp + xp^2 + \frac{bxp^2}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

so hat man, wenn man $p = uy$, $q = vy$ setzt:

$$du + u^2dx = u\frac{dx}{x} + u^2dx + \frac{bu^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad \frac{xdu - udx}{u^2} = \frac{bxdx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$C_1 - \frac{x}{u} = -b\sqrt{a^2-x^2}, \; u = \frac{x}{C_1 + b\sqrt{a^2-x^2}}, \; \frac{dy}{y} = \frac{xdx}{C_1 + b\sqrt{a^2-x^2}}$$

und wenn man $\sqrt{a^2-x^2} = t$, folglich $xdx = -tdt$ setzt:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{tdt}{C_1 + bt}, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dt}{b} + \frac{C_1 dt}{b(C_1 + bt)},$$

$$ly = -\frac{t}{b} + \frac{C_1}{b^2} l(C_1 + bt) + lC'$$

und endlich, wenn man $C_1 = C'b^2$ setzt:

$$l\frac{y}{C'} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{b} + Cl\frac{C'b + \sqrt{a^2-x^2}}{b}.$$

§. 262. — VI. Integration vermittelst eines unbestimmten Factors.

Es wird nicht überflüssig sein, dieses Integrationsverfahren wenigstens an einem Beispiele zu zeigen, und wir wollen zu dem Zwecke mit Euler die Differenzialgleichung:

$$d^2y + \frac{aydx^2}{(by^2 + c + 2dx + ex^2)^2} = 0$$

betrachten, indem wir den ersten Theil derselben durch Multiplication mit:

$$2X_1dy + 2X_2ydx,$$

wo X_1, X_2 Functionen von x sind, integrabel zu machen suchen, und durch:

$$X_1dy^2 + 2X_2ydxdy + Udx^2 = Cdx^2,$$

wo U eine Function von y und x ist, das Integral des Ausdruckes:

$$2U^2y\,(X_1dy + X_2ydx) + \frac{2aydx^2(X_1dy + X_2ydx)}{(by^2+c+2dx+ex^2)^2}$$

darstellen; so müssen wir haben:

$$dy^2(dX_1+2X_2dx)+2ydxdX_2dy+dx^2dU-\frac{2aydx^2(X_1dy+X_2ydx)}{(by^2+c+2dx+ex^2)^2}=0.$$

Diese Gleichung kann durch Integration den Werth von U nur dann geben, wenn man hat:

$$dX_1+2X_2dx=0$$

und alsdann hat man die Gleichung:

$$dU=\frac{ay(2X_1dy-ydX_1)}{(by^2+c+2dx+ex^2)^2}-2ydy\frac{dX_2}{dx},$$

deren zweiter Theil das Differenzial des Ausdruckes:

$$\frac{-aX_1}{b(by^2+c+2dx+ex^2)}-y^2\frac{dX_2}{dx}$$

in Beziehung auf y ist. Man hat also:

$$U=\frac{-aX_1}{b(by^2+c+2dx+ex^2)}-y^2\frac{dX_2}{dx},$$

wofern das Differenzial des zweiten Theiles, indem y als constant betrachtet wird, $=0$ ist, oder:

$$\frac{-adX_1(by^2+c+2dx+ex^2)+2aX_1dx(d+ex)}{b(by^2+c+2dx+ex^2)^2}-y^2\frac{d^2X_2}{dx}$$
$$=-\frac{ay^2dX_1}{(by^2+c+2dx+ex^2)^2}.$$

Dieser Gleichung wird aber genügt, wenn man setzt:

$$\frac{d^2X_2}{dx^2}=0,\quad -dX_1(c+2dx+ex^2)+2X_1dx(d+ex)=0,$$

und es ist nun noch zu untersuchen, ob diese beiden Bedingungen mit der bereits gefundenen:

$$dX_1+2X_2dx=0$$

zugleich stattfinden können. Die zweite Bedingungsgleichung giebt aber:

$$X_1=c+2dx+ex^2,$$

folglich:

$$X_2 = -\frac{dX_1}{2dx} = -d - ex, \text{ und } \frac{d^2X_2}{dx^2} = 0,$$

so daß die beiden Bedingungen übereinstimmen. Der gesuchte Factor ist folglich:

$$2dy(c + 2dx + ex^2) - 2ydx(d + ex)$$

und führt auf das Integral:

$$\frac{dy^2}{dx^2}(c+2dx+ex^2) - 2y\frac{dy}{dx}(d+ex) - \frac{a(c+2dx+ex^2)}{b(by^2+c+2dx+ex^2)} + ey^2 = C,$$

oder wenn man $\frac{a}{b}$ zu beiden Theilen addirt:

$$\frac{dy^2}{dx^2}(c+2dx+ex^2) - 2y\frac{dy}{dx}(d+ex) + \frac{ay^2}{by^2+c+2dx+ex^2} + cy^2 = C.$$

Wenn man setzte:

$$c + 2dx + ex^2 = bz^2,$$

folglich:

$$d + ex = \frac{bzdx}{dx},$$

so verwandelte sich die vorhergehende Gleichung in folgende:

$$\frac{bz^2dy^2}{dx^2} - \frac{2byzdydz}{dx^2} + ey^2 + \frac{ay^2}{b(y^2+z^2)} = \frac{C}{b}$$

und wenn man $y = uz$ setzte, in:

$$\frac{bz^4du^2}{dx^2} - \frac{bu^2z^2dz^2}{dx^2} + eu^2z^2 + \frac{au^2}{b(1+u^2)} = \frac{C}{b}.$$

Es ist aber:

$$\frac{z^2dz^2}{dx^2} = \frac{(d+ex)^2}{b^2},$$

folglich:

$$\frac{bz^4du^2}{dx^2} + \frac{ce-d^2}{b}u^2 = \frac{C+(C-a)u^2}{b(1+u^2)},$$

oder:

$$\frac{b^2z^4du^2}{dx^2} = \frac{C+(C-a+d^2-ce)u^2+(d^2-ce)u^4}{1+u^2}$$

und wenn man für z seinen Werth setzt:

$$\frac{dx}{c+2dx+ex^2} = \frac{du\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{C+(C-a+d^2-ce)u^2+(d^2-ce)u^4}},$$

worin die Veränderlichen getrennt sind und u durch eine Function von x ausgedrückt ist. Ferner ist:

$$y = uz = u\sqrt{\frac{c+2dx+ex^2}{b}}.$$

Wenn man in der gegebenen Gleichung setzt:

$$c+2dx+ex^2 = bz^2,$$

so verwandelt sie sich in:

$$d^2y + \frac{aydx^2}{b^2(y^2+x^2)^2} = 0,$$

und wenn man $y = uz$ setzt, in:

$$zd^2u+2dzdu+ud^2z+\frac{audx^2}{b^2z^3(1+u^2)^2} = 0.$$

Der Factor, welcher sie integrabel macht, ist:

$$2b(z^2dy - yzdz) \text{ oder } 2bz^3du \text{ oder blos } z^3du.$$

Da aber:

$$dz = \frac{dx(d+ex)}{bz}$$

ist, so hat man:

$$d^2z = \frac{edx^2}{bz} - \frac{dxdz(d+ex)}{bz^2} = \frac{edx^2}{bz} - \frac{dx^2(d+ex)^2}{b^2z^3} = \frac{(ce-d^2)\,dx^2}{b^2z^3},$$

$$z^3d^2z = \frac{ce-d^2}{b^2}dx^2.$$

Die mit z^3du multiplicirte Gleichung wird alsdann:

$$z^4dud^2u+2z^3dzdu^2+\frac{ce-d^2}{b^2}ududx^2+\frac{aududx^2}{b^2(1+u^2)^2} = 0;$$

ihr unmittelbares Integral ist offenbar:

$$\tfrac{1}{2}z^4du^2+\frac{ce-d^2}{2b^2}u^2dx^2-\frac{adx^2}{2b^2(1+u^2)} = \tfrac{1}{2}C_1dx^2,$$

woraus folgt:

$$z^2du = dx\sqrt{C_1+\frac{d^2-ce}{b^2}u^2+\frac{a}{b^2(1+u^2)}}$$

und die zweite Integration läßt sich leicht verrichten, sobald der Werth von z als Function von x gegeben ist, weil sich alsdann

die Veränderlichen unmittelbar trennen lassen. Auch ist zu bemerken, daß der Werth von z der Bedingungsgleichung:

$$z^2d^2z=\frac{ce-d^2}{b^2}dx^2=adx^2$$

genügt, welche mit der Gleichung:

$$c+2dx+ex^2=bz^2$$

übereinstimmen muß. In der That, aus der Bedingung $z^2d^2z=adx^2$ folgt:

$$2dzd^2z=\frac{2adx^2dx}{z^3},\ dz^2=\beta dx^2-\frac{adx^2}{z^3},\ dx=\frac{zdz}{\sqrt{\beta z^2-\alpha}},$$

$$\beta x+\gamma=\sqrt{\beta z^2-\alpha},\ \beta z^2=\alpha+\gamma^2+2\beta\gamma x+\beta^2x^2.$$

Beispiel. Es sei die Differenzialgleichung:

$$d^2y+\frac{a^2ydx^2}{(y^2+x^2)^2}=0$$

gegeben, so wird dieselbe integrabel, wenn man sie mit dem Factor $2x^2dy-2yxdx$ multiplicirt, und ihr Integral ist:

$$x^2\frac{dy^2}{dx^2}-2xy\frac{dy}{dx}+y^2+\frac{a^2y^2}{y^2+x^2}=b^2.$$

Setzt man $y=ux$, so erhält man die transformirte Gleichung:

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{du\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{b^2+(b^2-a^2)u^2}}.$$

§. 263. — VII. Wir wollen nach Liouville zwei Beispiele merkwürdiger Integrationen hier noch anführen, wovon die eine durch ein oft anwendbares Verfahren, aber die andere auf einem ganz indirecten Wege bewerkstelligt ist.

1) Wir wollen die Gleichung:

$$D_x^2y+f(x)D_xy+F(y)D_xy^2=0$$

betrachten und einstweilen annehmen, daß das dritte Glied im ersten Theile derselben fehlt, so daß die zu integrirende Gleichung folgende ist:

$$D_x^2y+f(x)D_xy=0,$$

so ergiebt sich daraus:

$$D_xy=Ce^{-\int f(x)dx}.$$

Betrachten wir die gegebene Gleichung wieder, und untersuchen, ob man durch Verwandlung der Constante C in eine Function von

y, wenn F(y) nicht Null ist, nicht bewerkstelligen kann, daß die erste Ableitung dieselbe Form:

$$D_x y = Ce^{-\int f(x)\,dx}$$

behält. Wenn man differenzirt, so findet man:

$$D_x^2 y = e^{-\int f(x)\,dx}[D_y C\ D_x y - Cf(x)],$$

oder wenn man für $e^{-\int f(x)\,dx}$ seinen aus der Gleichung:

$$D_x y = Ce^{-\int f(x)dx}$$

abgeleiteten Werth setzt:

$$D_x^2 y = -f(x) D_x y + \frac{1}{C} D_y C\, D_x y^2.$$

Substituirt man diesen Werth von $D_x^2 y$ in die gegebene Gleichung, so erhält man:

$$\frac{1}{C} D_y C + F(y) = 0$$

und wenn man integrirt:

$$C = C' e^{-\int F(y)dy}.$$

Man hat folglich die Gleichung:

$$D_x y = C' e^{-\int F(y)dy} e^{-\int f(x)dx},$$

worin die Veränderlichen getrennt sind, und welche das gesuchte Integral:

$$\int e^{\int F(y)dy}\,dy = C' \int e^{-\int f(x)\,dx}\,dx + C''$$

giebt. Dasselbe Integral hätte man erhalten, wenn man für einen Augenblick $f(x) = 0$ gesetzt und:

$$D_x^2 y + F(y) D_x y^2 = 0$$

zur Hülfsgleichung genommen hätte. Setzt man $D_x y = y'$ und bemerkt, daß $D_x^2 y = y' D_y y'$ ist, so hat man:

$$D_y y' + y' F(x) = 0,$$

und wenn man integrirt:

$$y' = D_x y = Ce^{-\int F(y)dy}.$$

Betrachtet man nun C als eine Function von x, so hat man:

$$D_x^2 y = -F(y) D_x y^2 + \frac{1}{C} D_x C, D_x y,$$

und wenn man in die gegebene Gleichung substituirt:

$$\frac{1}{C} D_x C + f(x) = 0, \quad C = C' e^{\int f(x) dx},$$

$$D_x y = C' e^{-\int F(y) dy} e^{-\int f(x) dx}, \text{ etc.}$$

2) Wir wollen annehmen, daß man das Integral $y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots c_n)$ einer beliebigen Differenzialgleichung der $n$ten Ordnung:

$$f(x, y, D_x y, D_x^2 y, \ldots, D_x^n y) = f[x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}] = 0$$

kenne, so ist das Integral y und dessen n Ableitungen y', y'', ..., $y^{(n)}$ nicht blos von x, sondern auch von n Constanten c_1, c_2, ... c^n abhängig, wogegen die Veränderliche x von diesen Constanten völlig unabhängig ist, so daß man hat, wenn man die Function f in Beziehung auf eine dieser Constanten, z. B. auf c_1 differenzirt:

$$D_y f D_{c_1} y + D_{y'} f D_{c_1} y' + D_{y''} f D_{c_1} y'' + \ldots + D_{y^{(n)}} f D_{c_1} y^{(n)} = 0.$$

Setzt man aber $D_{c_1} y = z$, wo z eine neue Veränderliche ist; so hat man:

$$D_{c_1} y' = D_x z, \quad D_{c_1} y'' = D_x^2 z, \ldots, \quad D_{c_1} y^{(n)} = D_x^n z;$$

denn es ist:

$$D_{c_1} y' = D_{c_1} . D_x y = D_x . D_{c_1} y = D_x z,$$

$$D_{c_1} y'' = D_{c_1} . D_x y' = D_x . D_{c_1} y' = D_x^2 z,$$

. . . . . .

Substituirt man für $D_{c_1} y$, $D_{c_1} y'$, ... ihre Werthe so erhält man die Gleichung:

$$z D_y f + D_x z D_{y'} f + D_x^2 z D_{y''} f + \ldots + D_x^n z D_{y^{(n)}} f = 0,$$

worin y, y', y'', ..., $y^{(n)}$ Functionen von x sind, welche durch die Gleichung:

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

bestimmt werden, und folglich müssen $D_y f$, $D_{y'} f$, ... $D_{y^{(n)}} f$ als bekannte Functionen von x, c_1, c_2, ... c_n betrachtet werden. Nun ist aber diese Gleichung eine lineare und homogene Differenzialgleichung mit z und dessen n Ableitungen, welcher bekanntlich durch den Werth $z = D_{c_1} y$ genügt wird, weil wir diese Gleichung dadurch erhalten haben, daß wir $D_{c_1} y = z$ gesetzt haben, und das von c_1 Gesagte gilt auch von c_2, c_3, ..., c_n. Folglich wird der Differenzialgleichung:

$$z\,D_y f + D_x z\,D_{y'} f + D_x^2 z\,D_{y''} f + \ldots + D_x^n z D_y^{(n)} f = 0$$

durch die n particulären Werthe:

$$z = D_{c_1} y, \quad z = D_{c_2} y, \ldots, \quad z = D_{c_n} y$$

genügt, und ihr allgemeines Integral ist mithin:

$$y = C' D_{c_1} y + C'' D_{c_2} y + C''' D_{c_3} y + \ldots + C^{(n)} D_{c_n} y.$$

§ 264. — VIII. Integration einiger gleichzeitigen Differenzialgleichungen. 1) Binet ist durch höchst sinnreiche Transformationen zur Integration des folgenden Systemes von Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung:

$$D_t^2 x = D_x R, \quad D_t^2 y = D_y R, \quad D_t^2 z = D_z R, \ldots$$

gelangt, wo t die unabhängige Veränderliche ist und x, y, z, ... die abhängigen Veränderlichen sind, und R ist eine bestimmte Function der Größe $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \ldots}$, so daß man hat:

$$D_x R = \frac{x}{r} D_r R, \quad D_y R = \frac{y}{r} D_r R, \text{ etc.}$$

und die gegebenen Differenzialgleichungen verwandeln sich alsdann in:

$$D_t^2 x = \frac{x}{r} D_r R, \quad D_t^2 y = \frac{y}{r} D_r R, \quad D_t^2 z = \frac{z}{r} D_r R, \ldots$$

Verbindet man sie paarweise, um $D_r R$ zu eliminiren, so findet man:

$$x D_t^2 y - y D_t^2 x = 0, \quad z D_t^2 x - x D_t^2 z = 0, \quad y D_t^2 z - z D_t^2 y = 0, \ldots,$$

woraus sich die $\frac{n(n-1)}{1.2}$ ersten Integrale:

$$x D_t y - y D_t x = C_1, \quad z D_t x - x D_t z = C_2, \quad y D_t z - z D_t y = C_3, \ldots$$

ergeben. Die Summe der Quadrate dieser Gleichungen giebt:

$$(x D_t y - y D_t x)^2 + (z D_t x - x D_t z)^2 + (y D_t z - z D_t y)^2 + \ldots$$
$$= (x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)(D_t x^2 + D_t y^2 + D_t z^2 + \ldots) - (x D_t x + y D_t y + z D_t z + \ldots)^2$$
$$= A^2.$$

Multiplicirt man die gegebenen Differenzialgleichungen resp. mit dx, dy, dz, ..., addirt und integrirt, so findet man:

$$D_t x^2 + D_t y^2 + D_t z^2 + \ldots = 2(R + B),$$

und folglich, wenn man substituirt:

$$(xD_t x + y D_t y + z D_t z + \ldots)^2 = 2r^2(R+B) - A^2$$

Es iſt aber:

$$xD_t x + yD_t y + zD_t z + \ldots = rD_t r,$$

folglich:

$$r^2 D_t r^2 = 2r^2(R+B) - A^2,\quad dt = \frac{rdr}{\sqrt{2r^2(R+B)-A^2}},$$

$$D_t r^2 = 2R + 2B - \frac{A^2}{r^2},\quad D_t^2 r = D_r R + \frac{A^2}{r^3}.$$

Vermittelſt dieſer Gleichung kann man $D_r R$ aus der erſten der gegebenen Gleichungen, nämlich:

$$D_t^2 x = \frac{x}{r} D_r R$$

eliminiren, wodurch man erhält:

$$rD_t^2 x - xD_t^2 r = D_t(rD_t x - xD_t r) = D_t r^2 D_t \frac{x}{r} = -\frac{A^2}{r^2}\frac{x}{r},$$

und wenn man mit $\frac{r^2}{A^2}$ multiplicirt:

$$\frac{r^2}{A} D_t . \frac{r^2}{A} D_t \frac{x}{r} + \frac{x}{r} = 0.$$

Dieſe letzte Gleichung nimmt eine einfachere Form an, wenn man ſetzt:

$$A\frac{dt}{r^2} = d\varphi = \frac{Adr}{r\sqrt{2r^2(R+B)-A^2}};$$

denn ſie verwandelt ſich alsdann in:

$$D_\varphi^2 . \frac{x}{r} + \frac{x}{r} = 0$$

und man hat ebenſo:

$$D_\varphi^2 . \frac{y}{r} + \frac{y}{r} = 0,\quad D_\varphi^2 . \frac{z}{r} + \frac{z}{r} = 0, \ldots$$

Dieſe Gleichungen laſſen ſich einzeln integriren, und wenn man die $2n$ willkührlichen Conſtanten mit a_1, b_1, a_2, b_2, ... a_n, b_n bezeichnet; ſo hat man:

$$\frac{x}{r} = a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi,\quad \frac{y}{r} = a_2 \cos\varphi + b_2 \sin\varphi,$$

$$\frac{z}{r} = a_3 \cos\varphi + b_3 \sin\varphi, \ldots\ldots$$

Die Gleichung:

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{2r^2(R+B)-A^2}}$$

giebt ferner:

$$t+\alpha = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{2r^2(R+B)-A^2}},$$

und da R blos von r abhängt, so hat man r als Function von $t+\alpha$ und φ ist als Function von r und folglich auch als Function von $t+\alpha$ durch die Gleichung:

$$\varphi+\beta = \int \frac{A\,dr}{r\sqrt{2r^2(R+B)-A^2}}$$

bestimmt. Geht man alsdann zu den Formeln zurück, welche die Werthe von $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, ... geben, so werden die n Veränderlichen selbst durch $t+\alpha$, A, B und $2n$ Constanten a_1, b_1; $a_2, b_2, \ldots$. ausgedrückt, d. h. in diesen Ausdrücken kommen anscheinend $2n+4$ willkührliche Constanten vor, welche durch mehrere Gleichungen miteinander verbunden sein müssen; denn die Aufgabe gestattet nur $2n$ willkührliche Constanten. In der That findet man, wenn man für $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, ... ihre Werthe in die Gleichung:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}+\ldots = 1$$

substituirt und der Kürze wegen eine bekannte Bezeichnung anwendet:

$$\cos^2\varphi\Sigma a_1^2 + \sin^2\varphi\Sigma b_1^2 + 2\sin\varphi\cos\varphi\Sigma a_1 b_1 = 1,$$

und da diese Gleichung für jeden Werth von φ statt finden muß, so hat sie die drei Gleichungen:

$$\Sigma a_1^2 = 1,\ \Sigma b_1^2 = 1,\ \Sigma a_1 b_1 = 0$$

zur Folge, wo die Constante β übrigens mit a_1, b_1 zusammenfällt, welche sie blos modificirt; denn man hat:

$$a_1\cos(\varphi+\beta)+b_1\sin(\varphi+\beta) = a'\cos\varphi+b'\sin\varphi.$$

Die $2n+4$ Constanten, welche sich zunächst auf die $2n+3$ Constanten A, B, α, a_1, b_1, ... reduciren, sind folglich durch drei Gleichungen mit einander verbunden, und bilden in der That nur $2n$ willkührliche Constanten.

Die beiden Integrale:

$$\int \frac{r\,dr}{\sqrt{2r^2(R+B)-A^2}},\quad \int \frac{dr}{r\sqrt{2r^2(R+B)-A^2}},$$

welche nichts miteinander gemein zu haben und völlig unabhängig

von einander zu ſein ſcheinen, laſſen ſich dennoch auf einen gemeinſchaftlichen Urſprung zurückführen. Denn wenn wir annehmen, daß R eine durch die Gleichung:

$$R = \int \frac{dr}{r} \sqrt{2r^2(R+B) - A^2}$$

beſtimmte Function von r iſt, ſo hat man offenbar:

$$t + \alpha = D_B R, \quad \varphi + \beta = -D_A R$$

und die beiden vorhergehenden Integrale ſind, abgeſehen vom Zeichen, die beiden partiellen Ableitungen der Function R, von welcher die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ allein abhängen.

Aus dem eben Geſagten folgt, daß die Gleichung:

$$D_t^2 x = D_r R . \frac{x}{r},$$

wenn ſie ſucceſſive in:

$$\frac{r^2}{A} D_t . \frac{r^2}{A} D_t \frac{x}{r} + \frac{x}{r} = 0,$$

und:

$$D_\varphi^2 . \frac{x}{r} + \frac{x}{r} = 0$$

transformirt wird, zum allgemeinen Integrale:

$$x = r (a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi)$$

hat, wo a_1, b_2 zwei willkührliche Conſtanten ſind. Um ein Beiſpiel zu geben, wollen wir $R = \frac{m}{r}$ ſetzen, ſo iſt die zu integrirende Gleichung:

$$D_t^2 x + \frac{mx}{r^3} = 0,$$

wo r als Function von t durch die Gleichung:

$$t + \alpha = \int \frac{r dr}{\sqrt{2r^2 \left(\frac{m}{r} + B\right) - A^2}},$$

oder wenn man ſetzt:

$$B = -\frac{m}{a}, \quad A^2 = ma(1 - e^2),$$

durch die Gleichung:

$$t + \alpha = \int \frac{r dr}{\sqrt{\frac{m}{a} [a^2 e^2 - (a - r)^2]}}$$

gegeben wird.

Setzt man ferner:

$$a-r=ae\cos\psi, \text{ oder } r=a(1-e\cos\psi),$$

wo ψ eine neue Hülfsgröße ist, so hat man:

$$t+\alpha=\int\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m}}(1-e\cos\psi)d\psi,\quad \psi-e\sin\psi=(t+\alpha)\sqrt{\frac{m}{a^3}},$$

$$d\varphi=\frac{A}{r^2}dt=\frac{\sqrt{ma(1-e^2)}\,a^{\frac{3}{2}}(1-e\cos\psi)d\psi}{a^2\sqrt{m}(1-e\cos\psi)^2}=\frac{\sqrt{1-e^2}\,d\psi}{1-e\cos\psi},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{1+e}}{\sqrt{1-e}}\operatorname{tang}\frac{\psi}{2},\quad \cos\varphi=\frac{\cos\psi-e}{1-e\cos\psi}=\frac{a(\cos\psi-e)}{r},$$

$$\sin\varphi=\frac{a\sin\psi\sqrt{1-e^2}}{r},\quad x=aa_1(\cos\psi-e)+ab_1\sin\psi\sqrt{1-e^2}.$$

Für ψ hat man blos noch seinen Werth als Function von t zu setzen, um das gesuchte Integral zu erhalten; allein man muß alsdann die transcendente Gleichung:

$$\psi-e\sin\psi=(t+\alpha)\sqrt{\frac{m}{a^3}}$$

auflösen. Man kann den Werth von t als Function von x auch leichter erhalten; denn setzt man:

$$aa_1=c\cos\gamma,\quad ab_1\sqrt{1-e^2}=c\sin\gamma,$$

wo c und γ zwei neue willkührliche Constanten sind, so hat man:

$$\cos(\psi-\gamma)=e\cos\gamma+\frac{x}{c},\quad \psi=\gamma+\operatorname{arc}\cos\left(\frac{x}{c}+e\cos\gamma\right),$$

$$(t+\alpha)\sqrt{\frac{m}{a^3}}=\gamma+\operatorname{arc}\cos\left(\frac{x}{c}+e\cos\gamma\right)-e\sin\gamma\left(\frac{x}{c}+e\cos\gamma\right)$$
$$-e\cos\gamma\sqrt{1-\left(\frac{x}{c}+e\cos\gamma\right)^2}.$$

Aus dieser Gleichung kann man leicht den arc. cos. fortschaffen, wenn man denselben auf eine Seite allein setzt und von beiden Theilen der Gleichung die Cosinus nimmt, und das Resultat ist das allgemeine Integral der Differenzialgleichung der zweiten Ordnung:

$$D_t^2x+\frac{mx}{r^3}=0,$$

wo r eine durch die beiden Gleichungen:

$$r=a(1-e\cos\psi),\quad \psi-e\sin\psi=(t+\alpha)\sqrt{\frac{m}{a^3}}$$

gegebene Function von t ist.

Anmerkung. Wenn A^2 negativ wäre, so wäre φ imaginär; aber gleichwohl läßt sich die Differenzialgleichung auch in diesem Falle noch integriren. Denn man hat alsdann:

$$t+\alpha=\int\frac{rdr}{\sqrt{2r^2(R+B)+A^2}},$$

oder:

$$t+\alpha=\int\frac{rdr}{\sqrt{2r^2R+A^2}},$$

wenn man die Constante B in R mitbegreift. Hieraus ergiebt sich successive:

$$D_t r^2=2R+\frac{A^2}{r^3},\quad D_t^2 r=D_r R-\frac{A^2}{r^3},$$

$$rD_t^2 x-xD_t^2 r-\frac{A^2}{r^2}\frac{x}{r}=0,\quad \frac{r^2}{A^2}D_t.r^2D_t\frac{x}{r}-\frac{x}{r}=0.$$

Setzt man:

$$d\varphi=\frac{Adt}{r^2}=\frac{Adr}{r\sqrt{2r^2R+A^2}},$$

so hat man:

$$D_\varphi^2\frac{x}{r}-\frac{x}{r}=0,\quad \frac{x}{r}=a_1e^{\varphi}+b_1e^{-\varphi}.$$

Zu demselben Resultate wäre man gelangt, wenn man vom Reellen zum Imaginären überginge, für r, R, φ resp. $r\sqrt[4]{-1}$, $R\sqrt{-1}$, $\varphi\sqrt{-1}$ und für $\sin(\varphi\sqrt{-1})$, $\cos(\varphi\sqrt{-1})$ imaginäre Exponentialgrößen setzte.

Anmerkung. Die integrirten Differenzialgleichungen beziehen sich, wenn ihre Anzahl nicht größer als drei ist, auf die Bewegung eines materiellen Punctes, welcher durch eine Kraft D_rR gegen einen festen Mittelpunct angezogen wird, und die Differenzialgleichung:

$$D_t^2x+\frac{mx}{r^3}=0$$

enthält die Theorie der elliptischen Bewegung.

§. 265. 2) Wir wollen noch die Differenzialgleichungen:

$$M_1D_t^{m_1}y+M_2D_t^{m_2}y+M_3D_t^{m_3}y+\ldots=T_1,$$

$$N_1D_t^{n_1}y+N_2D_t^{n_2}y+N_3D_t^{n_3}y+\ldots=T_2$$

betrachten, welche sich auf die sehr einfache Form:

$$\Sigma MD_t^m y=T_1,\quad \Sigma ND_t^n y=T_2$$

bringen lassen, worin T_1, T_2 beliebige Functionen der unabhängigen Veränderlichen t und einer oder mehrerer anderer Veränderlichen, so wie ihrer Ableitungen sind. Wenn die Coefficienten M_1, M_2, M_3, ...; N_1, N_2, N_3, ... Constanten sind, so braucht man, um y und dessen Ableitungen zu eliminiren, nur in dem ersten Theile der beiden vorhergehenden Gleichungen für y resp. T_2 und T_1 zu setzen und dann die Resultate einander gleich zu setzen, so daß die Endgleichung folgende ist:

$$\Sigma M D_t^m T_2 = \Sigma N D_t^n T_1.$$

Denn wenn man die erste Gleichung successive n_1 mal, n_2 mal, n_3 mal, ... hintereinander differenzirt, so erhält man:

$$\Sigma M D_t^{m+n_1} y = D_t^{n_1} T_1, \quad \Sigma M D_t^{m+n_2} y = D_t^{n_2} T_1,$$
$$\Sigma M D_t^{m+n_3} y = D_t^{n_3} T_1, \ldots,$$

und wenn man diese Gleichungen resp. mit N_1, N_2, N_3, ... multiplicirt und die Producte zusammenaddirt; so kann die resultirende Gleichung offenbar auf folgende Form:

$$\Sigma M D_t^m (N_1 D_t^{n_1} y + N_2 D_t^{n_2} y + N_3 D_t^{n_3} y + \ldots) = N_1 D_t^{n_1} T_1 + N_2 D_t^{n_2} T_1 + \ldots,$$

oder wegen der zweiten der gegebenen Gleichungen, auf die Form:

$$\Sigma M D_t^m T_2 = \Sigma N D_t^n T_1$$

gebracht werden, was zu beweisen war.

Wenn die beiden gegebenen Differenzialgleichungen in Beziehung auf x und y linear sind, und außer diesen beiden Veränderlichen nur noch die unabhängige Veränderliche t enthalten; so kann man durch das vorhergehende Verfahren nach Belieben die Endgleichung mit y, oder die mit x bilden, und besonders bemerkenswerth ist es, daß sich diese beiden Endgleichungen blos durch das Glied von einander unterscheiden, welches eine Function von t allein ist. Hieraus folgt, daß die Werthe von x und von y folgende Form haben:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + \ldots,$$
$$y = C' e^{\lambda_1 t} + C'' e^{\lambda_2 t} + C''' e^{\lambda_3 t} + \ldots,$$

wo C_1, C_2, ... Functionen von t sind, welche man in jedem besondern Falle durch bekannte Methoden bestimmen kann, und die Größen λ_1, λ_2, λ_3, ... werden durch eine gemeinschaftliche Gleichung gegeben.

Wenn man m Gleichungen zwischen $m+1$ Veränderlichen mit constanten Coefficienten für alle diese Veränderlichen, eine ausgenommen, nämlich die unabhängige Veränderliche, hat; so braucht man, um drei derselben zu eliminiren, nur den ersten Theil jeder Gleichung in Beziehung auf ihre Ableitungen zu ord-

nen, nachdem man alle übrigen in den zweiten Theil geſetzt hat, worauf man alsdann irgend eine dieſer Gleichungen mit den $m-1$ übrigen vergleicht. Auf dieſe Weiſe erhält man $m-1$ Paare von Gleichungen, zwiſchen welchen man die fragliche Veränderliche auf die oben angegebene Weiſe eliminirt, und man hat alsdann blos noch $m-1$ Gleichungen zwiſchen $m-1$ Veränderlichen. Fährt man auf dieſe Weiſe fort, ſo kommt man auf eine Gleichung, welche zwei Veränderliche enthält, und man ſieht ein, daß man alsdann für die m gegebenen Gleichungen m andere Gleichungen ſetzen kann, wovon in jeder blos die unabhängige Veränderliche und eine der übrigen zu beſtimmenden Veränderlichen vorkommt.

Die Ordnung der Endgleichung läßt ſich zum Voraus beſtimmen; denn hat man z. B. m Differenzialgleichungen der erſten Ordnung, ſo führt das angegebene Verfahren ſucceſſive auf $m-1$ Gleichungen der zweiten Ordnung auf $m-2$ Gleichungen der dritten Ordnung, ..., auf $m-(m-1)$ oder eine Differenzialgleichung der m^{ten} Ordnung. Allgemein, wenn $m, n, p, \ldots$ die höchſten Indices der Differenzirung für jede Veränderliche bezeichnen, ſo drückt die Zahl $m+n+p+\ldots$ die Ordnung jeder Endgleichung aus. Dieſe Eliminationsmethode iſt zuerſt von Favre-Rollin bekannt gemacht.

Neun und dreißigste Vorlesung.

Reduction eines Systems von n Differenzialgleichungen der ersten Ordnung auf eine einzige Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung. — Integration durch Reihen. — Ueber die singulären Integrale der Differenzialgleichungen von einer beliebigen Ordnung.

---

§. 266. In dem Vorhergehenden haben wir gesehen, wie man die Integration einer Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung auf die Integration von n gleichzeitigen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung zurückführt, und man kann auch umgekehrt die Integration eines Systemes von n gleichzeitigen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung auf die einer einzigen Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung zurückzuführen suchen.

Denn wir wollen annehmen, daß n Differenzialgleichungen von der Form:

$$\mathrm{D}_t x = f_1(t, x, y, z, \ldots),\ \mathrm{D}_t y = f_2(t, x, y, z, \ldots),$$
$$\mathrm{D}_t z = f_3(t, x, y, z, \ldots), \ldots$$

gegeben sind, so kommt es darauf an, zwischen diesen n Gleichungen die $n-1$ Veränderlichen $y, z, \ldots$ zu eliminiren und eine Gleichung zu erhalten, welche blos noch die unabhängige Veränderliche t und eine der abhängigen Veränderlichen, z. B. x, enthält. Zu dem Ende differenzirt man die erste Gleichung n mal und substituirt für $\mathrm{D}_t y$, $\mathrm{D}_t z$, ... ihre aus den übrigen $n-1$ Gleichungen abgeleiteten Werthe; so erhält man $n-1$ neue Gleichungen:

$$\mathrm{D}_t^2 x = \phi_2(t, x, y, z, \ldots),\quad \mathrm{D}_t^3 x = \phi_3,$$
$$\mathrm{D}_t^4 x = \phi_4, \ldots,\quad \mathrm{D}_t^n x = \phi_n,$$

welche in Verbindung mit der ersten gegebenen Gleichung:

$$\mathrm{D}_t x = f_1(t, x, y, \ldots)$$

das Mittel zur Elimination der $n-1$ abhängigen Veränderlichen $y, z, \ldots$ an die Hand geben und auf die gesuchte Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung mit t und x führen. Hat man diese

Gleichung integrirt, ſo leitet man daraus den Werth von x und deſſen ſucceſſive Ableitungen mit n willkührlichen Conſtanten ab, um ſie in die Gleichungen:

$$D_t^1 x = f_1, \quad D_t^2 x = \varphi_2, \quad D_t^3 x = \varphi_3, \ldots, \quad D_t^n x = \varphi_n$$

zu ſubſtituiren, welche die Werthe der $n-1$ übrigen geſuchten Integrale geben.

Beiſpiel. Wir wollen die beiden gleichzeitigen Differenzialgleichungen:

$$D_t x = y, \quad D_t y = x$$

betrachten, ſo ergiebt ſich aus der erſten:

$$D_t^2 x = D_t y, \text{ oder } D_t^2 x = \varphi_2 = x.$$

Da y unmittelbar eliminirt iſt, ſo iſt die letzte Gleichung $D_t^2 x = x$ genau die Endgleichung, und wenn man ſie integrirt, ſo erhält man:

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t},$$

woraus folgt:

$$D_t x = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$$

und mithin iſt:

$$y = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$$

das zweite geſuchte Integral.

§. 267. Wir haben zwar geſagt, daß die Endgleichung im Allgemeinen von der n^{ten} Ordnung iſt, und daß ihr Integral n willkührliche Conſtanten enthält; allein in gewiſſen beſondern Fällen kann es doch geſchehen, daß dieſe Endgleichung von einer niedrigern, als der n^{ten} Ordnung iſt, und daß ihr Integral weniger, als n willkührliche Conſtanten enthält; aber wir werden ſehen, daß alsdann zur Beſtimmung der Werthe der übrigen abhängigen Veränderlichen gewiſſe Integrationen verrichtet werden müſſen, wodurch die erforderliche Anzahl von Conſtanten ergänzt wird. Geſetzt z. B., man ſollte die drei Differenzialgleichungen:

$$D_t x = y + z, \quad D_t y = x + z, \quad D_t z = y - x$$

integriren, ſo ergiebt ſich aus der erſten:

$$D_t^2 x = D_t y + D_t z = y + z$$

und man braucht kein zweites Mal zu differenziren, weil man y und z unmittelbar zwiſchen den beiden Gleichungen:

$$D_t x = y + z, \quad D_t^2 x = y + z$$

eliminirt, welche die Endgleichung:

$$D_t^2 x = D_t x$$

geben, die blos von der zweiten Ordnung ist und folgendes Integral hat:

$$x = C_1 + C_2 e^t.$$

Dieses Integral enthält nur zwei willkührliche Constanten; aber man hat auch zur Bestimmung der beiden andern Veränderlichen nur eine einzige Gleichung $C_2 e^t = y + z$, welche nicht hinreichend ist, und woraus sich ergiebt:

$$z = C_2 e^t - y,$$

und wenn man für x, z ihre Werthe in die Gleichung $D_t y = x + z$ substituirt; so erhält man:

$$D_t y = C_1 + 2C_2 e^t - y.$$

Um diese lineare Differenzialgleichung zu integriren, braucht man nur vorher mit e^t zu multipliciren, so findet man auf diese Weise:

$$y = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-t}$$

und man sieht, daß eine dritte Constante erscheint. Die drei Integrale:

$$x = C_1 + C_2 e^t, \quad y = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-t},$$
$$z = -C_1 - C_3 e^{-t}$$

haben alle gewünschte Allgemeinheit.

Wir wollen nun annehmen, daß die n gegebenen Differenzialgleichungen außer der unabhängigen Veränderlichen t auch x und dessen m' erste Ableitungen, y und dessen m'' erste Ableitungen, z und dessen m''' erste Ableitungen, etc. enthalten, und daß man hat:

$$m' + m'' + m''' + \ldots = m;$$

so kann man sie vermittelst der bekannten Gleichungen:

$$D_t x = x', \quad D_t x' = x'', \ldots, \quad D_t x^{(m'-2)} = x^{(m'-1)},$$
$$D_t y = y', \ldots, \quad D_t z = z', \ldots$$

auf die erste Ordnung zurückführen, und man hat alsdann ein System von $m + n$ gleichzeitigen Differenzialgleichungen der ersten Ordnung zu integriren, welche man auf die Integration einer einzigen Differenzialgleichung der $(m+n)^{\text{ten}}$ Ordnung zurückführt.

§. 268. Wenn keine der bisher zur Integration der Differenzialgleichungen angeführten Methoden anwendbar ist, so versucht man die Integration durch Reihen, und wir wollen über diese neue Methode, welche mit großer Vorsicht angewandt werden muß, in der Kürze das Nöthige angeben.

Betrachten wir zunächst die Differenzialgleichung der ersten Ordnung $dy = f_1(x, y)\,dx$, und nehmen an, daß es darauf ankomme, das allgemeine Integral dieser Gleichung oder einen Werth

von y zu finden, welcher dieser Gleichung genügt und für $x=x_0$ eine gegebene Größe y_0 hat. Der Ausdruck der Aufgabe selbst setzt voraus, daß sich das gesuchte Integral in eine convergente Reihe entwickeln läßt, und daß folglich die Integration durch Reihen in weiter nichts, als in der Lösung der folgenden Aufgabe besteht:

Wenn sich der allgemeine Werth von y, welcher der gegebenen Differenzialgleichung genügt, für $x=x_0$ auf eine gegebene Größe y_0 reducirt und durch eine convergente Reihe ausgedrückt werden kann, diese Reihe zu finden.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist sehr leicht; denn wenn die convergente Reihe, welche den Werth von y ausdrückt, wirklich existirt, so muß sie mit der Reihe übereinstimmen, welche die Taylor'sche Formel giebt, worauf sich aus der Gleichung:

$$dy=f_1(x,y)\,dx, \text{ oder } y'=f_1(x,y)$$

durch bloße Differenzirungen die Werthe der successiven Ableitungen von y, nämlich:

$$y''=f_2(x,y),\quad y'''=f_3(x,y),\quad y^{IV}=f_4(x,y),\ldots$$

ergeben, und wenn man in den erhaltenen Gleichungen $x=x_0$, $y=y_0$ setzt; so erhält man:

$$y'_0=f_1(x_0,y_0),\quad y''_0=f_2(x_0,y_0),\quad y_0'''=f_3(x_0,y_0),\ldots,$$

und folglich vermöge der Taylor'schen Formel:

$$y=y_0+\frac{x-x_0}{1}f_1(x_0,y_0)+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}f_2(x_0,y_0)+\frac{(x-x_0)^3}{1.2.3}f_3(x_0,y_0)+\ldots.$$

Dieses ist also der gesuchte Werth von y, welcher zulässig ist, wenn die Reihe im zweiten Theile der letzten Gleichung convergent ist. Da derselbe in diesem Falle offenbar der gegebenen Gleichung genügt, so reducirt er sich für $x=x_0$ auf y_0 und enthält eine willkührliche Constante y_0, ist also nothwendig das gesuchte allgemeine Integral. Wenn man die Summe der convergenten Reihe unter endlicher Form ausdrücken kann, so hat man das allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung ebenfalls unter endlicher Form.

Als erstes Beispiel wollen wir die sehr einfache Differenzialgleichung:

$$dy=ay\,dx, \text{ oder } y'=ay$$

nehmen, so haben wir:

$$y''=ay'=a^2y,\quad y'''=a^2y'=a^3y,\quad y^{IV}=a^3y'=a^4y,\ldots,$$
$$y'_0=ay_0,\quad y''_0=a^2y_0,\quad y_0'''=a^3y_0,\quad y_0^{IV}=a^4y_0,\ldots,$$
$$y=y_0\left[1+\frac{a(x-x_0)}{1}+\frac{a^2(x-x_0)^2}{1.2}+\frac{a^3(x-x_0)^3}{1.2.3}+\ldots\right],$$

wo die Reihe im zweiten Theile der letzten Gleichung immer convergent ist und den Ausdruck $y_0e^{a(x-x_0)}$ zur Summe hat. Es ist folglich:

$$y=y_0e^{a(x-x_0)}$$

oder blos $y=Ce^{ax}$, wie bereits bekannt war.

§. 269. Das eben Gesagte läßt sich leicht auf eine Differenzialgleichung der n^{ten} Ordnung:

$$\mathrm{D}_x^n y=f_n(x,y,\mathrm{D}_xy,\ \mathrm{D}_x^2y,\ldots,\ \mathrm{D}_x^{n-1}y)$$

ausdehnen; denn das allgemeine Integral einer solchen Gleichung suchen, heißt, wie wir gesehen haben, nichts anders, als einen Werth von y suchen, welcher dieser Differenzialgleichung genügt und außerdem so beschaffen ist, daß derselbe, so wie seine $n-1$ ersten Ableitungen y', y'', y''', ... $y^{(n-1)}$ gegebenen Werthe y_0, y'_0, y''_0 $y_0^{(n-1)}$ für $x=x_0$ annehmen. Wenn alsdann die Reihe, welche diesen gesuchten Werth von y ausdrückt, convergent ist, so stimmt sie nothwendig mit der Reihe überein, welche sich aus der Taylor'schen Formel ergiebt. Ferner ergiebt sich aus der Gleichung $y^{(n)}=f_n$:

$$y^{(n+1)}=f_{n+1}[x,y,y',y'',..,\ y^{(n-1)}],\ y^{(n+2)}=f_{n+2},\ldots,$$

und wenn man in diesen Gleichungen $x=x_0$, und folglich:

$$y=y_0,\ y'=y'_0,\ y''=y''_0,\ldots,\ y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$$

setzt; so erhält man die $x=x_0$ entsprechenden Werthe $y_0^{(n)}$, $y_0^{(n-1)}$, ... der Ableitungen der n^{ten} und der folgenden Ordnungen. Alsdann hat man, vermöge der Taylor'schen Formel den Werth:

$$y=y_0+\frac{(x-x_0)}{1}y'_0+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}y''_0+\ldots$$
$$+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}y_0^{(n-1)}+\frac{(x-x_0)^n}{1.2.3\ldots n}y_0^{(n)}+\ldots,$$

welcher das gesuchte Integral ist; denn derselbe ist zulässig, weil nach der Voraussetzung die Reihe im zweiten Theile der letzten Gleichung convergent ist. Dieser Werth genügt offenbar der gegebenen Gleichung und nimmt für $x=x_0$ nebst den $n-1$ ersten Ableitungen y', y'', ..., $y^{(n-1)}$ die Werthe y_0, y'_0,... $y_0^{(n-1)}$ an, oder was dasselbe ist, er enthält n willkührliche Constanten.

Beispiel. Betrachtet man die Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y = y'' = ay,$$

so hat man:

$$y''' = ay', \quad y^{IV} = ay'' = a^2 y, \quad y^V = a^2 y', \quad y^{VI} = a^2 y'' = a^3 y,$$
$$y_0''' = ay_0', \quad y_0^{IV} = a^2 y_0, \quad y_0^V = a^2 y_0', \quad y^{VI} = a^3 y_0, \ldots$$

$$y = y_0 + \frac{(x-x_0)y_0'}{1} + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} ay_0 + \frac{(x-x_0)^3}{1.2.3} ay_0'$$
$$+ \frac{(x-x_0)^4}{1.2.3.4} a^2 y_0 + \ldots$$
$$= y_0 \left[1 + \frac{a(x-x_0)^2}{1.2} + \frac{a^2(x-x_0)^4}{1.2.3.4} + \ldots\right]$$
$$+ y_0' \left[\frac{(x-x_0)}{1} + \frac{a(x-x_0)^3}{1.2.3} + \frac{a^2(x-x_0)^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right],$$

wo die beiden Reihen im zweiten Theile dieser Gleichung convergent sind und die Ausdrücke:

$$y_0 \frac{e^{a^{\frac{1}{2}}(x-x_0)} + e^{-a^{\frac{1}{2}}(x-x_0)}}{2}, \quad \frac{y_0'}{a^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{a^{\frac{1}{2}}(x-x_0)} - e^{-a^{\frac{1}{2}}(x-x_0)}}{2}$$

zu ihren Summen haben. Addirt man diese beiden Ausdrücke zusammen, so erhält man den Werth von y, welcher sich auf die sehr einfache Form:

$$y = C_1 e^{a^{\frac{1}{2}}x} + C_2 e^{-a^{\frac{1}{2}}x}.$$

bringen läßt.

Wenn man dieselbe Methode auf die Differenzialgleichung:

$$xD_x^2 y + 2D_x y + n^2 xy = 0$$

anwendet, so erhält man für das allgemeine Integral derselben:

$$y = \frac{C_1 \sin nx + C_2 \cos nx}{x}.$$

§. 270. Statt der Taylor'schen Formel kann man auch die Maclaurin'sche anwenden, wenn man für x_0 den besondern Werth 0 setzt; aber alsdann hat man wohl auf den entsprechenden Werth von y zu achten; denn derselbe kann so beschaffen sein, daß einige der Ableitungen von y unendlich werden, und die Reihenentwickelung folglich unzulässig wird.

Wenn man in dem zuletzt angeführten Beispiele $x_0 = 0$ setzt, und den Größen y, y' die willkührlichen Werthe y_0, y_0' beilegt, so kann die Differenzialgleichung:

$$xD_x^2 y + 2D_x y + n^2 xy = 0,$$

welche sich zunächst auf:

$$xy'' + 2y'_0 = 0$$

reducirt, nur dann verificirt werden, wenn man y'' unendlich groß annimmt; aber alsdann kann man die Maclaurin'sche Formel nicht mehr anwenden, und man müßte in diesem Falle nothwendig annehmen, daß auch $y'_0 = 0$ ist. In dieser Voraussetzung ergeben sich aus der Gleichung:

$$xD_x^2 y + 2D_x y + n^2 xy = 0$$

und aus ihren successiven Ableitungen:

$$xD_x^3 y + 3D_x^2 y + n^2 xD_x y + n^2 y = 0,$$
$$xD_x^4 y + 4D_x^3 y + n^2 xD_x^2 y + 2n^2 D_x y = 0,$$
$$xD_x^5 y + 5D_x^4 y + n^2 xD_x^3 y + 3n^2 D_x^2 y = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

die Werthe:

$$y''_0 = -\frac{n^2 y_0}{3},\ y_0''' = 0,\ y_0^{IV} = \frac{n^4 y_0}{5},$$

$$y_0^V = 0,\ y^{VI} = -\frac{n^6 y_0}{7},\ldots,$$

$$y = y_0 - \frac{x^2}{1.2.3} n^2 y_0 + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} n^4 y_0 - \ldots$$
$$= y_0 \left(1 - \frac{x^2 n^2}{1.2.3} + \frac{x^4 n^4}{1.2.3.4.5} - \ldots\right).$$

Nun ist aber der zwischen den Parentheſen stehende Factor nichts anders, als $\frac{\sin nx}{nx}$; folglich:

$$y = y_0 \frac{\sin nx}{nx} = C_1 \frac{\sin nx}{x},$$

und dieser Werth von y ist offenbar nur ein particuläres Integral, weil derselbe nur eine willkührliche Constante enthält. Aber vermittelst der bereits wiederholt angewandten Methode, welche darin besteht, daß man C_1 nicht mehr als eine Constante, sondern als eine unbestimmte Function von x betrachtet, kann man leicht zu dem allgemeinen Integrale gelangen. Denn differenzirt man den Werth $y = C_1 \frac{\sin nx}{x}$, indem man für C_1 eine Veränderliche u_1 setzt, und drückt aus, daß dieser Werth der gegebenen Differenzialgleichung noch genügt; so findet man nach verrichteten Reductionen:

$$D_x^2 u_1 + 2nD_x u_1 \cot nx = 0.$$

Setzt man $D_x u_1 = v$, so verwandelt sich diese auf die erste Ordnung zurückgeführte Differenzialgleichung in folgende:

$$D_x v + 2\pi v \cot \pi x = 0$$

und giebt:

$$v = \frac{C_2}{\sin^2 \pi x}$$

und folglich:

$$u_1 = C + C' \cot \pi x, \quad y = \frac{C \sin \pi x + C'' \cos \pi x}{x},$$

welches das gesuchte allgemeine Integral ist. Wenn man das zweite particuläre Integral $y = \frac{\cos \pi x}{x}$ für sich betrachtet, so sieht man, daß seine zweite Ableitung wirklich für $x = 0$ unendlich wird, und daß es folglich nicht vermittelst der Maclaurin'schen Formel in eine Reihe entwickelt werden kann.

§. 271 Oft wendet man statt der Taylor'schen und Maclaurin'schen Reihe andere Reihenentwickelungen an, welche durch die Methode der unbestimmten Coefficienten erhalten werden. Dieses Verfahren verdient zuweilen sogar den Vorzug und ist allein zulässig, wenn die Reihe, welche das gesuchte Integral ausdrückt, Potenzen der unabhängigen Veränderlichen mit negativen Exponenten enthalten muß. In diesem Falle setzt man:

$$y = y_0 + a_1 (x - x_0)^\alpha + a_2 (x - x_0)^{\alpha+1} + a_3 (x - x_0)^{\alpha+2} + \ldots,$$

oder wenn man $x - x_0 = z$, also $dx = dz$ setzt:

$$y = x_0 + a_1 z^\alpha + a_2 z^{\alpha+1} + a_3 z^{\alpha+2} + \ldots,$$

und bestimmt dann die unbestimmten Coefficienten a_1, a_2, a_3, ... und den Exponenten α durch die Bedingung, daß der Werth von y der gegebenen Differenzialgleichung genügt und nebst seinen Ableitungen bis zu der von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung incl. für $x = x_0$ gegebene Werthe y_0, y'_0, ... annimmt. Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß ein Werth von y gesucht werde, welcher der Differenzialgleichung:

$$dy - y dx = b x^m dx = 0$$

genügt und für $x =$ verschwindet. Setzt man wie vorhin:

$$y = a_1 z^\alpha + a_2 z^{\alpha+1} + a_3 z^{\alpha+3} + \ldots,$$

so findet man:

$$bz^m - a_1 \alpha z^{\alpha-1} + [a_1 - a_2 (\alpha+1)] z^\alpha + [a_2 - a_3 (\alpha+2)] z^{\alpha+1} + \ldots = 0.$$

Diese Gleichung muß für jeden Werth von z erfüllt werden, und da b nach der Voraussetzung nicht $= 0$ ist, so muß man zunächst $\alpha - 1 = m$, oder $\alpha = m + 1$ setzen, wodurch sich die vorhergehende Gleichung in folgende verwandelt:

$$[b-a_1(m+1)]x^m+[a_1-a_2(m+2)]x^{m+1}$$
$$+[a_2-a_3(m+3)]x^{m+2}+\ldots=0$$

und auf die Gleichungen:

$$b-a_1(m+1)=0,\quad a_1-a_2(m+2)=0,$$
$$a_2-a_3(m+3)=0,\ldots$$

fährt, woraus folgt:

$$a_1=\frac{b}{m+1},\ a_2=\frac{b}{(m+1)(m+2)},$$
$$a_3=\frac{b}{(m+1)(m+2)(m+3)},\ldots,$$
$$y=\frac{b}{m+1}x^{m+1}\left[1+\frac{x}{m+2}+\frac{x^2}{(m+2)(m+3)}+\ldots\right].$$

Die Reihe im zweiten Theile der letzten Gleichung ist immer convergent, weil das Verhältniß zweier auf einander folgender Glieder gegen die Grenze Null convergirt. Der vorhergehende Werth von y ist folglich zulässig und erfüllt alle erforderlichen Bedingungen.

In dem besondern Falle, wo $m=0$ ist, reducirt sich die gegebene Differenzialgleichung auf $dy-ydx=0$ und das Integral verwandelt sich in:

$$y=b\left[x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots\right]=b(e^x-1),$$

wie es sein muß.

Als zweites Beispiel wollen wir die bereits betrachtete Differenzialgleichung:

$$D_x^2y+\frac{2}{x}D_xy+n^2y=0$$

nehmen und allgemein setzen:

$$y=ax^\alpha+bx^\beta+cx^\gamma+\ldots;$$

so kommt es darauf an, die Coefficienten a, b, c, d,.... und die Exponenten α, β, γ, ... zu bestimmen. Nun ist aber:

$$D_xy=a\alpha x^{\alpha-1}+b\beta x^{\beta-1}+c\gamma x^{\gamma-1}+\ldots,$$
$$D_x^2y=a\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+b\beta(\beta-1)x^{\beta-2}+\ldots,$$

und wenn man in die gegebene Gleichung substituirt; so kommt:

$$a\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-2}+n^2ax^\alpha+b\beta(\beta+1)x^{\beta-2}+n^2bx^\beta$$
$$+c\gamma(\gamma+1)x^{\gamma-2}+n^2cx^\gamma+\ldots=0.$$

Nimmt man an, daß die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ihrer Größe nach auf einander folgen, so ist $\alpha - 2$ der kleinste Exponent von x in der letzten Gleichung, und da diese Gleichung für jeden Werth von x nur dann statt finden kann, wenn die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von x gleich Null sind; so muß man zunächst haben:

$$a\alpha(\alpha+1)=0$$

und da a nicht $=0$ sein kann, so muß $\alpha=0$, oder $\alpha=-1$ sein. Wir wollen zunächst $\alpha=-1$ nehmen. Die beiden nächst kleinern Exponenten von x sind α und $\beta-2$, welche gleich, oder verschieden sein können. Wenn sie einander gleich sind, so kann das Glied $b\beta(\beta+1)x^{\beta-2}$ mit keinem andern Gliede eine Reduction eingehen und muß an und für sich $=0$ sein, was nur statt finden kann, wenn $\beta=0$ oder $\beta=-1$ ist, welcher letzte Werth unzulässig ist, weil β größer sein muß, als $\alpha=-1$. Folglich ist $\beta=0$. Hierauf folgen die beiden Exponenten α und $\gamma-2$, welche einander gleich sein müssen; denn da das Glied n^2x^α nicht für sich allein verschwinden kann, so muß es sich mit einem andern Gliede reduciren, woraus folgt:

$$\gamma=1, \quad n^2a+c\gamma(\gamma+1)=0.$$

Schließt man auf diese Weise weiter fort, so findet man:

$$\delta=2, \quad n^2b+d\delta(\delta+1)=0,$$
$$\varepsilon=3, \quad n^2c+e\varepsilon(\varepsilon+1)=0.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die beiden ersten Coefficienten bleiben unbestimmt, wie es auch der Fall sein muß, und bilden willkührliche Constanten, während die übrigen Coefficienten durch die Gleichungen:

$$c=-\frac{n^2a}{1.2}, \quad d=-\frac{n^2b}{1.2.3},$$
$$e=\frac{n^4a}{1.2.3.4}, \quad f=\frac{n^4b}{1.2.3.4.5}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

gegeben werden, und das gesuchte Integral ist:

$$y=a\left(\frac{1}{x}-\frac{n^2x}{1.2}+\frac{n^4x^3}{1.2.3.4}+\ldots\right)$$
$$+b\left(1-\frac{n^2x^2}{1.2.3}+\frac{n^4x^4}{1.2.3.4}-\ldots\right)$$

oder:

$$y=a\frac{\cos nx}{x}+b\frac{\sin nx}{nx}=\frac{C'\cos nx+C''\sin nx}{x}.$$

Wenn man nicht $\alpha = -1$, sondern $\alpha = 0$ gesetzt hätte, so hätte man statt des allgemeinen Integrales das particuläre Integral $y = a\frac{\cos nx}{x}$ erhalten, und in der That heißt den kleinsten Exponenten $\alpha = 0$ setzen nichts anders, als annehmen, daß die Reihenentwickelung keine Potenz der Veränderlichen mit einem negativen Exponenten enthält und daß die zweite Ableitung y'' für $x = 0$ nicht unendlich werden kann, wodurch folglich das zweite particuläre Integral förmlich ausgeschlossen wird.

Beispiel. Wir wollen die Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y = y'' = kx^n y$$

betrachten, so erhalten wir, wenn wir setzen:

$$y = ax^\alpha + a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + a_3 x^{\alpha_3} + \ldots,$$

und für y, $D_x^2 y$ ihre Werthe substituiren, die Gleichung:

$$\begin{aligned} &a\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + a_1\alpha_1(\alpha_1-1)x^{\alpha_1-2} + a_2\alpha_2(\alpha_2-1)x^{\alpha_2-2} + \ldots \\ &= kax^{\alpha+n} + ka_1 x^{\alpha_1+n} + ka_2 x^{\alpha_2+n} + \ldots, \end{aligned}$$

welche nur dann identisch werden kann, wenn man die drei Gleichungen hat:

$$\alpha(\alpha-1) = 0, \quad \alpha_m = \alpha + m(n+2), \quad a_m\alpha_m(\alpha_m-1) = ka_{m-1},$$

wo α_m und a_m resp. einen beliebigen Exponenten und Coefficienten der Reihe bezeichnen, und diese drei Gleichungen bestimmen alle Exponenten und Coefficienten der Reihe vollständig. Der ersten Gleichung wird genügt, wenn man $\alpha = 0$, oder $\alpha = 1$ setzt, und diesen beiden Werthen entsprechen zwei verschiedene Reihen, wovon jede einen willkührlichen Coefficienten enthält, und beide verificiren die gegebene Differenzialgleichung, wovon sie particuläre Integrale sind, während die Summe dieser beiden Reihen das gesuchte Integral ist, und wenn man zwei Werthe des ersten unbestimmt gebliebenen Coefficienten a_1 mit C_1, C_2 bezeichnet; so hat man:

$$\begin{aligned} y = C_1\left[1 + \frac{kx^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{k^2x^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} + \ldots\right] \\ + C_2x\left[1 + \frac{kx^{n+2}}{(n+2)(n+3)} + \frac{k^2x^{2n+4}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)} + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Wenn $n = -2$, d. h. die gegebene Differenzialgleichung folgende wäre:

$$D_x^2 y = kx^2,$$

so verschwänden alle Renner der Reihe; aber wenn man zu der Gleichung:

$$\alpha_m = \alpha + m(n+2)$$

zurückgeht, welche einen beliebigen Exponenten bestimmt, so findet man $a_m = \alpha$ und folglich:

$$y = (a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) x^\alpha = A x^\alpha.$$

Substituirt man diesen Werth in die gegebene Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y = k x^n,$$

so erhält man:

$$\alpha\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + [a_1\alpha(\alpha-1) + ka_1]x^{\alpha-2} + \ldots$$
$$+ [a_2\alpha(\alpha-1) + ka_2]x^{\alpha-2} + \ldots = A[\alpha(\alpha-1) + k]x^{\alpha-2} = 0,$$

$$\alpha(\alpha-1) + k = 0, \quad \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1-4k}}{2},$$

und wenn man diese beiden Werthe mit α', α'' und zwei der unbestimmt gebliebenen Größen A beigelegte willkührliche Werthe mit C, C' bezeichnet; so erhält man endlich:

$$y' = C x^{\alpha'} + C' x^{\alpha''}.$$

§. 272. Die eben integrirte Differenzialgleichung der zweiten Ordnung kann leicht auf eine Differenzialgleichung der ersten Ordnung zurückgeführt werden; denn man braucht zu dem Zwecke nur, wie wir gesehen haben, $y = e^{\int z dx}$ zu setzen, wodurch man die transformirte Gleichung:

$$D_x z + z^2 = k x^n$$

erhält, welches genau die Riccati'sche Gleichung ist, und wenn man sie integriren, folglich daraus den Werth von z ableiten könnte; so würde y vermittelst der Gleichung $y = e^{\int z dx}$ oder der Reihe:

$$y = 1 + \int z\,dx + \frac{(\int z\,dx)^2}{1.2} + \frac{(\int z\,dx)^3}{1.2.3} + \ldots$$

bestimmt.

Umgekehrt, da sich die Riccati'sche Differenzialgleichung:

$$D_x y + a y^2 = b x^n$$

in folgende:

$$D_z^2 z = abz x^n$$

verwandelt, wenn man setzt:

$$y = \frac{1}{az} D_x z;$$

so kann man sie vermittelst der gefundenen Reihe integriren, welche z und folglich auch y giebt, weil sich y durch eine bloße Differenzirung aus z ableiten läßt. Die Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y + \frac{2m}{x} D_x y = by,$$

welche unmittelbar aus der Gleichung:

$$D_x^2 y = kx^n y$$

abgeleitet wird, wenn man $x^{\frac{n}{2}+1}$ in x verwandelt und setzt:

$$2m = \frac{n}{n+2}, \quad b = \frac{k}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2},$$

kann also als ebenfalls durch Reihen integrirt angesehen werden. Dasselbe gilt von der Differenzialgleichung:

$$y'' - \frac{m(m-1)}{x^2} y = by,$$

welche sich in folgende verwandelt:

$$D_x^2 z + \frac{2m}{x} D_x z = bz,$$

wenn man $y = x^m z$ setzt.

§. 273. Wenn wir die transformirte Gleichung:

$$D_x^2 y - \frac{m(m-1)}{x^2} y = by$$

direct durch Reihen zu integriren gesucht hätten, so hätten wir die Gleichung:

$$a[\alpha(\alpha-1) - m(m-1)]x^{\alpha-2} + a_1[\alpha_1(\alpha_1-1) - m(m-1)]x^{\alpha_1-2} + \ldots$$
$$= bax^{\alpha} + ba_1 x^{\alpha_1} + ba_2 x^{\alpha_2} + \ldots$$

identisch zu machen gehabt, welches auf die Bedingungsgleichungen:

$$\alpha(\alpha-1) - m(m-1) = 0, \quad \alpha_m = \alpha + 2m,$$
$$a_m[\alpha_m(\alpha_m - 1) - m(m-1)] = ba_{m-1}$$

geführt hätte, wovon die erste für α zwei Werthe:

$$\alpha' = m, \quad \alpha'' = 1 - m$$

giebt, und die dritte verwandelt sich, wenn man für α_m seinen aus der zweiten genommenen Werth setzt, in folgende:

$$a_m[\alpha(\alpha-1) + 2m(2m + 2\alpha - 1) - m(m-1)] = ba_{m-1}$$

oder wegen:

$$\alpha(\alpha-1) - m(m-1) = 0$$

einfacher in:

$$2m(2m+2\alpha-1)\,a_m = b a_{m-1}.$$

Das vollständige Integral wird alsdann in Reihen ausgedrückt durch:

$$y = C_1 x^m \left[1 + \frac{bx^2}{2(2m+1)} + \frac{b^2x^4}{2.4(2m+1)(2m+3)} + \ldots\right]$$
$$+ C_2 x^{1-m}\left[2 + \frac{bx^2}{2(3-2m)} + \frac{b^2x^4}{2.4(3-2m)(5-2m)} + \ldots\right].$$

Die eben erhaltenen Reihen haben die Eigenthümlichkeit, daß sie summirt und durch bestimmte Integrale ausgedrückt werden können. Denn wenn man in der Formel (5) in §. 30, nämlich:

$$\int \sin^\mu x \cos^\nu x\,dx = \frac{\sin^{\mu+1} x \cos^{\nu-1} x}{\mu+\nu} + \frac{\nu-1}{\mu+1}\int \sin^\mu x \cos^{\nu-2} x\,dx$$

setzt:

$$x = \vartheta, \quad \mu = 2\alpha-1, \quad \nu = 2m,$$

so kommt:

$$\int \sin^{2\alpha-1}\vartheta \cos^{2m}\vartheta\,d\vartheta = \frac{\sin^{2\alpha} x \cos^{2m-1} x}{2m+2\alpha-1} + \ldots + \frac{2m-1}{2m+2\alpha-1}\int \sin^{2\alpha-1}\vartheta \cos^{2m-2}\vartheta\,d\vartheta.$$

Wenn man 0 und π zu den Integrationsgrenzen nimmt, so verschwindet der integrirte Bestandtheil jedesmal, wenn α eine positive Größe, oder eine imaginäre Größe mit einem reellen positiven Bestandtheile ist, so daß man hat:

$$\int_0^\pi \sin^{2\alpha-1}\vartheta \cos^{2m}\vartheta\,d\vartheta = \frac{2m-1}{2m+2\alpha-1}\int_0^\pi \sin^{2\alpha-1}\vartheta \cos^{2m-2}\vartheta\,d\vartheta.$$

Vermöge dieser letzten Relation wird der Gleichung:

$$2m(2m+2\alpha-1)\,a_m = b a_{m-1}$$

genügt, wenn man setzt:

$$a_m = \frac{ab^m}{1.2.3\ldots(2m-1)2m}\int_0^\pi \sin^{2\alpha-1}\vartheta \cos^{2m}\vartheta\,d\vartheta,$$

und folglich kann man, wenn man für α successive die beiden Werthe m, $1-m$ nimmt, das erhaltene Integral auf folgende Form bringen:

$$y = C_1 x^m \int_0^\pi \left(1 + \frac{bx^2}{1.2}\cos^2\vartheta + \frac{b^2x^4}{1.2.3.4}\cos^4\vartheta + \ldots\right)\sin^{2m-1}\vartheta\, d\vartheta$$
$$+ C_2 x^{1-m} \int_0^\pi \left(1 + \frac{bx^2}{1.2}\cos^2\vartheta + \frac{b^2x^4}{1.2.3.4}\cos^4\vartheta + \ldots\right)\sin^{1-2m}\vartheta\, d\vartheta.$$

Nun ist aber:

$$1 + \frac{bx^2}{1.2}\cos^2\vartheta + \frac{b^2x^4}{1.2.3.4}\cos^4\vartheta + \frac{b^3x^6}{1.2.3.4.5.6}\cos^6\vartheta + \ldots$$
$$= \cos.\sqrt{-1}\, x\sqrt{b}\cos\vartheta = \frac{1}{2}e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta} + \frac{1}{2}e^{-x\sqrt{b}\cos\vartheta},$$

folglich:

$$y = C_1 x^m \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta} + \frac{1}{2}e^{-x\sqrt{b}\cos\vartheta}\right)\sin^{2m-1}\vartheta\, d\vartheta$$
$$+ C_2 x^{1-m} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta} + \frac{1}{2}e^{-x\sqrt{b}\cos\vartheta}\right)\sin^{1-2m}\vartheta\, d\vartheta.$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch vereinfachen; denn wegen der Wahl der Integrationsgrenzen und der Natur der Functionen $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ hat man:

$$\int_0^\pi e^{-\mu\cos\vartheta}\sin^\nu\vartheta\, d\vartheta = \int_0^\pi e^{\mu\cos\vartheta}\sin^\nu d\vartheta,$$

folglich:

$$y = C_1 x^m \int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta}\sin^{2m-1}\vartheta d\vartheta + C_2 x^{1-m}\int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta}\sin^{1-2m}\vartheta d\vartheta.$$

Diese Transformationen setzen, wie wir auch bemerkt haben, voraus, daß α eine positive Größe und folglich m, $1-m$ positive Zahlen sind, oder daß m zwischen den Grenzen 0 und 1 liegt. Wenn diese Bedingung erfüllt wird, so wird das allgemeine Integral der Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y - \frac{m(m-1)}{x^2}y = by$$

durch bestimmte Integrale ausgedrückt. Wenn $m=0$, oder $m=1$ ist, so reducirt sich die vorhergehende Gleichung auf $D_x^2 y = by$ und in diesem Falle ist ihr allgemeines oder vollständiges Integral bekanntlich:

$$y = C_1 e^{x\sqrt{b}} + C_2 e^{-x\sqrt{b}}.$$

Wenn man $m = \frac{1}{2}$ setzt, so hat man:

$$y = (C_1 + C_2)\sqrt{x}\int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta}\, d\vartheta,$$

die beiden Constanten vereinigen sich zu einer einzigen und das Integral hat die erforderliche Allgemeinheit nicht mehr. Um das vollständige oder allgemeine Integral zu erhalten, muß man zu einem bereits angewandten Rechnungskunstgriffe seine Zuflucht nehmen. Man setzt nämlich in dem Gliede mit C_1, $m=\frac{1}{2}$ und in dem Gliede mit C_2, $m=\frac{1}{2}+\varepsilon$, entwickelt dann $(x\sin^2\vartheta)^{-\varepsilon}$ nach der immer convergenten Reihe, welche $a^{-\varepsilon}$ ausdrückt, und wenn man alsdann $C_1+C_2=C'$, $C_2\varepsilon=C''$ setzt, und endlich $\varepsilon=0$ macht; so findet man:

$$y=C'\sqrt{x}\int_0^{\pi} e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta}d\vartheta+C''\sqrt{x}\int_0^{\pi}e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta}\mathrm{l}.x\sin^2\vartheta d\vartheta.$$

Wenn $m>1$ wäre, so wäre die mit C_2 multiplicirte Reihe nicht mehr zulässig, wogegen die erste Reihe hinwegfallen müßte, wenn m einen negativen Werth hätte. Aber in allen Fällen erhält man unmittelbar ein particuläres Integral y_1 der Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y-\frac{m(m-1)}{x^2}y=by,$$

unter endlicher Form. Das zweite Integral fände man vermittelst des bereits mehrere Male angewandten Verfahrens, d. h. wenn man $y=uy_1$ setzte, und ausdrückte, daß dieser Werth, worin für die Constante eine Function von x gesetzt ist, der gegebenen Gleichung genügt, und auf diese Weise ergäbe sich, daß das allgemeine Integral folgendes ist:

$$y=C'y_1\left(\int\frac{dx}{y_1^2}+C''\right).$$

Wenn man in der Gleichung:

$$=C_1x^m\int_0^{\pi}e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta}\sin^{2m-1}\vartheta\,d\vartheta$$
$$+C_2x^{1-m}\int_0^{\pi}e^{x\sqrt{b}\cos\vartheta}\sin^{1-2m}\vartheta d\vartheta$$

$\cos\vartheta=t$ setzt, so verwandelt sie sich in folgende:

$$y=C_1x^m\int_{-1}^{+1}e^{xt\sqrt{b}}(1-t^2)^{m-1}dt$$
$$+C_2x^{1-m}\int_{-1}^{+1}e^{xt\sqrt{b}}(1-t^2)^{-m}dt,$$

und das particuläre Integral der Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y-\frac{m(m-1)}{x^2}y=by$$

$$y_1 = C_1 x^m \int_{-1}^{+1} e^{xt\sqrt{-1}} (1-t^2)^{m-1} dt,$$

oder:

$$y_1 = C_2 x^{1-m} \int_{-1}^{+1} e^{xt\sqrt{-1}} (1-t^2)^{-m} dt,$$

jenachdem $m > 1$ oder $m < 1$ ist. Die erste dieser Integrationen läßt sich verrichten, wenn m eine ganze positive Zahl ist, und die zweite dagegen, wenn m eine ganze negative Zahl ist. Man hat also jedesmal, wenn m eine ganze positive, oder negative Zahl bezeichnet, ein particuläres Integral der gegebenen Differenzialgleichung unter endlicher Form, und die Bestimmung des allgemeinen Integrales derselben Gleichung ist nach der Formel:

$$y = C' y_1 \left(\int \frac{dx}{y_1^2} + C'' \right)$$

auf bloße Quadraturen zurückgeführt. Die Riccati'sche Differenzialgleichung:

$$D_x y + ay^2 = bx^n$$

verwandelt sich zunächst in:

$$D_x^2 y = kyx^n,$$

wenn man y in $\frac{1}{ay} D_x y$ verwandelt und $ab = k$ setzt, und sie verwandelt sich successive in:

$$D_x^2 y + \frac{2m}{x} D_x y = by, \quad D_x^2 y - \frac{m(m-1)}{x^2} y = by,$$

wenn man $x^{\frac{n}{2}+1}$ in x, y in $x^{-m} y$ verwandelt und setzt:

$$m = \frac{n}{2(n+2)}, \quad b = \frac{k}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}.$$

Wenn ferner $m = \pm n$ ist, so hat man:

$$n = \frac{-4n}{2n \mp 1}$$

und folglich läßt sich die Integration der Riccati'schen Differenzialgleichung jedesmal auf Quadraturen zurückführen, wenn n von der Form:

$$\frac{-n4}{2n \mp 1}$$

ist.

Wir kommen also wieder auf ein Resultat, welches wir bereits durch zwei wesentlich verschiedene Methoden erhalten haben.

§. 274. Es giebt endlich noch eine dritte Integrationsmethode durch Reihen, welche wir der Einfachheit wegen an einer linearen Differenzialgleichung der zweiten Ordnung ohne zweiten Theil:

$$D_x^2 y + X_1 D_x y + X_2 y = 0$$

auseinanderſetzen wollen, wo X_1, X_2 zwei beliebige Functionen von x ſind. Zunächſt kann man dieſe Gleichung auf die einfachere Form:

$$D_x^2 z = Xz$$

bringen; denn zu dem Zwecke braucht man nur, wie wir geſehen haben, $y = uz$ zu ſetzen und u vermittelſt der Differenzialgleichung der erſten Ordnung:

$$2D_x u + X_1 u = 0$$

zu beſtimmen, oder zu ſetzen:

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int X_1 dx}.$$

Es iſt nun noch übrig, den Werth von z in eine convergente Reihe zu entwickeln, und wir wollen annehmen, daß z, $D_x z = z'$ für $x = x_0$ die Werthe z_0, z'_0 annehmen müſſen; ſo können z_0 und z'_0 als willkührliche Conſtanten des geſuchten Integrales dienen. Aus der Gleichung:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = Xz$$

folgt aber:

$$d\frac{dz}{dx} = Xz\,dz$$

und wenn man von x_0 an integrirt:

$$\frac{dz}{dx} - z'_0 = \int_{x_0}^{x} Xz\,dx, \text{ oder } \frac{dz}{dx} = z'_0 + \int_{x_0}^{x} Xz\,dx.$$

Integrirt man ein zweites Mal, ſo erhält man:

$$z = z_0 + z'_0(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} Xz\,dx$$

oder wenn man der Kürze wegen $z_0 + z'_0(x - x_0) = t$ ſetzt:

$$z = t + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} Xz\,dx.$$

Wenn man in dieſer letzten Gleichung unter dem Integralzeichen für z ſeinen Werth und $\int$ für $\int_{x_0}^{x}$ ſetzt, ſo findet man, wenn man bemerkt, daß alle Integrale von x_0 an genommen werden:

$$z = t + \int dx \int X(t + \int dx \int Xz dx)\, dx$$
$$= t + \int dx \int Xt dx + \int dx \int X dx \int dx \int Xz dx$$

und wenn man für z wieder seinen Werth setzt, so erhält man:

$$z = t + \int dx \int Xt dx + \int dx \int X dx \int Xt dx$$
$$+ \int dx \int X dx \int dx \int X dx \int dx \int Xz dx + \ldots.$$

Setzt man diese Reihe von Substitutionen fort, so erhält man den Werth von z durch eine unbegrenzte Reihe von Gliedern ausgedrückt, welche so beschaffen sind, daß sich jedes aus dem vorhergehenden ergiebt, wenn man mit Xdx^2 multiplicirt und zweimal hintereinander von $x = x_0$ an integrirt. Das letzte Glied allein enthält z oder die zu bestimmende unbekannte Function; aber wir werden sogleich beweisen: 1) daß dieses letzte Glied ohne Ende abnimmt, je größer die Anzahl der Glieder wird, und 2) daß sich die ganze Reihe einer gewissen endlichen Größe, welche sie nicht überschreiten und wovon sie beliebig wenig verschieden sein kann, ohne Ende nähert. Denn wir wollen annehmen, daß sich x in dem Intervalle von x_0 bis x stetig ändert und es seien ξ, ζ, τ die größten absoluten Werthe von X, z, t in diesem Intervalle, oder noch größere Werthe, so daß immer $X < \xi$, $z < \zeta$, $t < \tau$ ist. Wenn man für ζ einen endlichen Werth findet, so ist eben dadurch bewiesen, daß z für die zwischen den Grenzen x_0, x liegenden Werthe von x nicht unendlich werden kann. Da nun aber zwischen diesen Grenzen:

$$Xt < \xi\tau$$

ist, so hat man:

$$\int Xt dx < \int \xi\tau dx = \xi\tau (x - x_0)$$

oder blos:

$$\int Xt dx < \xi\tau (x - x_0).$$

Wenn man die beiden Theile dieser Ungleichheit mit dx multiplicirt und zwischen den Grenzen x_0, X integrirt, dann wieder mit Xdx multiplicirt und integrirt, hierauf wieder mit dx multiplicirt und dann ein drittes Mal integrirt, u. s. f.; so findet man:

$$\int dx \int Xt dx < \xi\tau \frac{(x - x_0)^2}{1.2},$$

$$\int dx \int X dx \int dx \int Xt dx < \xi^2\tau \frac{(x - x_0)^4}{1.2.3.4},$$

$$\int dx \int X dx \int dx \int X dx \int dx \int Xt dx < \xi^3\tau \frac{(x - x_0)^6}{1.2.3.4.5.6}$$

u. s. f. für alle zwischen x_0 und x liegenden Werthe von x. Für dieselben Werthe von x hat man auch:

$$Xz < \xi\zeta,$$

folglich:

$$\int Xz\,dx < \int \xi\zeta\,dx = \xi\zeta(x-x_0),$$

$$\int dx \int Xz\,dx < \zeta\xi \frac{(x-x_0)^2}{1.2},$$

$$\int dx \int Xdx \int dx \int Xz\,dx < \zeta\xi^2 \frac{(x-x_0)^4}{1.2.3.4}$$

und allgemein:

$$\int dx \int Xdx \ldots \int dx \int Xz\,dx < \zeta\xi^n \frac{(x-x_0)^{2n}}{1.2.3.4 \ldots 2n}.$$

Wenn man für jedes dieser Integrale, woraus der Werth von z besteht, seine obere Grenze setzt, so erhält man nothwendig die Ungleichheit:

$$z < \tau + \tau\xi \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \tau\xi^2 \frac{(x-x_0)^4}{1.2.3.4} + \ldots + \zeta\xi^m \frac{(x-x_0)^{2m}}{1.2.3 \ldots 2m},$$

welche um so mehr statt findet, wenn man die Reihe im zweiten Theile ohne Ende fortlaufen läßt. Aber die Summe dieser Reihe ist:

$$\frac{1}{2}\tau\left[e^{(x-x_0)\sqrt{\xi}} + e^{-(x-x_0)\sqrt{\xi}}\right],$$

welche offenbar für alle zwischen x_0 und x liegenden Werthe von x einen endlichen Werth behält, und man kann folglich eine Grenze L angeben, welche sie nicht erreicht. Ferner nimmt der Ausdruck:

$$\frac{\xi^n(x-x_0)^{2n}}{1.2.3 \ldots 2n} = \frac{[(x-x_0)\sqrt{\xi}]^{2n}}{1.2.3 \ldots 2n},$$

welchen man auf die Form:

$$\frac{(x-x_0)\sqrt{\xi}}{1} \cdot \frac{(x-x_0)\sqrt{\xi}}{2} \cdot \frac{(x-x_0)\sqrt{\xi}}{2} \cdots \frac{(x-x_0)\sqrt{\xi}}{2n}$$

bringen kann, ohne Ende ab, je größer n wird und kann kleiner werden, als jede gegebene Größe ε, wie klein diese auch sein mag. Man hat also, wenn man n hinreichend groß nimmt:

$$z < L + \varepsilon\zeta$$

und da diese Ungleichheit für alle zwischen x_0, x liegenden Werthe von ζ statt findet, so kann man für z seinen Werth ζ setzen, so daß man hat:

$$\zeta < L + \varepsilon\zeta, \quad \zeta < \frac{L}{1-\varepsilon},$$

oder weil ε beliebig klein werden kann:

$$\zeta < L.$$

Des letzte Glied der Reihe, welches kleiner als $\zeta\varepsilon$ ist, nimmt also ohne Ende ab, je größer die Anzahl der Glieder wird und z bleibt immer kleiner, als eine feste endliche Grenze. Folglich ist die in's Unendliche fortlaufende Reihe, welche den zweiten Theil der Gleichung:

$$z = t + \int dx \int X t dx + \int dx \int X dx \int dx \int X t dx + \int dx \int X dx \int dx \int X dx \int dx \int X t dx + \ldots$$

bildet, convergent und hat genau das gesuchte Integral z zur Summe.

§. 275. Das allgemeine Integral der Differenzialgleichung $D_x^2 z = Xz$ kann man auf folgende Weise in eine Reihe entwickeln. Man setzt nämlich:

$$z = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

wo $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, n+1$ zu bestimmende Functionen von x sind, welche durch die Gleichung:

$$D_x^2 u_0 + D_x^2 u_1 + D_x^2 u_2 + \ldots + D_x^2 u_{(n)} = X u_0 + X u_1 + X u_2 + \ldots + X u_n,$$

oder:

$$\Sigma D_x^2 u = \Sigma X u$$

miteinander verbunden sind. Ferner wollen wir annehmen, daß z, z' für $x = x_0$ bestimmte Werthe z_0, z'_0 annehmen müssen und daß die Unbekannten u_0, u_1, ... den Gleichungen:

$$D_x^2 u_0 = 0,\ D_x^2 u_1 = X u_0,\ D_x^2 u_2 = X u_1, \ldots,\ D_x^2 u_n = X u_{n-1}$$

genügen. Hierauf wollen wir diese Gleichungen von x_0 an integriren und annehmen, daß u_0, u'_0 dieselben Werthe, wie z, z' annehmen, und daß sich folglich die Gleichungen:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = z,\ u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n = z'$$

für $x = x_0$, $u_0 = z_0$, $u'_0 = z'_0$ auf:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 0,\ u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n = 0$$

reduciren, und endlich wollen wir annehmen, daß man für $x = x_0$ habe:

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0, \ldots,\ u_n = 0,\ u'_1 = 0,\ u'_2 = 0, \ldots,\ u'_n = 0;$$

so kommt:

$$u_0 = z_0 + z'_0 (x - x_0) = t,\ u_1 = \int dx \int X t dx,$$

$$u_2 = \int dx \int X dx \int dx \int X dx,$$

$$u_3 = \int dx \int X dx \int dx \int X dx \int dx \int X dx, \ldots, \; u_4 = \ldots, \; u_n = \ldots,$$

wo die Integrale ſämmtlich von x_0 an genommen werden.

Der auf dieſe Weiſe für z erhaltene Werth genügt eigentlich nicht der gegebenen Differenzialgleichung:

$$D_x^2 z = Xz,$$

oder:

$$D_x^2 u_0 + D_x^2 u_1 + \ldots + D_x^2 u_n = Xu_0 + Xu_1 + \ldots + Xu_n,$$

ſondern blos der folgenden:

$$D_x^2 u_0 + D_x^2 u_1 + \ldots + D_x^2 u_n = Xu_0 + Xu_1 + \ldots + Xu_{n-1};$$

allein durch ganz ähnliche Betrachtungen, wie die weiter oben angewandten, kann man zeigen: 1) daß ſich die Summe $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ deſto mehr einer endlichen Grenze nähert, je größer n wird, und 2) daß, wenn man eine hinreichend große Anzahl von Functionen $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ nimmt, welche auf die angegebene Weiſe ſucceſſive auseinander abgeleitet werden, das Glied Xu^n beliebig klein werden kann, und daß folglich alsdann der Werth $z = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ der Differenzialgleichung $D_x^2 z = Xz$ genügt.

§. 276. Der Vollſtändigkeit wegen wollen wir nochmals die Differenzialgleichung der zweiten Ordnung ohne zweiten Theil:

$$D_x^2 y + X_1 D_x y + X_2 y = 0$$

betrachten. Setzt man $y = e^{\int z dx}$, ſo wird ſie auf die Differenzialgleichung der erſten Ordnung:

$$D_x z + z^2 + z X_1 + X_2 = 0$$

zurückgeführt, welche man durch die bekannten Mittel integrirt, und y wird alsdann durch die Reihe:

$$y = 1 + \int z dx + \frac{(\int z dx)^2}{1.2} + \frac{(\int z dx)^3}{1.2.3} + \ldots$$

gegeben. Wenn man aber ein particuläres Integral y_1 dieſer Gleichung kennt, ſo kann man bekanntlich leicht das zweite particuläre Integral, und folglich das allgemeine Integral beſtimmen; denn man braucht zu dem Ende nur $y = uy_1$ zu ſetzen, und man findet alsdann:

$$y = y_1 \left(C_1 + C_2 \int \frac{e^{-\int X_1 dx}}{y_1^2} dx \right).$$

Wenn man z. B. das particuläre Integral $y = C_1 x$ der Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y - \frac{1}{x(lx-1)} D_x y + \frac{y}{x^2(lx-1)} = 0$$

kennt, so wird das zweite particuläre Integral derselben durch den Ausdruck:

$$x \int \frac{e^{\int \frac{dx}{x(lx-1)}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{l(lx-1)}}{x^2} dx = x \int \frac{lx-1}{x^2} dx$$

$$= -\frac{xlx}{x} = -lx$$

bestimmt, und das allgemeine Integral ist:

$$y = C_1 x + C_2 lx.$$

Diese Methode ist, wie wir bereits bemerkt haben, auf eine beliebige lineare Differenzialgleichung anwendbar. Es giebt auch ein Mittel, durch welches man leichter von dem ersten particulären Integrale zu dem zweiten gelangen kann, und welches nur der Differenzialgleichung der zweiten Ordnung entspricht.

Betrachten wir die beiden Differenzialgleichungen:

$$D_x^2 y + X_1 D_x y + X_2 = 0, \quad D_x^2 y_1 + X_1 D_x y_1 + X_2 = 0,$$

so erhalten wir, wenn wir die erste mit y_1, die zweite mit y multipliciren und dann die Producte von einander abziehen:

$$y_1 D_x^2 y - y D_x^2 y_1 + X_1 (y_1 D_x y - y D_x y_1) = 0.$$

Setzt man:

$$y_1 D_x y - y D_x y_1 = u,$$

so hat man:

$$y_1 D_x^2 y - y D_x^2 y_1 = D_x u$$

und die vorhergehende Differenzialgleichung nimmt die sehr einfache Form:

$$D_x u + X_1 u = 0$$

an, woraus folgt:

$$u = C_1 e^{-\int X_1 dx}, \quad y_1 D_x y - y D_x y_1 = C_1 e^{-\int X_1 dx}.$$

Diese letzte Differenzialgleichung, welche von der ersten Ordnung und linear ist, könnte man durch die gewöhnliche Methode integriren; allein man gelangt schneller zum Resultate, wenn man bemerkt, daß der erste Theil $= y_1^2 D_x \frac{y}{y_1}$ ist, so daß man also hat:

$$D_x \frac{y}{y_1} = C_1 \frac{e^{-\int X_1 dx}}{y_1^2}$$

und folglich:

$$y = C' y_1 + C'' y_1 \int \frac{e^{-\int X_1 dx}}{y_1^2} dx.$$

Anmerkung. Aus der Gleichung:

$$y_1 D_x y - y D_x y_1 = C_1 e^{-\int X_1 dx}$$

ergeben sich mehrere Eigenschaften der linearen Differenzialgleichung der zweiten Ordnung ohne zweiten Theil. Zunächst geht daraus hervor, daß y und dessen Ableitung $D_x y$ für einen gewissen Werth von x nicht zu gleicher Zeit verschwinden können; denn wenn dieses der Fall wäre, so müßte die willkührliche Constante $C_1 = 0$ werden, was im Allgemeinen nicht der Fall sein kann.

Ferner sieht man, daß zwischen zwei successiven Werthen x_0 und x_1 von x, welche $y_1 = 0$ machen, ein Werth von x liegt, welcher y verschwinden macht; denn wenn man die Constante C_1 als positiv annimmt, so ergiebt sich aus der Gleichung:

$$y_1 D_x y - y D_x y_1 = C_1 e^{-\int X_1 dx},$$

daß $y D_x y_1 < 0$ ist für $x = x_0$, $x = x_1$ und folglich y und $D_x y_1$ entgegengesetzte Zeichen haben; aber sehr wenig nach x_0 und vor x_1 hat $D_x y_1$ entgegengesetzte Zeichen. Dasselbe ist also auch mit y der Fall, und folglich muß y in dem erwähnten Intervalle wenigstens einmal verschwinden. Umgekehrt, zwischen zwei auf einander folgenden Werthen von x, welche y verschwinden machen, liegt wenigstens ein Werth von x, welcher y_1 verschwinden macht. Hieraus folgt, wenn man x von $-\infty$ bis $=\infty$ stetig zunehmen läßt, daß die beiden Functionen y und y_1 immer abwechselnd verschwinden. So hat z. B. die Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y + y = 0$$

zum allgemeinen Integrale:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

und es ergiebt sich leicht, daß die durch die Gleichungen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ ausgedrückten Curven die Abscissenaxe abwechselnd durchschneiden.

§. 277. Wir wollen diese vollständige Analyse aller bisherigen Untersuchungen über die Integration der Differenzialgleichungen mit einigen Betrachtungen über die singulären Auflösungen beschließen.

Wir wollen annehmen, daß das allgemeine Integral der Differenzialgleichung:

$$f(x, y, D_x y, D_x^2 y, \ldots, D_x^n y) = f[x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}] = 0$$

durch:

$$F(x, y, c_1, c_2, c_3, \ldots c_n) = 0$$

ausgedrückt werde. Wenn man zwiſchen den Gleichungen:

$$F = 0,\ D_x F = 0,\ D_x^2 F = 0, \ldots,\ D_x^n F = 0$$

die n Conſtanten $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ eliminirt, ſo erhält man nothwendig die gegebene Differenzialgleichung wieder.

So iſt z. B. von der Differenzialgleichung:

$$D_x^2 y + ay - 1 = 0$$

das allgemeine Integral:

$$F = ay - 1 + \cos x\sqrt{a} - (c_1 \sin x\sqrt{a} + c_2 \cos x\sqrt{a})\sqrt{a} = 0,$$

woraus ſich ergiebt:

$$D_x F = a D_x y - \sqrt{a}\sin x\sqrt{a} - (c_1 \cos x\sqrt{a} - c_2 \sin x\sqrt{a})a = 0,$$
$$D_x^2 F = a D_x^2 y - a\cos x\sqrt{a} + (c_1 \sin x\sqrt{a} + c_2 \cos x\sqrt{a})a\sqrt{a} = 0.$$

Aus dieſer letzten Gleichung ergiebt ſich aber in Verbindung mit der erſten unmittelbar die gegebene Gleichung:

$$D_x^2 y + ay - 1 = 0$$

wieder. Differenzirt man nun die n Gleichungen:

$$F = 0,\ D_x F = 0,\ D_x^2 F = 0, \ldots,\ D_x^{n-1} F = 0$$

in Beziehung auf die Conſtanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ und bezeichnet die erhaltenen Differenziale der Kürze wegen durch:

$$\Sigma d_c F,\ \Sigma d_c D_x F, \ldots,\ \Sigma d_c D_x^{n-1} F;$$

ſo kommt man immer wieder auf die gegebene Differenzialgleichung, wenn man zur Elimination der Conſtanten ſtatt der Gleichungen:

$$F = 0,\ D_x F = 0, \ldots,\ D_x^n F = 0$$

die neuen Gleichungen:

$$F = 0,\ D_x F + \Sigma d_c F = 0,\ D_x^2 F + \Sigma d_c D_x F = 0, \ldots,$$
$$D_x^n F + \Sigma d_c D_x^{n-1} F = 0$$

anwendet, wofern man hat:

$$\Sigma d_c F = 0,\ \Sigma d_c D_x F = 0, \ldots,\ \Sigma d_c D_x^{n-1} F = 0.$$

Wenn man zwiſchen den n Gleichungen:

$$\Sigma d_c F = 0, \quad \Sigma d_c D_x F = 0, \ldots, \quad \Sigma d_c D_x^{n-1} F = 0$$

die $n-1$ Verhältniſſe:

$$\frac{dc_1}{dc_n}, \quad \frac{dc_2}{dc_n}, \ldots, \quad \frac{dc_{n-1}}{dc_n}$$

eliminirt hat, ſo daß man auf eine Differenzialgleichung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n, D_x y, D_x^2 y, \ldots, D_x^{n-1} y) = 0$$

kommt, und man eliminirt die n Conſtanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ zwiſchen den n Gleichungen:

$$f = 0, \; F = 0, \; D_x F = 0, \ldots, \; D_x^{n-1} D = 0$$

wieder, um eine von den Conſtanten unabhängige Differenzialgleichung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$\chi(x, y, D_x y, \ldots, D_x^{n-1} y) = 0$$

zu erhalten; ſo folgt aus dem Vorhergehenden, daß dieſe letzte Gleichung im Allgemeinen eine ſinguläre Auflöſung der gegebenen Differenzialgleichung iſt.

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß man habe:

$$F = y - \frac{c_1}{2} x^2 - c_2 x - c_1^2 - c_2^2 = 0,$$

ſo erhält man, wenn man die Conſtanten c_1, c_2 zwiſchen den drei Gleichungen:

$$F = 0, \; D_x F = 0, \; D_x^2 F = 0$$

eliminirt, die Differenzialgleichung:

$$f(x, y, D_x y, D_x^2 y) = y - x D_x y + \frac{x^2}{2} D_x^2 y - D_x^2 y^2 - (D_x^2 y - x D_x^2 y)^2 = 0.$$

Ferner iſt:

$$\frac{1}{dc_2} \Sigma d_c F = -\left(\frac{x^2}{2} + 2c_1\right) \frac{dc_1}{dc_2} - x - 2c_2,$$

$$\frac{1}{dc_2} \Sigma d_c D_x F = -x \frac{dc_1}{dc_2} - 1,$$

und wenn man das Verhältniß $\frac{dc_1}{dc_2}$ zwiſchen den beiden Gleichungen:

$$-\left(\frac{x^2}{2}+2c_1\right)\frac{dc_1}{dc_2}-x-2c_2=0,\quad -x\frac{dc_1}{dc_2}-1=0$$

eliminirt; ſo erhält man:

$$f=\left(\frac{x^2}{2}+2c_1\right)\frac{1}{x}-x-2c_2=0.$$

Eliminirt man endlich die Conſtanten c_1, c_2 zwiſchen den drei Gleichungen:

$$f=0,\ F=0,\ D_xF=0,$$

ſo kommt man auf die Gleichung:

$$\chi=y(x^2+1)+\frac{x}{16}-D_xy^2-\left(x+\frac{x^3}{2}\right)D_xy=0,$$

welche eine ſinguläre Auflöſung der Gleichung:

$$y-xD_xy+\frac{x^2}{2}D_x^2y-D_x^2y^2-(D_xy-xD_x^2y)^2=0$$

iſt. Es iſt leicht einzuſehen, daß nicht blos die Gleichung:

$$\chi(x,\ y,\ D_xy,\ldots,\ D_x^{n-1}y)=0$$

ein ſinguläres Integral der Differenzialgleichung:

$$f(x,\ y,\ D_xy,\ D_x^2y,\ldots,\ D_x^ny)=0$$

iſt, ſondern daß auch die ſucceſſiven Integrale:

$$\begin{aligned}
&\chi_1\quad (x,\ y,\ c',\ D_xy,\ldots,\ D_x^{n-2}y)=0,\\
&\chi_2\quad (x,y,c',c'',D_xy,\ldots,\ D_x^{n-3}y)=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\chi_{n-1}\,[x,\ y,\ c',\ c'',\ldots,\ c^{(n-1)}]=0
\end{aligned}$$

derſelben Gleichung $\chi=0$ ſinguläre Auflöſungen der Gleichung $f=0$ ſind. Hieraus folgt, daß die allgemeinſte ſinguläre Auflöſung höchſtens $n-1$ willkührliche Conſtanten enthält, was bereits bekannt war.

Zuweilen geſchieht es, daß die Gleichung $f=0$ keine der willkührlichen Conſtanten c_1, c_2, ..., c_n enthält, und alsdann ſtimmt die ſinguläre Auflöſung $\chi=0$ mit $f=0$ überein. Es ſei z. B. die Differenzialgleichung gegeben:

$$f=yx^2D_x^2y-2x^2D_xy^2+6xyD_xy-6y^2=0,$$

ſo iſt das allgemeine Integral derſelben:

$$F=xy+c_1x^2+c_2y=0$$

und man hat:

$$\frac{1}{dc_2}\Sigma d_c F = x^3\frac{dc_1}{dc_2}+y,\quad \frac{1}{dc_2}\Sigma d_c D_x F = 3x^2\frac{dc_1}{dc_2}+\frac{dy}{dx}=0.$$

Ferner findet man:

$$f=\frac{1}{3}\,D_x y-\frac{y}{x}=0,$$

das singuläre Integral ist:

$$\frac{1}{3}\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=0,$$

und wenn man integrirt; so erhält man die zweite singuläre Auflösung $y=c'x^3$.

Wenn die Gleichung $f=0$ nur $n-m$ willkührliche Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_{n-m}$ enthielte, so wären zur Bestimmung der singulären Auflösung die Gleichungen:

$$f=0,\ D_x^{n-1}F=0,\ D_x^{n-2}F=0,\ldots,\ D_x^{n-m}F=0$$

hinreichend.

Wir wollen nun annehmen, daß die Differenzialgleichung:

$$f(x, y, D_x y, \ldots, D_x^n y)=0$$

nicht blos durch den Ausdruck:

$$y=F_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_m)=0,$$

sondern auch durch einen zweiten Werth von der Form:

$$y+\varepsilon\varphi=F_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_m)+\varepsilon\varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_m)$$

verificirt wird, wo m kleiner, oder höchstens $=n$ ist und ε eine sehr kleine Größe bezeichnet; so wird die Gleichung:

$$f[x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}]=0$$

nicht blos durch die Werthe:

$$y, y', y'', \ldots, y^{(n)},$$

sondern auch durch:

$$y+\varepsilon\varphi,\ y'+\varepsilon\varphi',\ y''+\varepsilon\varphi'',\ \ldots,\ y^{(n)}+\varepsilon\varphi^{(n)}$$

erfüllt, und man hat folglich:

$$f+\varepsilon\left(\frac{df}{dy}\varphi+\frac{df}{dy'}\varphi'+\ldots+\frac{df}{dy^{(n)}}\varphi^{(n)}\right)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{d^2f}{dy^2}\varphi^2+\frac{d^2f}{dy'^2}\varphi'^2+\ldots+\frac{2d^2f}{dydy'}\varphi\varphi'+\ldots+\varepsilon_1\right)=0,$$

wo ε_1 auch eine unendlich kleine Größe bezeichnet, welche mit ε zugleich verschwindet. Es ist aber $f=0$, und folglich erhält man, wenn man durch ε dividirt und dann $\varepsilon=0$ setzt:

$$\frac{df}{dy^{(n)}}\varphi^{(n)}+\frac{df}{dy^{(n-1)}}\varphi^{(n-1)}+\ldots+\frac{df}{dy'}\varphi'+\frac{df}{dy}\varphi=0.$$

Nun hat der Coefficient $\frac{df}{dy^{(n)}}$ aber entweder einen endlichen Werth, oder er ist $=0$. Im ersten Falle ist die vorhergehende Gleichung von der $n$ten Ordnung und giebt für φ einen Werth mit n willkührlichen Constanten, m ist $=n$ und der Werth $y=F$ ist kein particuläres, sondern das vollständige oder allgemeine Integral der gegebenen Differenzialgleichung. Im zweiten Falle ist die Gleichung, welche φ giebt, von einer niedrigern, als der $n$ten Ordnung, m ist kleiner als n und F ist ein particuläres, oder singuläres Integral. Wenn also die Gleichung:

$$f[x, y', y'', \ldots, y^{(n)}]=0$$

singuläre Auflösungen gestattet, so hat man:

$$\frac{df}{dy^{(n)}}=D_{y^{(n)}}f=0$$

und da:

$$df=D_xf\,dx+D_yf.y'\,dx+D_{y'}f.y''\,dx+\ldots$$
$$+D_{y^{(n-1)}}f.y^{(n)}\,dx+D_{y^{(n)}}f.y^{(n+1)}\,dx$$

ist; so hat man auch in der Voraussetzung einer singulären Auflösung:

$$D_xf+D_yf.y'+D_{y'}f.y''+\ldots+D_{y^{(n-1)}}f.y^{(n)}=0,$$

und folglich:

$$y^{(n+1)}=D_x^{n+1}y=\frac{0}{0}.$$

Die beiden Gleichungen:

$$D_{y^{(n)}}f=0,\ D_x^{n+1}y=\frac{0}{0}$$

geben in gewissen Fällen singuläre Auflösungen, wenn auch das allgemeine Integral nicht bekannt ist.

Beispiel 1. Es sei:

$$D_x^2y+2x-2\sqrt{x^2+D_xy}=0,$$

oder:

$$y''+2x-2\sqrt{x^2+y'}=0,$$

so kann man die Gleichung $f=0$ auf folgende Form bringen:

$$f = y'' \sqrt{x^2+y'} + 2x\sqrt{x^2+y'} - 2(x^2+y') = 0,$$

so daß:

$$\frac{df}{dy''} = \sqrt{x^2+y'}$$

ist, und wenn man dieſen Werth $=0$ ſetzt; ſo findet man den Werth:

$$dy = -x^2dx, \quad y = C_1 - \frac{x^3}{3},$$

welcher der gegebenen Differenzialgleichung genügt und eine ſinguläre Auflöſung derſelben iſt.

Beiſpiel 2. Es ſei:

$$f = yy' - y'\sqrt{x^2+y^2-a^2} + x = 0,$$

ſo iſt:

$$D_{y'}f = y - \sqrt{x^2+y^2-a^2},$$

folglich $x^2 - a^2 = 0$. Aber wenn man die gegebene Gleichung auf die Form:

$$f = yy'\sqrt{x^2+y^2-a^2} - y'(x^2+y^2-a^2) + x\sqrt{x^2+y^2-a^2}$$

brächte, ſo hätte man:

$$D_{y'}f = (y - \sqrt{x^2+y^2-a^2})\sqrt{x^2+y^2-a^2} = 0,$$

und aus dieſer letzten Gleichung ergäbe ſich nicht blos:

$$x^2 - a^2 = 0,$$

ſondern auch:

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Beiſpiel 3. Es ſei:

$$xy''^2 - 2y'y'' + x = 0,$$

ſo folgt daraus:

$$y'' = \frac{x(y''^2-1)}{2(xy''-y')},$$

und wenn man ausdrückt, daß dieſe Ableitung die Form $\frac{0}{0}$ annimmt; ſo hat man:

$$y''^2 - 1 = 0, \quad xy'' - y' = 0,$$

woraus ſich durch Elimination von y'' ergiebt:

$$y'^2 - x^2 = 0, \quad dy = xdx, \quad y = C_1 + \frac{x^2}{2}.$$

Beiſpiel 4. Endlich ſei:

$$y = xy' - a\sqrt{1+y'^2},$$

so hat man:

$$y'' = \frac{0}{x\sqrt{1+y'^2} - ay'}$$

und folglich:

$$x\sqrt{1+y'^2} - ay' = 0,$$

woraus sich ergiebt:

$$y'^2 = \frac{x^2}{a^2-x^2}, \quad y' = \pm\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

und wenn man y' zwischen dieser Gleichung und der gegebenen eliminirt; so erhält man die beiden singulären Auflösungen:

$$y^2(a^2-x^2) - (x^2+a^2)^2 = 0, \quad y^2 + x^2 - a^2 = 0.$$

Um zu entscheiden, ob die durch die eben auseinandergesetzte Methode gefundenen Integrale wirklich singuläre Integrale sind, thut man am besten, wenn man, wie auch bereits bemerkt worden, untersucht, ob sie sich aus den allgemeinen Integralen ableiten lassen, wenn man den willkührlichen Constanten besondere Werthe beilegt.

Wir haben diese Methode aus der Integralrechnung von Caraffa, Professor der höhern Mathematik zu Rom, entlehnt, und das Verfahren, welches dieser Mathematiker bei Differenzialgleichungen der ersten Ordnung anwendet, ist folgendes: Es sei:

$$f(x, y, y') = 0$$

die gegebene Differenzialgleichung, welche wir auf die Form:

$$y' + \varphi(x,y) = \mathrm{D}_x y + \varphi(x,y) = 0$$

bringen wollen, und:

$$\mathrm{F}(x, y, c) = 0$$

sei das allgemeine Integral derselben; so findet man, wenn man diese letzte Gleichung differenzirt:

$$\mathrm{D}_x\mathrm{F} + \mathrm{D}_y\mathrm{F}.y' = 0,$$

und wenn man diese Gleichung in Beziehung auf die Constante c auflöst:

$$c = \chi(x, y, y').$$

Substituirt man diesen Werth von c in die Gleichung:

$$\mathrm{F}(x, y, c) = 0,$$

so erhält man:

$$F\,[x,\ y,\ \chi\,(x,\ y,\ y')] = 0,$$

und wenn man für y' seinen Werth $-\varphi(x,y)$ substituirt:

$$F\,[x,\ y,\ \chi\,(x,\ y,-\varphi)] = 0.$$

Diese letzte Gleichung muß offenbar eine identische $0=0$ sein, und man hat folglich, wenn man successive in Beziehung auf x und y differenzirt:

$$D_xF+(D_x\chi-D_\varphi\chi D_x\varphi)D_\chi F=0,$$
$$D_yF+(D_y\chi-D_\varphi\chi D_y\varphi)D_\chi F=0,$$

woraus folgt:

$$D_x\varphi=\frac{D_xF+D_\chi FD_x\chi}{D_\chi FD_\varphi\chi},\quad D_y\varphi=\frac{D_yF+D_\chi FD_y\chi}{D_\chi FD_\varphi\chi}.$$

Aber jede singuläre Auflösung hat die Gleichung:

$$D_c F = 0$$

und mithin die Gleichung:

$$D_\chi F = 0,$$

folglich auch die beiden Gleichungen:

$$D_x\varphi = \infty,\quad D_y\varphi = \infty$$

zur Folge, und diese so a priori aufgestellten beiden Gleichungen dienen zur Bestimmung der singulären Auflösungen einer Differenzialgleichung, deren allgemeines Integral unbekannt ist.

Beispiel. Es sei:

$$xdx+ydy=dy\sqrt{x^2+y^2-a^2}$$

oder:

$$D_xy=-\frac{x}{-y+\sqrt{x^2+y^2-a^2}},$$

so hat man:

$$\varphi\,(x,\ y) = -\frac{x}{-y+\sqrt{x^2+y^2-a^2}},$$

und:

$$D_x\varphi=-\frac{x}{-y+\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$$
$$+\frac{x^2}{(x^2+y^2-a^2)^{\frac{1}{2}}(-y+\sqrt{x^2+y^2-a^2})},$$
$$D_y\varphi=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}(-y+\sqrt{x^2+y^2-a^2})},$$

welche beide Werthe unendlich werden, wenn man hat:

$$x^2+y^2-a^2=0, \quad x^2-a^2=0.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen giebt:

$$xdx+ydy=0$$

und die zweite:

$$xdx = 0$$

und beide sind singuläre Auflösungen der gegebenen Differenzialgleichung.

Vierzigste Vorlesung.

Neue Methode zur Integration eines beliebigen Systemes gleichzeitiger Differenzialgleichungen der ersten Ordnung.

§. 278. Die Integration der Differenzialgleichungen durch Reihen ist illusorisch, so lange man kein Mittel hat, wodurch man sich überzeugen kann, daß die erhaltenen Reihen convergent und ihre Summen Functionen sind, welche den gegebenen Gleichungen genügen können, so daß man nothwendig entweder ein solches Mittel, oder eine andere Methode suchen muß, vermittelst welcher man allgemein die Functionen bestimmen kann, welche gegebenen Differenzialgleichungen genügen. Dieses haben wir in Vorlesung 26 und 33 gethan. Die dort auseinandergesetzte Methode ist streng und läßt in theoretischer Beziehung nichts zu wünschen übrig, und wir haben sie zugleich auf ein System von Differenzialgleichungen einer beliebigen Ordnung erstreckt, deren Integration sich auf die Integration gleichzeitiger Differenzialgleichungen der ersten Ordnung zurückführen läßt.

§. 279. In praktischer Beziehung und in vielen andern Rücksichten hat jedoch die neue, von Cauchy herrührende Methode, welche wir nun auseinandersetzen wollen, viele Vorzüge.

Es seien $x, y, z, \ldots$ abhängige Veränderliche oder Functionen der unabhängigen Veränderlichen t, welche durch die Differenzialgleichungen der ersten Ordnung:

$$(D)\quad \begin{cases} dx = F_1 dt, \quad dy = F_2 dt, \quad dz = F_3 dt, \ldots, \\ \text{oder:} \\ D_t x = F_1, \quad D_t y = F_2, \quad D_t z = F_3, \ldots, \\ \frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} = \frac{dz}{F_3} = \ldots \frac{dt}{1}, \\ \frac{D_t x}{F_1} = \frac{D_t y}{F_2} = \frac{D_t z}{F_3} \ldots \end{cases}$$

bestimmt werden, wo $F_1, F_2, F_3, \ldots$ bekannte Functionen der Veränderlichen $x, y, z, \ldots, t$ bezeichnen. Offenbar wird die All-

gemeinheit dieſer Gleichungen nicht vergrößert, wenn man $\frac{dt}{F}$ ſtatt $\frac{dt}{1}$ ſetzt.

Wir wollen annehmen, daß dieſe Gleichungen integrabel ſind, d. h., daß $x, y, z, \ldots, t$ ſich gleichzeitig ſo ändern können, daß dieſen Gleichungen immer Genüge geſchieht, oder daß, wenn τ ein willkührlicher Werth von t iſt und $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ die entſprechenden willkührlichen Werthe von $x, y, z, \ldots$ bezeichnen, die abhängigen Veränderlichen mit t durch Gleichungen von der Form:

$$(i_1)\quad \begin{cases} x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau, t), \quad y = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau, t), \\ z = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau, t), \ldots \end{cases}$$

verbunden ſind.

Dieſe Gleichungen finden noch ſtatt, wenn man $t = \tau$ ſetzt, und da $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ die $t = \tau$ entſprechenden Werthe von $x, y, z, \ldots$ ſind; ſo hat man identiſch:

$$\xi = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau, \tau), \quad \eta = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau, \tau),$$
$$\zeta = \varphi_3(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau, \tau), \ldots$$

und eben ſo hat man aus gleichen Gründen:

$$x = \varphi_1(x, y, z, \ldots, t, t), \quad y = \varphi_2(x, y, z, \ldots, t, t),$$
$$z = \varphi_3(x, y, z, \ldots, t, t), \ldots,$$
$$\xi = \varphi_1(x, y, z, \ldots, t, \tau), \quad \eta = \varphi_2(x, y, z, \ldots, t, \tau),$$
$$\zeta = \varphi_3(x, y, z, \ldots, t, \tau), \ldots.$$

Das erſte und das letzte dieſer vier Syſteme von Gleichungen ſind zur Darſtellung der allgemeinen Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen gleich geeignet, und die Exiſtenz eines dieſer beiden Syſteme annehmen, iſt nichts anders, als die Annahme, daß die Integration der gegebenen Differenzialgleichungen möglich und realiſirt iſt.

Um die Begriffe zu fixiren, wollen wir annehmen, daß das Syſtem der geſuchten Integrale durch die Gleichungen:

$$(i_2)\quad \begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y, z, \ldots, t, \tau), \quad \eta = \varphi_2(x, y, z, \ldots, t, \tau), \\ \zeta = \varphi_3(x, y, z, \ldots, t, \tau), \end{cases}$$

welche wir einfacher durch:

$$\xi = f_1, \quad \eta = f_2, \quad \zeta = f_3, \ldots$$

bezeichnen wollen, dargeſtellt wird. Mit:

$$v = f(x, y, z, \ldots)$$

wollen wir eine bestimmte Function der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ und mit:

$$v = f(\xi, \eta, \zeta, \ldots), \quad U = f(f_1, f_2, f_3, \ldots)$$

resp. den Werth bezeichnen, welchen die Function u annimmt, wenn man darin successive für die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ die willkührlichen Werthe $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ und die Functionen $f_1, f_2, f_3, \ldots$ setzt, wo U und $f_1, f_2, f_3, \ldots$ blos von den Größen $x, y, z, \ldots, t, \tau$ abhängen und sich für $t = \tau$ auf die mit v bezeichnete neue willkührliche Constante reduciren. Ferner hat man vermöge der Gleichungen (i_2) nothwendig:

$$f(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = f(f_1, f_2, f_3, \ldots), \text{ oder } U = v.$$

Dieses vorausgesetzt, lassen sich leicht die folgenden drei Lehrsätze beweisen, welche die Grundlage der neuen Integrationsmethode bilden.

§. 280. **Lehrsatz 1.** Der Ausdruck $U = C$, wo C eine willkührliche Constante und U blos eine Function der Veränderlichen $x, y, z, \ldots, t$ und τ ist, kann nur dann ein Integral der gegebenen Differenzialgleichungen (D) sein, wenn der Werth $s = U$ ein particuläres Integral der partiellen Differenzialgleichung ist:

$$(C) \qquad D_t s + F_1 D_x s + F_2 D_y s + F_3 D_z s + \ldots = 0.$$

Denn $U = C$ kann nur dann ein Integral der gegebenen Differenzialgleichungen sein, wenn die aus den Gleichungen:

$$\xi = f_1, \quad \eta = f_2, \quad \zeta = f_3, \ldots,$$

oder:

$$x = \phi_1(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau, t), \quad \eta = \phi_2(\quad), \ldots$$

abgeleiteten Werthe von $x, y, z, \ldots$, U nicht auf eine Function von τ, sondern auf eine willkührliche Constante reduciren, was nur der Fall sein kann, wenn das Totaldifferenzial von U in Beziehung auf t gleich Null ist. Man hat folglich:

$$D_t U + D_x U D_t x + D_y U D_t y + D_z U D_t z + \ldots = 0$$

oder wenn man für $D_t x, D_t y, D_t z, \ldots$ ihre aus den Gleichungen (D) abgeleiteten Werthe substituirt:

$$D_t U + F_1 D_x U + F_2 D_y U + F_3 D_z U + \ldots = 0.$$

Diese letzte Gleichung muß übrigens eine identische $0 = 0$ werden, weil sonst zwischen den Größen $x, y, z, \ldots$ t und τ eine gewisse Relation festgesetzt würde, welche eine nothwendige Folgerung aus den Gleichungen:

$$\xi = f_1, \quad \eta = f_2, \quad \zeta = f_3, \ldots.$$

wäre. Dieses kann aber nach der Voraussetzung nicht der Fall sein; denn diese letzten Gleichungen werden durch völlig willkührliche Werthe von x, y, z, t, τ und durch die Werthe von $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ erfüllt, welche sich vermittelst derselben Gleichungen aus den $x, y, z, \ldots, t$ und τ beigelegten Werthen ergeben, so daß es ungereimt wäre, wenn man annehmen wollte, daß man die Veränderlichen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ zwischen diesen Gleichungen eliminiren und eine Relation zwischen den Größen $x, y, z, \ldots, t, \tau$ allein erhalten könnte. Die Gleichung:

$$(A) \qquad D_t U + F_1 D_x U + F_2 D_y U + F_3 D_z U + \ldots = 0$$

kann also in der That nur eine identische sein, welche ausdrückt, daß $s = U$ der Gleichung (C) genügt. Soll also $U = C$ ein Integral der gegebenen Differenzialgleichungen sein können, so ist durchaus erforderlich, daß $s = U$ der partiellen Differenzialgleichung (C) genügt.

Anmerkung. Wenn v den besondern Werth bezeichnet, welchen die Function f annimmt, wenn man $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$, ... setzt, so reducirt sich der Werth der allgemeinen Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen, welche von der Form $U = C$ sind, nach dem Gesagten nothwendig auf $U = v$, und alsdann ist auch der Werth $s = U - v$, so wie der Werth $s = U$ ein particuläres Integral der partiellen Differenzialgleichung. Um also zu erfahren, ob die gegebenen Differenzialgleichungen ein allgemeines Integral von der Form $U = C$ haben können, braucht man nur zu untersuchen, ob der Werth $s = U$, oder $s = U - v$ ein particuläres Integral der Gleichung (C) ist, wenn v eine willkührliche Constante und U eine Function der Veränderlichen $x, y, z, \ldots, t$ bezeichnet, welche so beschaffen ist, daß sie sich für einen besondern Werth τ der Veränderlichen t auf eine gegebene Function von $x, y, z, \ldots$, nämlich auf $u = f(x, y, z, \ldots)$ reducirt. Um die der Ausdrücke $U = v$ zu erhalten, welche den gegebenen Gleichungen genügen können, muß man den Werth von s, welcher der Gleichung (C) genügt und sich für $t = \tau$ auf $u - v$ reducirt, gleich Null setzen, oder man braucht auch nur das der Integrale der Gleichung (C), welches sich für $t = \tau$ auf u reducirt, $= v$ zu setzen.

§. 281. **Lehrsatz 2.** Um die Werthe von der Form:

$$\xi = f_1, \quad \eta = f_2, \quad \zeta = f_3, \ldots$$

zu erhalten, welche ein System allgemeiner Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen bilden können, braucht man nur die verschiedenen particulären Integrale der Gleichung (C) zu suchen, welche sich für $t = \tau$ auf eine der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ reduciren.

Dieser Lehrsatz ist eine Folge aus dem vorhergehenden, woraus sich derselbe unmittelbar ergiebt, wenn man successive $x, y, z, \ldots$ für die Function $f(x, y, z, \ldots)$ setzt. Bezeichnet man alsdann mit $s = f_1$, $s = f_2$, $s = f_3, \ldots$ die verschiedenen Integrale der Glei-

chung (C), welche sich für $t=\tau$ auf eine der Veränderlichen x, y, z,.... reduciren, so wird derselben Gleichung (C) auch noch genügt, wenn man für s einen der Werthe:

$$s=f_1-\xi,\quad s=f_2-\eta,\quad s=f_3-\zeta,\ldots$$

nimmt, und wenn man diese Werthe von $s=0$ setzt; so erhält man die Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen (D) unter der gesuchten Form.

§. 282. **Lehrsatz 3.** Umgekehrt, die allgemeine Integration der Gleichung (C) hat die allgemeine Integration der Gleichungen (D) zur Folge, und um die allgmeinen Integrale dieser letzten Gleichungen zu erhalten, braucht man nur die Werthe f_1, f_2, f_3,.... von s, welche der Gleichung (C) genügen und sich für $t=\tau$ auf x, y, z,.... reduciren, willkührlichen Constanten ξ, η, ζ, ... gleich zu setzen.

Denn auf diese Weise erhält man die Gleichungen:

$$\xi=f_1=\varphi_1(x,y,z,\ldots,t,\tau),\ \eta=f_2=\varphi_2(\ ),\ \zeta=f_3=\varphi_3(\ ),\ldots,$$

vermöge welcher x, y, z, ... Functionen von t sind, welche sich für $t=\tau$ resp. auf ξ, η, ζ, ... reduciren. Da nun f_1 ein particuläres Integral der Gleichung (C) ist, so hat man:

$$D_t f_1 + F_1 D_x f_1 + F_2 D_y f_1 + F_3 D_z f_1 + \ldots = 0.$$

Läßt man ferner x, y, z,.... sich mit t ändern, so ergiebt sich aus der Gleichung $f_1=\xi$ die Gleichung:

$$D_t f_1 + D_x f_1 D_t x + D_y f_1 D_t y + D_z f_1 D_t z + \ldots = 0,$$

und wenn man $D_t f_1$ zwischen diesen beiden Gleichungen eliminirt und ebenso in Beziehung auf f_1, f_2,.... verfährt; so findet man:

$$\begin{aligned}
&D_x f_1 (D_t x - F_1) + D_y f_1 (D_t y - F_2) + D_z f_1 (D_t z - F_3) + \ldots = 0,\\
&D_x f_2 (D_t x - F_1) + D_y f_2 (D_t y - F_2) + D_z f_2 (D_t z - F_3) + \ldots = 0,\\
&D_x f_3 (D_t x - F_1) + D_y f_3 (D_t y - F_2) + D_z f_3 (D_t z - F_3) + \ldots = 0.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Wenn man diese letzten Gleichungen durch Addition verbindet, nachdem man sie mit unbestimmten Factoren multiplicirt hat, welche man alsdann so annimmt, daß die sämmtlichen Differenzen:

$$D_t x - F_1,\quad D_t y - F_2,\quad D_t z - F_3,\ldots,$$

mit Ausnahme einer einzigen, eliminirt werden, und man setzt:

$$K = D_x f_1 D_y f_2 D_z f_3 \ldots - D_y f_1 D_x f_2 D_z f_3 \ldots + \ldots;$$

so erhält man:

$$K(D_t x - F_1) = 0, \quad K(D_t y - F_2) = 0, \quad K(D_t z - F_3) = 0, \ldots$$

Nun kann aber die durch K ausgedrückte Function von $x, y, z, \ldots$, t im Allgemeinen nicht verschwinden; denn sie reducirt sich sowohl, als $D_x f_1$, $D_y f_2$, $D_z f_3, \ldots$ für $t = \tau$ auf die Einheit, weil alsdann:

$$f_1 = x, \quad f_2 = y, \quad f_3 = z, \ldots$$

ist. Man hat mithin nothwendig:

$$D_t x - F_1 = 0, \quad D_t y - F_2 = 0, \quad D_t z - F_3 = 0, \ldots$$

oder endlich:

$$D_t x = F_1, \quad D_t y = F_2, \quad D_t z = F_3, \ldots.$$

Die Gleichungen:

$$\xi = f_1, \quad \eta = f_2, \quad \zeta = f_3, \ldots$$

verificiren folglich die gegebenen Differenzialgleichungen und sind die allgemeinen Integrale derselben. Diese Integrale sind ferner so beschaffen, daß sie, wenn ein System von Werthen der Veränderlichen $x, y, z, \ldots, t$ gegeben ist, unmittelbar die neuen Werthe $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ geben, welche die abhängigen Veränderlichen für einen neuen Werth τ der unabhängigen Veränderlichen annehmen.

Anmerkung. Wenn die allgemeinen Integrale der Differenzialgleichungen (D) auf die eben angegebene Weise erhalten und durch die Formeln (i_2) ausgedrückt werden, so drückt die Formel $U = v$, worin $U = f(f_1, f_2, f_3, \ldots)$ eine beliebige Function von $f_1, f_2, f_3, \ldots$ bezeichnet, ein neues allgemeines Integral der Differenzialgleichungen (D) aus, und um dasselbe zu erhalten, braucht man nur, wie wir gesehen haben, das der particulären Integrale der Gleichung (C), welches sich für $t = \tau$ auf $u = f(x, y, z, \ldots)$ reducirt, einer willkührlichen Constante v gleich zu setzen.

Beispiel Die gegebenen Differenzialgleichungen seien:

$$dx = x\,dt, \quad dy = y\,dt, \quad dz = z\,dt, \ldots,$$

so hat man:

$$F_1 = x, \quad F_2 = y, \quad F_3 = z, \ldots$$

und die Gleichung (C) verwandelt sich in:

$$D_t s + x D_x s + y D_y s + z D_z s + \ldots = 0.$$

Die Werthe:

$$s = x e^{\tau - t}, \quad s = y e^{\tau - t}, \quad s = z e^{\tau - t}, \ldots$$

haben offenbar die doppelte Eigenschaft, daß sie der partiellen Differenzialgleichung genügen und sich für $t = \tau$ auf $x, y, z, \ldots$.

reduciren. Die allgemeinen Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen sind folglich:

$$\xi = xe^{\tau - t}, \quad \eta = ye^{\tau - t}, \quad \zeta = ze^{\tau - t}, \ldots$$

oder:

$$x = \xi e^{t - \tau}, \quad y = \eta e^{t - \tau}, \quad z = \zeta e^{t - \tau}, \ldots$$

und in diesen letzten Formeln können ξ, η, ζ, ... als durch die Integration eingeführte willkührliche Constanten betrachtet werden.

Allgemein, da man hat:

$$xD_x u + yD_y u + zD_z u + \ldots = u,$$

wo u eine beliebige homogene Function von x, y, z, ... des ersten Grades bezeichnet, so hat das Product $ue^{h(\tau - t)}$ die zweifache Eigenschaft: der Gleichung (C) zu genügen und sich für $t = \tau$ auf:

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

zu reduciren, und mithin ist der Ausdruck:

$$v = ue^{h(\tau - t)} \text{ oder } u = ve^{h(t - \tau)}$$

auch ein allgemeines Integral der gegebenen Differenzialgleichungen.

§. 283. Wir wollen der Kürze wegen setzen:

$$F_1 D_x s + F_2 D_y s + F_3 D_z s + \ldots = D_x s D_t x + D_y s D_t y + \ldots = F_D s$$

und uns des Zeichens $S_D s$ zur Andeutung des bestimmten Integrales $-\int_\tau^t F_D s\, dt$ bedienen, so daß wir haben:

$$S_D s = -\int_\tau^t (F_1 D_x s + F_2 D_y s + F_3 D_z s + \ldots) dt = -\int_\tau^t F_D s\, dt,$$

wo s übrigens eine beliebige Function von x, y, z, ..., t ist. Aus der Gleichung:

$$D_t U + F_1 D_x U + F_2 D_y U + F_3 D_z U + \ldots = 0$$

ergiebt sich, wenn man in Beziehung auf t von $t = \tau$ an integrirt:

$$U - u - S_D U = 0, \quad U = u + S_D U.$$

Wenn man in dem zweiten Theile dieser letzten Gleichung für die Function U ihren aus dieser Gleichung abgeleiteten Werth ein oder mehrere Male hintereinander substituirt und der Kürze wegen $S_D^2 U$, $S_D^3 U$, ... statt $S_D S_D U$, $S_D S_D S_D U$, ... setzt; so findet man:

$$U = u + S_D u + S_D^2 U = u + S_D u + S_D^2 u + S_D^2 u = ..$$

und allgemein:

$$U = u + S_D u + S_D^2 u + S_D^3 u + S_D^4 u + ... S_D^{n-1} u + S_D^n u,$$

wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Wenn in dieser letzten Gleichung das Glied $S_D^n U$ für zunehmende Werthe von n ohne Ende abnimmt, so ist die Reihe im zweiten Theile convergent und man hat:

$$U = u + S_D u + S_D^2 u + S_D^3 u + S_D^4 u + ...,$$

Die Formel $U = v$, welche ein beliebiges Integral der gegebenen Differenzialgleichungen ausdrücken kann, verwandelt sich folglich in:

$$u + S_D u + S_D^2 u + S_D^3 u + ... = v,$$

und da man, wenn S_D nicht mehr ein Operationszeichen, sondern eine wirkliche Größe bezeichnete, hätte:

$$1 + S_D + S_D^2 + S_D^3 + ... = \frac{1}{1 - S_D};$$

so kann das allgemeine Integral auf folgende symbolische Form gebracht werden:

$$\frac{u}{1 - S_D} = v.$$

Da überdies aus der Gleichung, welche den Werth von U durch eine convergente Reihe giebt, folgt:

$$S_D U = S_D (u + S_D u + S_D^2 u + S_D^3 u + ...)$$
$$= S_D u + S_D^2 u + S_D^3 u + ... = U - u,$$

so ist klar, daß der durch diese Gleichung gegebene Werth von U der Gleichung:

$$U - u - S_D U = 0$$

genügt, und folglich auch der Gleichung (C), insofern die Reihe convergent ist. Man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz 4. So lange die Reihe:

$$u, \quad S_D u, \quad S_D^2 u, \quad S_D^3 u, ...$$

convergent ist, kann die Formel:

$$(I_c) \qquad u + S_D u + S_D^2 u + S_D^3 u + ... = v \quad \text{oder} \quad \frac{u}{1 - S_D} = v$$

ein beliebiges der allgemeinen Integrale der Differenzialgleichungen (D) darstellen.

§. 284. Wenn die Functionen F_1, F_2, F_3, ... und folglich $F_D s$ die unabhängige Veränderliche t nicht explicite, sondern blos die davon abhängigen Veränderlichen x, y, z, ... enthalten, und man substituirt in die Gleichung:

$$S_D s = -\int_\tau^t F_D s\, dt$$

für s die Functionen u, welche die Veränderliche t auch nicht enthält; so ergiebt sich aus dieser Gleichung successive:

$$S_D u = -\int_\tau^t F_D u\, dt = -F_D u \int_\tau^t dt = (\tau - t) F_D u,$$

$$S_D^2 u = -\int_\tau^t (\tau - t) F_D^2 u\, dt = -F_D^2 u \int_\tau^t (\tau - t)\, dt$$

$$= \frac{(\tau - t)^2}{1.2} F_D^2 u$$

und allgemein:

$$S_D^n u = \frac{(\tau - t)^n}{1.2.3...n} F_D^n u.$$

Vermöge dieser letzten Gleichung verwandelt sich das allgemeine Integral (I_t) der Differenzialgleichungen (D) in:

$$u + \frac{\tau - t}{1} F_D u + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} F_D^2 u + ... = v,$$

und da, wenn $F_D u$ nicht mehr ein Operationszeichen, sondern eine wirkliche Größe wäre, man hätte:

$$1 + \frac{\tau - t}{1} F_D + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} F_D^2 + ... = e^{(\tau - t) F_D};$$

so kann dieses Integral auf folgende symbolische Form gebracht werden:

$$(I_t) \qquad e^{(\tau - t) F_D} u = v.$$

Man hat also folgenden Lehrsatz:

Lehrsatz 5. Wenn die Functionen F_1, F_2, F_3, ... die unabhängige Veränderliche t nicht explicite enthalten, so kann die Gleichung:

$$(I_t) \qquad u + \frac{\tau - t}{1} F_D u + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} F_D^2 u + ... = v,$$

oder:

$$e^{(\tau - t) F_D} u = v$$

ein beliebiges der allgemeinen Integrale der Gleichungen (D) darstellen, so lange die Reihe:

$$u, \frac{\tau-t}{1} F_D u, \frac{(\tau-t)^2}{1.2} F_D^2 u, \ldots$$

convergent ist.

Anmerkung. Wenn man aus den Formeln:

$$\frac{u}{1-S_D} = v, \quad e^{(\tau-t)F_D} u = v$$

die allgemeinen Integrale $\xi = f_1$, $\eta = f_2$, $\zeta = f_3$, ... der Differenzialgleichungen (D) ableiten will, wo ξ, η, ζ, ... die Werthe von x, y, z, ... bezeichnen, wenn die unabhängige Veränderliche einen neuen Werth τ bekommt; so braucht man in diesen Formeln nur successive zu setzen:

$$u = x, \; v = \xi, \; u = y, \ldots, \; v = \eta, \; u = z, \; v = \zeta, \ldots.$$

Die allgemeinen Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen werden also in allen Fällen durch die Formeln:

$$(I^{(x)}) \qquad \xi = \frac{x}{1-S_D}, \quad \eta = \frac{y}{1-S_D}, \quad \zeta = \frac{z}{1-S_D}, \ldots$$

ausgedrückt, und wenn F_1, F_2, F_3, ... die unabhängige Veränderliche t nicht explicirte enthalten, durch die Formeln:

$$(I_1^{(x)}) \begin{cases} \xi = e^{(\tau-t)F_D} x, \; \eta = e^{(\tau-t)F_D} y, \; \zeta = e^{(\tau-t)F_D} z, \ldots, \\ \text{oder:} \\ \xi = x + \frac{\tau-t}{1} F_D x + \frac{(\tau-t)^2}{1.2} F_D^2 x \ldots. \end{cases}$$

Wir wollen als erstes Beispiel wieder die Gleichungen:

$$dx = x dt, \quad dy = y dt, \quad dz = z dt$$

nehmen, so ist:

$$F_1 D_x u + F_2 D_y u + F_3 D_z u + \ldots = x D_x u + y D_y u + z D_z u = F_D u.$$

Wenn man ferner für u eine homogene Function des ersten Grades von x, y, z, ... nimmt, so hat man identisch:

$$x D_x u + y D_y u + z D_z u + \ldots = u, \quad F_D u = u$$

und man kann blos $F_D = 1$ setzen. Da überdies F_1, F_2, F_3, ... die unabhängige Veränderliche t nicht explicite enthalten, so sind die gesuchten allgemeinen Integrale:

$$\xi = x e^{\tau-t}, \quad \eta = y e^{\tau-t}, \quad \zeta = z e^{\tau-t}, \ldots.$$

§. 285. Wenn man in der Gleichung:

$$F_1 D_x s + F_2 D_y s + F_3 D_z s + \ldots = F_D s$$

u für s ſetzt, ſo kommt:

$$F_1 D_x u + F_2 D_y u + F_3 D_z u + \ldots = F_D u,$$

und wenn $F_1, F_2, F_3, \ldots$ die unabhängige Veränderliche t nicht explicite enthalten, k eine conſtante Größe bezeichnet und die Function u ſo gewählt wird, daß ſie der Gleichung:

$$F_1 D_x u + F_2 D_y u + F_3 D_z u + \ldots = ku$$

genügt; ſo hat man identiſch:

$$F_D u = ku$$

und die Formel:

$$e^{(\tau - t) F_D} u = v,$$

welche ſich auf:

$$v = u e^{k(\tau - t)}, \text{ oder } u = v e^{k(t - \tau)}$$

reducirt, kann ein allgemeines Integral der gegebenen Differenzialgleichungen ausdrücken.

Um von dieſen allgemeinen Formeln eine Anwendung zu geben, wollen wir die Differenzialgleichungen:

$$\begin{aligned} dx &= (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots)\, dt, \\ dy &= (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots)\, dt, \\ dz &= (a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots)\, dt \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

betrachten, wo $a_1, b_1, c_1, \ldots$; $a_2, b_2, c_2, \ldots$ conſtante Größen ſind; ſo muß man haben:

$$(a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots) \frac{du}{dx} + (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots) \frac{du}{dy} + \ldots = ku,$$

und dieſer Gleichung wird genügt, wenn man ſetzt:

$$u = \lambda x + \mu y + \nu z + \ldots,$$

wofern $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ conſtante Factoren bezeichnen, welche den Bedingungen:

$$\begin{aligned} a_1 \lambda + a_2 \mu + a_3 \nu + \ldots &= k\lambda, \\ b_1 \lambda + b_2 \mu + b_3 \nu + \ldots &= k\mu, \\ c_1 \lambda + c_2 \mu + c_3 \nu + \ldots &= k\nu, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

oder:

$$(a_1-k)\lambda + a_2\mu + a_3\nu + \ldots = 0,$$
$$b_1\lambda + (b_2-k)\mu + b_3\nu + \ldots = 0,$$
$$c_1\lambda + c_2\mu + (c_3-k)\nu + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

genügen, woraus sich durch Elimination von λ, μ, ν, ... die Gleichung:

$$(a_1-k)(b_2-k)(c_3-k)\ldots - a_2b_1(c_3-k)\ldots + \ldots = 0$$

ergiebt, welche nur die eine Unbekannte k enthält, und deren Grad der Anzahl n der Veränderlichen x, y, z, ... gleich ist. Die n Wurzeln dieser Gleichung geben für die Coefficienten $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, n Systeme von Werthen, und die allgemeinen Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen sind sämmtlich in der Formel:

$$u = ve^{k(t-\tau)}$$

oder:

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \ldots = (\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta + \ldots)\, e^{k(\tau-t)}$$

enthalten.

Wenn man für die eben integrirten Differenzialgleichungen folgenden substituirt:

$$dx = [a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + f_1(t)]\,dt,$$
$$dy = [a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + f_2(t)]\,dt,$$
$$dz = [a_3x + b_3y + c_3z + \ldots + f_3(t)]\,dt,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, ... beliebige Functionen der Veränderlichen t sind, und für u die durch die Formel:

$$u = \lambda x + \mu y + \nu z + \ldots$$

bestimmte Function wieder nimmt, wo die Constanten denselben Bedingungen wie weiter oben genügen müssen, und endlich der Kürze wegen setzt:

$$\lambda f_1(t) + \mu f_2(t) + \nu f_3(t) + \ldots = f(t);$$

so findet man:

$$\mathrm{F_D}u = ku + f(t),\quad \mathrm{S_D}u = -\int_\tau^t \mathrm{F_D}u\,dt = k(\tau-t)u - \int_\tau^t f(t)\,dt,$$

$$\mathrm{S_D^2}u = \frac{k^2(\tau-t)^2}{1.2}\,u - \int_\tau^t k(\tau-t)f(t)\,dt,$$

$$\mathrm{S_D^3}u = \frac{k^3(\tau-t)^3}{1.2.3}\,u - \int_\tau^t \frac{k^2(\tau-t)^2}{1.2}\,f(t)dt,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

und die Gleichung:

$$\frac{u}{1-S_D} = u + S_D u + S_D^2 u + S_D^3 u + \ldots = v$$

giebt:

$$v = u\left[1 + k(\tau - t) + \frac{k^2(\tau-t)^2}{1.2} + \ldots\right] - \int_\tau^t \left[1 + k(\tau - t) + \frac{k^2(\tau-t)^2}{1.2} + \ldots\right] f(t)dt,$$

oder was auf daſſelbe hinausläuft:

$$v = ue^{k(\tau-t)} - \int_\tau^t e^{k(\tau-t)} f(t)\,dt,$$

oder:

$$ue^{-kt} - ve^{-k\tau} = \int_\tau^t e^{-kt} f(t)\,dt,$$

oder endlich:

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \ldots = (\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta + \ldots)e^{k(\tau-t)} + e^{kt}\int_\tau^t e^{-kt}[\lambda f_1(t) + \mu f_2(t) + \ldots]\,dt.$$

Die verſchiedenen Gleichungen, welche in dieſer letzten Formel enthalten ſind, weil man der Conſtante k und folglich den Größen λ, μ, ν, ..., n verſchiedene Werthe beilegen kann, ſtellen das Syſtem der allgemeinen Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen dar. Wenn zwei, drei, ... Wurzeln der Gleichung mit k einander gleich werden, ſo ſtimmen die dieſen Wurzeln entſprechenden Gleichungen überein und man muß dafür eine derſelben nebſt der abgeleiteten Gleichung der erſten Ordnung, oder den beiden abgeleiteten Gleichungen der erſten und zweiten Ordnung, ..., welche man erhält, wenn man die beiden Theile der beibehaltenen Gleichung ein oder mehrere Male in Beziehung auf die Größe k differenzirt, ſubſtituiren.

Um von der Formel:

$$\frac{u}{1 - S_D} = v$$

noch eine Anwendung zu geben, wollen wir annehmen, daß ſich die Gleichungen (D) auf eine einzige reduciren, welche in Beziehung auf x vom erſten Grade und von der Form:

$$dx = [f(t) + xF(t)]\,dt$$

iſt, wo $f(t)$, $F(t)$ zwei beliebige Functionen von t ſind. Man hat alſo in dieſem Falle:

$$F_1 = f(t) + xF(t), \quad F_D u = [f(t) + xF(t)]\frac{du}{dx},$$

$$S_D u = -\int_\tau^t [f(t) + xF(t)]\frac{du}{dx}\,dt,$$

und folglich, wenn man $u = x$ setzt:

$$\xi = x\left[1 - \int_\tau^t F(t)dt + \int_\tau^t F(t)\int_\tau^t F(t)\,dt.dt - \ldots\right]$$
$$-\int_\tau^t f(t)\left[1 - \int_\tau^t F(t)dt + \int_\tau^t F(t)\int_\tau^t F(t)dt.dt - \ldots\right]dt.$$

Da ferner $F(t)$ die Ableitung von $\int_\tau^t F(t)\,dt$ ist, so hat man:

$$\int_\tau^t F(t)\int_\tau^t F(t)dt.dt = \frac{1}{1.2}\left[\int_\tau^t F(t)\,dt\right]^2,$$

$$\int_\tau^t F(t)\int_\tau^t F(t)\int_\tau^t F(t)dt.dt.dt = \frac{1}{1.2.3}\left[\int_\tau^t F(t)\,dt\right]^3,$$

. . . . . .

und folglich:

$$1 - \int_\tau^t F(t)dt + \int_\tau^t F(t)\int_\tau^t F(t)\,dt.dt - \ldots.$$
$$= 1 - \int_\tau^t F(t)dt + \frac{1}{2}\left[\int_\tau^t F(t)\,dt\right]^2 - \ldots = e^{-\int_\tau^t F(t)\,dt}.$$

Das allgemeine Integral wird also durch folgende Gleichung gegeben:

$$\xi = xe^{-\int_\tau^t F(t)dt} - \int_\tau^t f(t)e^{-\int_\tau^t F(t)dt}\,dt.$$

In den vorhin kurz durchgegangenen verschiedenen Beispielen giebt die Formel (I_t) für die gegebenen Differenzialgleichungen die bekannten Integrale, welche wir durch die verschiedenen frühern Methoden erhalten hatten.

§. 286. Es läßt sich leicht zeigen, daß die Formel:

$$e^{(\tau - t)F_D u} = v$$

auch dann noch ein allgemeines Integral der Differenzialgleichungen (D) ausdrückt, wenn u eine explicite oder entwickelte Function sämmtlicher Veränderlichen $x, y, z, \ldots, t$ ist, und folglich $F_D u$ nicht mehr vermittelst der Gleichung:

$$F_D u = F_1 D_x u + F_2 D_y u + F_3 D_z u + \ldots,$$

sondern vermittelst der Gleichung:

$$F_D u = D_t u + F_1 D_x u + F_2 D_y u + F_3 D_z u + \ldots$$

bestimmt wird, wofern jedoch die Reihe:

$$u, \frac{\tau - t}{1} F_D u, \frac{(\tau - t)^2}{1.2} F_D^2 u, \ldots$$

convergent bleibt und v den Werth von u bezeichnet, welcher den Werthen $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau$ der Veränderlichen $x, y, z, \ldots, t$ entspricht. Denn wenn man in dieser letzten Voraussetzung setzt:

$$U = u + \frac{\tau - t}{1} F_D u + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} F_D^2 u + \ldots,$$

so folgt, weil allgemein:

$$F_D \cdot \frac{(\tau - t)^n}{1.2.3 \ldots n} F_D^n u = \frac{(\tau - t)^n}{1.2.3 \ldots n} F_D^{n+1} u - \frac{(\tau - t)^{n-1}}{1.2.3 \ldots (n-1)} F_D^n u$$

ist, $F_D U = 0$ oder was auf dasselbe hinausläuft:

$$D_t U + F_1 D_x U + F_2 D_y U + F_3 D_z U + \ldots = 0.$$

In der gemachten Voraussetzung ist also $s = U$ ein particuläres Integral der Gleichung (C) und die Formel:

$$U = v, \text{ oder } u + \frac{\tau - t}{1} F_D u + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} F_D^2 u + \ldots = v,$$

oder:

$$e^{(\tau - t) F_D} u = v$$

ist ein allgemeines Integral der Gleichungen (D).

Uebrigens kann man in derselben Voraussetzung die Formel:

$$e^{(\tau - t) F_D} u = v,$$

vermittelst der Taylor'schen Reihe direct aus den Gleichungen (D) ableiten. Denn da u eine beliebige Function der unabhängigen Veränderlichen t und der abhängigen Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ ist, welche mit t durch die Gleichungen (D) verbunden sind; so hat man vermöge dieser Gleichungen und der Formel, welche die Function $F_m u$ bestimmt:

$$du = F_D u . dt, \quad d F_D u = F_D^2 u . dt, \quad d . F_D^2 u = F_D^3 u . dt, \ldots$$

und folglich:

$$du = F_D u . dt, \quad d^2 u = F_D^2 u . dt^2, \quad d^2 u = F_D^3 u . dt^3, \ldots .$$

Wenn erner v einen neuen Werth von u bezeichnet, welcher einem neuen Werthe τ der unabhängigen Veränderlichen t entspricht; so hat man nach der Taylor'schen Formel:

$$v = u + \frac{(\tau - t)}{dt} du + \frac{(\tau - t)^2}{1.2\, dt^2} d^2u + \frac{(\tau - t)^3}{1.2.3\, dt^3} d^3u + \ldots$$

und wenn man für du, d^2u, ... ihre vorhergehenden Werthe setzt:

$$v = u + \frac{(\tau - t)}{1} F_D u + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} F_D^2 u + \frac{(\tau - t)^3}{1.2.3} F_D^3 u + \ldots$$

$$= e^{(\tau - t) F_D} u.$$

Um die Richtigkeit dieser Formel an einem sehr einfachen Beispiele nachzuweisen, wollen wir annehmen, daß sich die Gleichungen (D) auf folgende reduciren:

$$dx = \frac{x}{t} dt, \; dy = \frac{y}{t} dt, \; dz = \frac{z}{t} dt, \ldots,$$

so ist:

$$F_D u = \frac{1}{t} (tD_t u + xD_x u + yD_y u + zD_z u + \ldots)$$

und folglich:

$$F_D u = \frac{u}{t},$$

wenn u eine homogene Function des ersten Grades von $x, y, z, \ldots$ t wird. Da aber alsdann $F_D u$ eine homogene Function des Grades Null ist, so hat man:

$$F_D^2 u = 0, \; F_D^3 u = 0, \; F_D^4 u = 0, \ldots$$

und das Integral wird durch die sehr einfache Gleichung:

$$v = u + \frac{\tau - t}{1} \frac{u}{t} = \frac{\tau}{t} u, \text{ oder } \frac{u}{v} = \frac{t}{\tau}$$

gegeben. Wenn man in dieser letzten Gleichung die Function u successive auf die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ reducirt, so muß man zugleich der willkührlichen Constante v einen der Werthe $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ beilegen, und man erhält auf diese Weise die allgemeinen Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen unter der Form:

$$\frac{x}{\xi} = \frac{t}{\tau}, \; \frac{y}{\eta} = \frac{t}{\tau}, \; \frac{z}{\zeta} = \frac{t}{\tau}, \ldots.$$

Zu denselben Werthen würde man direct gelangen, wenn man die beiden Theile jeder der Gleichungen:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t}, \; \frac{dy}{y} = \frac{dt}{t}, \; \frac{dz}{z} = \frac{dt}{t}, \ldots$$

integrirte.

§. 287. Man könnte die Formel:

$$(I_t) \qquad v = u + \frac{\tau - t}{1} F_D u + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} F_D^2 u + \ldots$$

auch noch verallgemeinern, wenn man für die unabhängige Veränderliche t und die Größe τ resp. eine gegebene Function r der Veränderlichen $x, y, z, \ldots, t$ und den $t = \tau$ entsprechenden Werth ρ von r setzte. Denn da r und u zwei beliebige Functionen von $x, y, z, \ldots, t$ sind, so müssen $x, y, z, \ldots t$, und folglich auch die Functionen r, u sich wegen der Gleichungen (D) gleichzeitig ändern, und wenn man mit ρ, v zwei correspondirende Werthe dieser Functionen bezeichnet; so ist v der Werth der Function u, wenn die Veränderliche r den Zuwachs $\rho - r$ bekommt. Nimmt man nun an, daß sich v durch die Taylor'sche Formel in eine nach den steigenden Potenzen dieses Zuwachses fortschreitende Reihe entwickeln läßt, so hat man, wenn:

$$\frac{du}{dr}, \quad \frac{d\frac{du}{dr}}{dr}, \ldots$$

die Verhältnisse zwischen den totalen Differenzialen der Functionen $r, u, \frac{du}{dr}, \ldots$ bezeichnen:

$$v = u + \frac{\rho - r}{1} \frac{du}{dr} + \frac{(\rho - r)^2}{1.2} \frac{d.\frac{du}{dr}}{dr} + \ldots.$$

Ferner ist identisch:

$$dr = D_t r dt + D_x r dx + D_y r dy + D_z r dz + \ldots,$$
$$du = D_t u dt + D_x u dx + D_y u dy + D_z u dz + \ldots$$

und wegen der Gleichungen (D):

$$\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} = \frac{dz}{F_3} \ldots = dt = \frac{dr}{D_t r + F_1 D_x r + F_2 D_y r + F_3 D_z r + \ldots}$$
$$= \frac{du}{D_t u + F_1 D_x u + F_2 D_y u + F_3 D u + \ldots},$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{D_t u + F_1 D_x u + F_2 D_y u + F_3 D_z u + \ldots}{D_t r + F_1 D_x r + F_2 D_y r + F_3 D_z r + \ldots},$$

folglich, wenn man der Kürze wegen setzt:

$$F_D u = \frac{D_t u + F_1 D_x u + F_2 D_y u + F_3 D_z u + \ldots}{D_t r + F_1 D_x r + F_2 D_y r + F_3 D_z r + \ldots};$$

so hat man ganz einfach:

$$\frac{du}{dr} = F_D u,$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{d\frac{du}{dr}}{dr} = \frac{dF_D u}{dr} = F_D^2 u, \ldots.$$

und folglich:

$$v = u + \frac{\rho - r}{1} F_D u + \frac{(\rho - r)^2}{1.2} F_D^2 u + \ldots$$

oder:

$$v = e^{(\rho - r) F_D} u.$$

Wir wollen noch bemerken, daß diese letzten Formeln ein allgemeines Integral der gegebenen Differenzialgleichungen ausdrücken, wenn die Reihe:

$$u, \frac{\rho - r}{1} F_D u, \frac{(\rho - r)^2}{1.2} F_D^2 u, \ldots$$

convergent ist. Denn wenn man der Kürze wegen setzt:

$$U = u + \frac{(\rho - r)^2}{1} F_D u + \frac{(\rho - r)^2}{1.2} F_D^2 u + \ldots,$$

so erhält man, da vermöge der Gleichung, welche $F_D u$ durch r und u giebt, $F_D r = 1$, und folglich:

$$F_D \cdot \frac{(\rho - r)^n}{1.2.3 \ldots n} F_D^n u = \frac{(\rho - r)^n}{1.2.3 \ldots n} F_D^{n+1} u - \frac{(\rho - r)^{n-1}}{1.2.3 \ldots (n-1)} F_D^n u$$

ist, $F_D U = 0$, und mithin:

$$D_t U + F_1 D_x U + F_2 D\text{-}U + F_3 D_z U + \ldots = 0.$$

Folglich ist $s = U$ ein particuläres Integral der Gleichung (C) und der Werth:

$$v = u + \frac{\rho - r}{1} F_D u = \frac{(\rho - r)^2}{1.2} F_D^2 u + \ldots$$

ist ein allgemeines Integral der Gleichungen (D).

§. 288. Wenn u blos eine Function der Veränderlichen x, y, z, ... ist und $F'_D u$, $F''_D u$, $F'''_D u$, ... die Werthe von $F_D u$ bezeichnen, wenn in den als Functionen von x, y, z, ..., t betrachteten Größen F_1, F_2, F_3, ... für die Veränderliche t neue Werthe t', t'', t''', ... gesetzt werden; so hat man offenbar:

$$S_{D_u} = -\int_\tau^t F_D u\,dt = -\int_\tau^{t=t'} F'_D u\,dt' = -\int_\tau^{t=t'=t''} F''_D u\,dt',$$

$$S_D^2 u = \int_\tau^t F'_D \int_\tau^{t'} F''_D u\,dt'\,dt = \int_\tau^t \int_\tau^{t'} F_D F''_D u\,dt'\,dt,$$

$$S_D^3 u = -\int_\tau^t F'_D \int_\tau^{t'} F''_D \int_\tau^{t''} F'''_D u\,dt''\,dt'\,dt$$

$$= -\int_\tau^t \int_\tau^{t'} \int_\tau^{t''} F'_D F''_D F'''_D u\,dt''\,dt'\,dt,$$

. . . . . .

und folglich verwandelt sich das allgemeine Integral der Gleichungen (D) in:

$$(I') \quad \begin{cases} v = u - \int_\tau^t F_D u\,dt' + \int_\tau^t \int_\tau^{t'} F'_D F''_D u\,dt''\,dt'. \\ \qquad - \int_\tau^t \int_\tau^{t'} \int_\tau^{t''} F_D F''_D F'''_D u\,dt''\,dt'\,dt + \ldots. \end{cases}$$

Wenn die Functionen $F_1, F_2, F_3, \ldots$ die Veränderliche t nicht explicite enthalten, so hat man:

$$F_D u = F'_D u = F''_D u = \ldots, \quad F'_D F''_D u = F_D^2 u, \ldots,$$

ferner:

$$-\int_\tau^t dt = \frac{\tau - t}{1},$$

$$\int_\tau^t \int_\tau^{t'} dt''\,dt' = \frac{(\tau-t)^2}{1.2}, \quad -\int_\tau^t \int_\tau^{t'} \int_\tau^{t''} dt''\,dt''\,dt' = \frac{(\tau-t)^3}{1.2.3}$$

und die Formel (I') geht in die Formel (I_1) über, wie es der Fall sein muß.

Wenn man blos zwei Veränderliche x, t betrachtet, in welchem Falle sich die Gleichung:

$$D_t s + F_1 D_x s + F_2 D_y s + F_3 D_z s + \ldots = 0$$

auf:

$$D_t U + F_1 D_x U = 0$$

reducirt, wenn man darin $s = U$ setzt; so reducirt sich das Totaldifferenzial der Function U, nämlich:

$$dU = D_t U dt + D_x U dx,$$

wenn man darin für $D_t U$ seinen Werth $-F_1 D_x U$ setzt, auf ein Product von der Form:

$$V(dx - F_1\,dt),$$

wo $V = D_x U$ ist. Wenn also die Function U durch eine der Gleichungen:

$$U = u + S_D u + S_D^2 u + S_D^3 u + \ldots,$$
$$U = u + \frac{\rho - r}{1} F_D u + \frac{(\rho - r)^2}{1.2} F_D^2 u + \ldots$$

bestimmt wird, so kann der Factor $V = D_x U$ den ersten Theil einer Differenzialgleichung zwischen x und t von der Form $dx - F_1 dt = 0$ integrabel machen. Denn differenzirt man die Gleichung:

$$D_t U + F_1 D_x U = 0$$

in Beziehung auf x, so erhält man die Gleichung:

$$D_t V = D_x(-F_1 V),$$

welche die Integrabilität des Productes $V(dx - F_1 dt)$ ausdrückt, und welche man als eine partielle Differenzialgleichung betrachten kann, wodurch der Factor V als Function von x und t bestimmt wird.

Wenn man statt der gegebenen Gleichungen (D), welche von der ersten Ordnung sind, eine oder mehrere Differenzialgleichungen von einer höhern Ordnung betrachtete; so brauchte man, um sie auf Differenzialgleichungen der ersten Ordnung zurückzuführen, nur einige der Formeln:

$$D_t x = x', \; D_t x' = x'', \ldots, \; D_t y = y', \; D_t y' = y'', \ldots,$$

d. h. neue Differenzialgleichungen zu ihnen hinzuzufügen, welche selbst von der ersten Ordnung sind, wenn man nicht blos x, y, z, ..., sondern auch einige der Ableitungen x', x'', ..., y', y'', ..., z', z'', ... als Unbekannte betrachtet.

Vermittelst dieses Kunstgriffes ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \ldots$$
$$= (\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta + \ldots) e^{k(t-\tau)} + e^{kt} \int_\tau^t e^{-kt} [\lambda f_1(t) + \mu f_2(t) + \ldots]$$

leicht das Integral einer linearen Differenzialgleichung mit constanten Coefficienten und mit einem zweiten veränderlichen Theile, d. h. einer Differenzialgleichung von der Form:

$$D_t^n x + A_1 D_t^{n-1} x + A_2 D_t^{n-2} x + \ldots + A_{n-1} D_t x + A_n x = T$$

unter endlicher Form.

Ein und vierzigste Vorlesung.

Bestimmung der Grenzen, zwischen welchen die Reihen, welche die allgemeinen Integrale eines Systemes von Differenzialgleichungen ausdrücken, convergent bleiben, und der Fehler, welche man begeht, wenn man von jeder Reihe nur die n ersten Glieder beibehält.

---

§. 289. Wir haben nun noch zu zeigen, wie man sich im Allgemeinen versichern kann, daß die in der vorhergehenden Vorlesung erhaltenen Reihen convergent sind, wenigstens für hinreichend kleine Werthe der Differenz $t-\tau$ oder $\tau-t$, und wie man alsdann die obern Grenzen der Fehler bestimmen kann, welche man begeht, wenn man von jeder Reihe blos die n ersten Glieder beibehält. Wir können diesen doppelten Zweck leicht durch einige neue Verfahrungsarten erreichen, deren Inbegriff Cauchy die Grenzrechnung genannt hat.

Es sei r eine positive Größe, ϑ ein reeller Bogen und $f(x)$ eine beliebige Function der reellen, oder imaginären Veränderlichen x; so hat man offenbar:

$$D_r f(x+re^{\vartheta\sqrt{-1}}) = \frac{1}{r\sqrt{-1}} D_\vartheta f(x+re^{\vartheta\sqrt{-1}}).$$

Wenn man nun die beiden Theile dieser Gleichung in Beziehung auf r von $r=0$ an und in Beziehung auf ϑ zwischen den Grenzen $\vartheta=-\pi$, $\vartheta=+\pi$ integrirt, und annimmt, daß die durch $f(x+re^{\vartheta\sqrt{-1}})$ ausgedrückte Function von x, r, ϑ endlich und stetig bleibt, was für einen Werth ϑ für den r beigelegten Werth, und für einen kleinern Werth, auch haben mag; so findet man:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0}^{r} D_r f(x+re^{\vartheta\sqrt{-1}})\,dr\,d\vartheta = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+re^{\vartheta\sqrt{-1}})\,d\vartheta = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,d\vartheta = 2\pi f(x)$$

und hieraus ergiebt sich:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+re^{\vartheta\sqrt{-1}})\,d\vartheta.$$

Wenn man diese Gleichung n mal hintereinander in Beziehung auf x differenzirt, so erhält man:

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^{(n)}(x+re^{\vartheta\sqrt{-1}})\,d\vartheta,$$

und wenn man alsdann den zweiten Theil dieser letzten Gleichung n mal hintereinander theilweise integrirt, so hat man:

$$f^{(n)}(x)=\frac{1.2.3...n}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} r^{-n}e^{-n\vartheta\sqrt{-1}}f(x+re^{\vartheta\sqrt{-1}})\,d\vartheta.$$

Der Ausdruck $re^{\vartheta\sqrt{-1}}$ kann als ein der Veränderlichen x beigelegtes imaginäres Increment betrachtet werden, welches wir mit h_i bezeichnen wollen, so daß $re^{\vartheta\sqrt{-1}}=h_i$ ist, und $Lf(x+h_i)$ oder L_f sei der größte Werth, welchen der Modulus der imaginären Function $f(x+h_i)$ annimmt, wenn man in dem Werthe von $h_i=re^{\vartheta\sqrt{-1}}$ den Winkel ϑ variiren läßt, ohne daß sich der Modulus r ändert; so ist der Modulus des Ausdruckes:

$$r^{-n}e^{-n\vartheta\sqrt{-1}}f(x+re^{\vartheta\sqrt{-1}})$$

kleiner, als das Product $r^{-n}L_f$, oder höchstens demselben gleich, und der Zahlenwerth des Integrales:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} r^{-n}e^{-n\vartheta\sqrt{-1}}f(x+re^{\vartheta\sqrt{-1}})\,d\vartheta$$

überschreitet den Werth des Ausdruckes $2\pi r^{-n}L_f$ nicht, so daß man hat, wenn M den Modulus oder den Zahlenwerth eines beliebigen imaginären, oder reellen Ausdruckes bezeichnet:

$$M.f^{(n)}(x)<1.2.3...n\,r^{-n}L_f.$$

Da ferner allgemein ist:

$$1.2.3...n\,r^{-n}=(-1)^n r\mathrm{D}_r^n.r^{-1},$$

so hat man auch:

$$M.f^{(n)}(x)<(-1)^n r\mathrm{D}_r^n.r^{-1}L_f.$$

Diese Ungleichheit findet auch noch für $n=0$ statt, und man hat $M.f(x)<L_f$, wie man auch direct aus der Gleichung:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h_i)\,d\vartheta$$

hätte schließen können. Die vorhergehenden Gleichungen setzen, wie bereits ausdrücklich bemerkt worden, voraus, daß die Function:

$$f(x+k_i)=f(x+re^{\vartheta\sqrt{-1}})$$

endlich und ſtetig bleibt, was für einen Werth ϑ bei dem der Größe r beigelegten Werthe auch haben mag.

§. 290. Kommen wir nun wieder auf die Integration der Differenzialgleichungen zurück und nehmen zunächſt an, daß es ſich darum handle, das allgemeine Integral einer einzigen Differenzialgleichung $dx=F_1dt$, worin $F_1=X=\varphi(x)$ eine Function der einen Veränderlichen x iſt, durch eine Reihe auszudrücken. Wenn man mit $u=f(x)$ eine neue Function von x bezeichnet, ſo wird das geſuchte Integral, wie wir geſehen haben, durch die Gleichung:

$$(I_1)\qquad f(\xi)=v=f(x)+(\tau-t)F_Df(x)+\frac{(\tau-t)^2}{1.2}F_D^2f(x)+\frac{(\tau-t)^3}{1.2.3}F_D^3f(x)+\ldots$$

gegeben, worin:

$$F_Df(x)=F_1D_xf(x)=\varphi(x)D_xf(x)$$

oder:

$$F_Df(x)=\varphi(x)f'(x)$$

iſt, und man hat folglich:

$$F_Df(x)=\varphi(x)f'(x),$$
$$F_D^2f(x)=[\varphi(x)]^2f''(x)+\varphi(x)\varphi'(x)f'(x),$$
$$F_D^3f(x)=[\varphi(x)]^3f'''(x)+3[\varphi(x)]^2\varphi'(x)f''(x),$$
$$+[\varphi(x)]^2\varphi''(x)+\varphi(x)[\varphi'(x)]^2f'(x).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Aus dieſen Gleichungen ergiebt ſich nach dem Vorhergehenden:

$$M.F_Df(x)<R_1.rL_\varphi.rL_f,$$
$$M.F_D^2f(x)<R_2(rL_\varphi)^2.rL_f,$$
$$M.F_D^3f(x)<R_3(rL_\varphi)^3.rL_f,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo R_1, R_2, R_3,.... Functionen von r ſind, welche durch die Gleichungen:

$$-R_1=r^{-1}D_rr^{-1},$$
$$R_2=(r^{-1})^2D_r^2r^{-1}+r^{-1}(D_rr^{-1})D_rr^{-1},$$
$$-R_3=(r^{-1})^3D_r^3r^{-1}+3(r^{-1})^2D_rr^{-1}D_r^2r^{-1}$$
$$+(r^{-1})^2D_r^2r^{-1}+r^{-1}(D_rr^{-1})^2D_rr^{-1}$$

beſtimmt werden, und der Werth von r ſo beſchaffen ſein muß

daß jede der beiden Functionen $f(x+h_i)$, $\varphi(x+h_i)$ für denselben Werth von r und für einen kleinern Werth endlich und stetig bleibt. Uebrigens sind die Größen $-R_1$, R_2, $-R_3$, ... offenbar die Werthe von $F_D f(x)$, $F_D^2 f(x)$, $F_D^3 f(x)$, ... wenn man, nachdem:

$$\varphi(x) = f(x) = x^{-1}$$

gesetzt ist, den Modulus r für die Veränderliche x setzt; denn der Coefficient des Productes rL_f im zweiten Theile der Ungleichheit:

$$M.f^{(n)}(x) < (-1)^n D_r^n r^{-1} rL_f$$

ist, abgesehen vom Zeichen, nichts anders, als der Werth von $f^{(n)}(x)$, wenn man $f(x) = x^{-1}$ setzt und r für x substituirt. Es ist allgemein:

$$M.F_D^n f(x) < R_n (rL_\varphi)^n rL_f,$$

wo $(-1)^n R_n$ der Werth von $F_D^n f(x)$ ist, welcher den Werthen von $\varphi(x)$, $f(x)$ entspricht, die durch die Gleichung $\varphi(x) = f(x) = x^{-1}$ gegeben werden, wenn man darin r für x setzt. Aus der Gleichung:

$$F_D f(x) = \varphi(x) D_x f(x)$$

ergeben sich aber in Verbindung mit der Bedingungsgleichung $\varphi(x) = f(x) = x^{-1}$ die Werthe:

$$F_D f(x) = x^{-1} D_x x^{-1} = -x^{-3},$$
$$F_D^2 f(x) = x^{-1} D_x - x^{-3} = 3x^{-5},$$
$$F_D^3 f(x) = x^{-1} D_x 3x^{-5} = -3.5x^{-7},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_D^n f(x) = (-1)^n 1.3.5...(2n-1)x^{-(2n+1)}.$$

Man hat folglich:

$$R_n = 1.3.5...(2n-1)\, r^{-(2n+1)},$$

und mithin:

$$M.F_D^n f(x) < 1.3.5...(2n-1)\, r^{-n} (L_\varphi)^n L_f.$$

Da endlich offenbar:

$$L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i} = \frac{L\varphi(x+h_i)}{r}$$

ist, so hat man auch:

$$M.F_D^n f(x) < 1.3.5...(2n-1)\left[L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}\right]^n L_f.$$

Demnach hat das allgemeine Glied der Reihe, welche das gesuchte Integral ausdrückt, nämlich:

$$\frac{(\tau-t)^n}{1.2.3...n} F_D^n f(x)$$

offenbar einen Zahlenwerth, welcher kleiner ist, als der des Productes:

$$\frac{1.3.5...(2n-1)}{1.2.3...n}\left[(\tau-t)\, L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}\right]^n L_f,$$

und folglich kleiner, als der des Productes:

$$\left[2(\tau-t)L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}\right]^n L_f,$$

weil offenbar:

$$\frac{1.3.5...(2n-1)}{1.2.3...n} < \frac{2.4.6...2n}{1.2.3...n} = 2^n$$

ist. Folglich haben die verschiedenen Glieder der in Rede stehenden Reihe kleinere Zahlenwerthe, als die correspondirenden Glieder der geometrischen Progression, deren allgemeines Glied durch:

$$\left[2(\tau-t)L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}\right]^n L_f$$

ausgedrückt wird. Diese Progression ist aber covergent, wenn man hat:

$$M.\left[2(\tau-t)L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}\right] < 1,$$

oder:

$$M.(\tau-t) < \frac{1}{2}\,\frac{1}{L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}},$$

und wenn man alsdann die Summe der n ersten Glieder der Reihe für die Summe der ganzen Reihe nimmt; so ist der Rest oder der begangene Fehler, abgesehen vom Zeichen, kleiner als:

$$(E_1) \qquad \frac{\left[M.2(\tau-t)L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}\right]^n}{1-M.2(\tau-t)L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}} L_f.$$

Setzt man z. B. $f(x)=x$, so wird das gesuchte Integral:

$$\xi = x+(\tau-t)F_D x+\frac{(\tau-t)^2}{1.2}F_D^2 x+\frac{(\tau-t)^3}{1.2.3}F_D^3 x+...$$

und der Rest der Reihe im zweiten Theile dieser letzten Gleichung ist, abgesehen vom Zeichen, kleiner als:

$$[\mathrm{E}_1^{(x)}] \qquad \frac{\left[M.2(\tau-t)L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}\right]^n}{1-M.2(\tau-t)L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}}\,L(x+h).$$

Man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen:

§. 291. **Lehrsatz 1.** Wenn die Veränderliche t und die Function x derselben durch die Differenzialgleichung $dx=\varphi(x)\,dt$ mit einander verbunden sind und ξ bezeichnet einen neuen Werth der Function x, welcher einem neuen Werthe τ der Veränderlichen t entspricht; so läßt sich ξ nach der Formel:

$$[\mathrm{I}^{(x)}] \quad \xi=x+(\tau-t)\mathrm{F_D}x+\frac{(\tau-t)^2}{1.2}\mathrm{F_D^2}x+\frac{(\tau-t)^3}{1.2.3}\mathrm{F_D^3}x+\ldots$$

in eine nach den steigenden Potenzen der Differenz $\tau-t$ fortschreitende convergente Reihe entwickeln, wenn man hat:

$$[\mathrm{E}_1^{(x)}] \qquad M.(\tau-t)<\tfrac{1}{2}\,\frac{1}{L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}},$$

wo der Werth des Modulus r von $h_i=re^{\vartheta\sqrt{-1}}$ blos der Bedingung genügen muß, daß die Function $\varphi(x+h_i)$ endlich und stetig bleibt, was auch der Winkel ϑ für diesen Werth und für einen kleinern Werth sein mag, und der Rest der Reihe, wenn man blos ihre n ersten Glieder nimmt, ist, abgesehen vom Zeichen, kleiner als das Product $[\mathrm{E}_1^{(x)}]$.

Alsdann läßt sich auch eine beliebige Function $f(\xi)$ von ξ in eine nach den steigenden Potenzen von $\tau-t$ fortschreitende convergente Reihe entwickeln, und der Rest dieser Reihe ist, abgesehen vom Zeichen, kleiner als das Product (E_1), wenn der Werth des Modulus r der Bedingung genügt, daß die beiden Functionen $f(x+h_i)$, $\varphi(x+h_i)$ endlich und stetig bleiben, was für einen Werth der Winkel ϑ für diesen Werth von r und für einen kleinern Werth auch haben mag. Es ist übrigens vortheilhaft, den Modulus r von h_i so anzunehmen, daß die Grenze für den Modulus von $\tau-t$ möglichst klein werde, zu welchem Zwecke man nur den kleinsten Werth der Größe $L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}$ zu nehmen braucht.

Um die vorhergehenden Formeln auf ein einfaches Beispiel anzuwenden, wollen wir annehmen, daß sich die Differenzialglei-

chung $dx = \varphi(x)dt$ auf $dx = x^a dt$ reducirt, wo a eine positive Constante bezeichnet. Wenn x als positiv angenommen wird, damit $\varphi(x) = x^a$ immer reell bleibt, so ist der Ausdruck:

$$\varphi(x+h_i) = (x + re^{\vartheta\sqrt{-1}})^a$$

für gebrochene, oder irrationale Werthe des Exponenten a nur dann stetig, wenn $r < x$ ist, und alsdann hat man:

$$L(x+h_i) = x+r,\ L(x+h_i)^a = (x+r)^a,\ L\frac{(x+h_i)^a}{h_i} = \frac{(x+r)^a}{r}.$$

Den kleinsten Werth dieser letzten Größe unter der Bedingung $r < x$ erhält man: 1) wenn man $a < 2$ setzt, für $r = x$, nämlich $x^a x^{a-1}$, und 2) wenn $a > 2$ ist, für:

$$D_r \frac{(x+r)^a}{r} = 0, \text{ oder } r = \frac{x}{a-1},$$

nämlich:

$$\frac{a^a}{(a-1)^{a-1}} x^{a-1}.$$

Da nun ξ und t nach dem ersten Lehrsatze zwei correspondirende Werthe von x und t bezeichnen, welche der Gleichung $dx = x^a dt$ genügen, so läßt sich ξ in eine nach den steigenden Potenzen der Differenz $\tau - t$ fortschreitende convergente Reihe entwickeln, wenn der Zahlenwerth dieser Differenz kleiner, als die Hälfte des Verhältnisses $\frac{1}{2ax^{a-1}}$ ist für $a < 2$ und kleiner, als die Hälfte des Verhältnisses $\frac{(a-1)^{a-1}}{a^a x^{a-1}}$ für $a > 2$. In der That ergiebt sich aus der Differenzialgleichung $dx = x^a dt$, wenn sie direct integrirt wird:

$$\frac{\xi^{a-1} - x^{a-1}}{1-a} = \tau - t,\ \xi = x[1-(a-1)x^{a-1}(\tau - t)]^{\frac{1}{1-a}},$$

und die Potenz:

$$[1-(a-1)x^{a-1}(\tau - t)]^{\frac{1}{1-a}}$$

läßt sich in eine nach den steigenden Potenzen der Differenz $\tau - t$ fortschreitende convergente Reihe entwickeln, wenn der Zahlenwerth dieser Differenz kleiner ist, als der des Verhältnisses $\frac{1}{(a-1)x^{a-1}}$. Ferner ist einleuchtend, daß dieses letzte Verhältniß, abgesehen vom Zeichen, immer größer ist, als das Verhältniß $\frac{1}{2ax^{a-1}}$ und um so mehr größer, als seine Hälfte, wenn $a < 2$ ist, und auch größer, als das Verhältniß $\frac{(a-1)^{a-1}}{a^a x^{a-1}}$, und folglich größer, als die

Hälfte deſſelben, wenn man $a>2$ ſetzt. Denn in der erſten Vorausſetzung hat man:

$$M.\frac{1}{a-1}>1>\frac{1}{2^a}$$

und in der zweiten:

$$a^a>(1-a)^a, \frac{1}{a-1}>\frac{(1-a)^{a-1}}{a^a}.$$

Der erſte Lehrſatz verificirt ſich alſo für die Differenzialgleichung $dx=x^a dt$, und aus dem eben Geſagten folgt ſogar, daß man für eine Differenzialgleichung von dieſer Form noch eine obere Grenze des Zahlenwerthes der Differenz $\tau-t$ erhält, wenn man für die Formel:

$$M.(\tau-t)=\tfrac{1}{2}\frac{1}{L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}}$$

folgende:

$$M.(\tau-t)=\frac{1}{L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}}$$

ſubſtituirt. Dieſe Bemerkung iſt auch auf die Differenzialgleichungen:

$$dx=x^{-a}dt,\quad dx=e^{ax}dt,\quad dx=e^{-ax}dt,\ldots$$

anwendbar, deren Integrale ſich leicht direct berechnen laſſen.

§. 292. Wir wollen nun annehmen, daß F_1 im zweiten Theile der Differenzialgleichung $dx=F_1 dt$ zugleich eine Function von x und t iſt, ſo daß man $F_1=f(x,t)$ hat; ſo wird das Integral durch die Formel:

$$(I_f)\begin{cases} f(\xi)=f(x)-\int_\tau^t F'_D f(x)dt+\int_\tau^t\int_\tau^{t'} F'_D F''_D f(x)\,dt''dt' \\ \qquad -\int_\tau^t\int_\tau^{t'}\int_\tau^{t''} F'_D F''_D F'''_D f(x)\,dt''dt''dt'+\ldots \end{cases}$$

ausgedrückt, worin:

$$F'_D f(x)=f(x,t')f'(x),\quad F''_D f(x)=f(x,t'')f'(x),$$
$$F'''_D f(x)=f(x,t''')f'(x),\ldots,$$

und folglich:

$$F'_D F''_D f(x)=f(x,t')f(x,t'')f''(x)+f(x,t')D_x f(x,t'').f'(x),$$
$$F'_D F''_D f(x)=f(x,t')f(x,t'')f''(x)+f(x,t')D_x f(x,t'').f'(x),$$

$$F_D F'_D F''_D f(x) = f(x,t)\,f(x,t')\,f(x,t'')\,f'''(x)$$
$$+ f(x,t')\,[2f(x,t')\,D_x f(x,t'') + D_x f(x,t')\,f(x,t'')]\,f''(x)$$
$$+ f(x,t)\,[f(x,t')\,D_x^2 f(x,t''') + D_x f(x,t'')\,D_x f(x,t''')]\,f'(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ist. Da ferner die Veränderlichen t', t'', t''', ... in den bestimmten Integralen resp. zwischen den Grenzen τ und t, τ und t', τ und t'', ... liegen müssen, so ist klar, daß diese Veränderlichen immer zwischen den Grenzen τ und t liegen, woraus folgt, daß jede derselben durch einen Ausdruck von der Form $t+\varepsilon(\tau-t)$ dargestellt werden kann, indem ε eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl bezeichnet. Wenn man nun durch L_t wieder den größten Werth bezeichnet, welchen der Modulus der imaginären Function:

$$f[x+h_i, t+\varepsilon(\tau-t)]$$

annehmen kann, wenn man in h_i den Winkel ϑ variiren läßt, ohne den Werth von r und den von ε zu ändern, ferner ε_m den Werth von ε bezeichnet, für welchen der Modulus L_t am größten wird und n eine beliebige ganze Zahl ist; so ergiebt sich aus der Ungleichheit:

$$M.f^{(n)}(x) < (-1)^n L_\tau^n (\tau^{-1})\,\tau L_t$$

successive:

$$M.D_x^n f(x,t') < (-1)^n D_\tau^n (\tau^{-1})\,\tau L_t,$$
$$M.D_x^n f(x,t'') < (-1)^n D_\tau^n (\tau^{-1})\,\tau L_t,$$
$$M.D_x^n f(x,t''') < (-1)^n D_\tau^n (\tau^{-1})\,\tau L_t$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und aus diesen letzten Ungleichheiten ergiebt sich, wenn $L_t^{\varepsilon_m}$ den größten der größten Moduli und R_1, R_2, R_3, ... dieselben Functionen von r wie oben bezeichnen:

$$M.F'_D f(x) < R_1 . r L_t^{\varepsilon_m} . \tau L_t,$$
$$M.F'_D F''_D f(x) < R_2 . r L^{\varepsilon_m} . \tau L_t,$$
$$M.F_D F''_D F'''_D f(x) < R_3 . r L_t^{\varepsilon_m} . \tau L_t.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Coefficienten R_1, R_2, R_3, ... müssen nothwendig dieselben Werthe behalten, wie vorhin; denn wenn man die Function $f(x,t)$ auf $f(x)$ reducirt, so müssen die verschiedenen vorhergehenden Formeln mit den bereits früher erhaltenen übereinstimmen, was in der That der Fall ist, wenn die Werthe von R_1, R_2, R_3, ... in den beiden Formelsystemen dieselben sind. Da der allgemeine Werth von R_n derselbe bleibt so hat man für einen beliebigen Werth von n:

$$M.F'_D F''_D F'''_D \ldots F^{(n)}_D f(x) < 1.3.5\ldots(2n-1) r^{-n} \left(L \varepsilon_m \frac{f}{h_i}\right)^n L_f,$$

oder was daſſelbe iſt:

$$M.F'_D F''_D F'''_D \ldots F^n_D f(x)$$
$$< 1.3.5\ldots(2n-1) \left\{L \frac{f[x+h_i,\ t+\varepsilon_m(\tau-t)]}{h_i}\right\}^n L_f.$$

Das allgemeine Glied der Reihe, welche das geſuchte Integral ausdrückt, hat alſo einen kleinern Zahlenwerth, als das Product:

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} \left\{(\tau-t) L. \frac{f[x+h_i,\ t+\varepsilon_m(\tau-t)]}{h_i}\right\}^n L_f,$$

und um ſo mehr, als das Product:

$$\left\{2(\tau-t) L \frac{f[x+h_i,\ t+\varepsilon_m(\tau-t)]}{h_i}\right\}^n L_f.$$

Die in Rede ſtehende Reihe iſt alſo endlich convergent, wenn man hat:

$$(C'_t) \quad M. \left\{2(\tau-t) L \frac{f[x+h_i,\ t+\varepsilon_m(\tau-t)]}{h_i}\right\} < 1,$$

und der Reſt der auf ihre n erſten Glieder reducirten Reihe hat alsdann einen kleinern Zahlenwerth, als das Product:

$$(E'_t) \quad \frac{\left\{M. \left\{2(\tau-t) L \frac{f[x+h_i,\ t+\varepsilon_m(\tau-t)]}{h_i}\right\}\right\}^n}{1 - M. \left\{2(\tau-t) L \frac{f[x+h_i,\ t+\varepsilon_m(\tau-t)]}{h_i}\right\}} L_f.$$

Es iſt wohl zu bemerken, daß der Modulus r von h_i ſo beſchaffen ſein muß, daß jede der Functionen:

$$f[x+h_i,\ t+\varepsilon(\tau-t)],\quad f(x+h_i)$$

endlich und ſtetig bleibt, welchen Werth der Winkel ϑ für den dieſem Modulus beigelegten Werth und für einen kleinern Werth auch haben mag. Es iſt übrigens vortheilhaft, dieſen Modulus ſo zu wählen, daß die durch die Formel (C'_1) für den Zahlenwerth von $\tau - t$ gegebene Grenze ſo groß als möglich wird. Setzt man z. B. $f(x)=x$, ſo wird das Integral:

$$[I'_t{}^{(x)}] \quad \begin{cases} \xi = x - \int_\tau^t F'_D\, x.dt' + \int_\tau^t \int_\tau^{t'} F'_D F''_D\, x dt'' dt' \\ \qquad - \int_\tau^t \int_\tau^{t'} \int_\tau^{t''} F'_D F''_D F'''_D\, x dt''' dt'' dt' + \ldots, \end{cases}$$

und der Rest der Reihe im zweiten Theile dieser Gleichung ist, abgesehen vom Zeichen, kleiner als:

$$[E^{(x)}] \quad \frac{\left[M.\left|2(\tau-t)L\frac{f[x+h_i,\ t+\varepsilon_m(\tau-t)]}{h_i}\right|\right]^x}{1-M.\left|2(\tau-t)L\frac{f[x+h_i,\ t+\varepsilon_m(\tau-t)]}{h_i}\right|} L(x+h_i).$$

Man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen:

§. 293. **Lehrsatz 2.** Wenn die Veränderliche t und die Function x derselben durch die Differenzialgleichung:

$$dx = f(x,t)\,dt$$

miteinander verbunden sind und ξ bezeichnet einen neuen Werth der Function x, welcher einem neuen Werthe τ der Veränderlichen t entspricht; so läßt sich ξ durch die Formel $[I'_t{}^{(x)}]$ in eine convergente Reihe entwickeln, wenn die Gleichung (C_t) verificirt wird, d. h. wenn der Zahlenwerth der Differenz $\tau-t$ kleiner ist, als der, welchen die Gleichung:

$$(\tau-t)\,L\frac{f[x+h_i,\ t+\varepsilon_m(\tau-t)]}{h_i} = \tfrac{1}{2}$$

giebt, wenn der Werth des Modulus r von h_i der Bedingung genügt, daß die Function:

$$f[x+h_i,\ t+\varepsilon(\tau-t)]$$

endlich und stetig bleibt, was für einen Werth der Winkel ϑ für diesen Werth von r und für einen kleinern Werth auch haben mag; und der Rest der auf ihre n ersten Glieder reducirten Reihe ist, abgesehen vom Zeichen, kleiner als das Product $[E'_t{}^{(x)}]$. Alsdann läßt sich auch eine beliebige Function $f(\xi)$ von ξ durch die Formel (I'_t) in eine convergente Reihe entwickeln, und der Rest dieser Reihe ist, abgesehen vom Zeichen, kleiner als das Product (E'_t), wenn der Modulus r der Bedingung genügen muß, daß die beiden Functionen:

$$f(x+h_i),\quad f[x+h_i,\ \ t+\varepsilon(\tau-t)]$$

endlich und stetig bleiben, welchen Werth der Winkel ϑ für den diesem Modulus beigelegten Werth und für einen kleinern Werth auch haben mag.

Um von den vorhin abgeleiteten Formeln eine Anwendung zu geben, wollen wir annehmen, daß sich die Differenzialgleichung:

$$dx = f(x, t)\,dt$$

auf:

$$dx = (x+t)^a\,dt$$

reducirt, wo a eine beliebige positive Größe bezeichnet. Wenn man $x+t$ positiv setzt, damit $f(x+t)$ reell wird und $\tau < t$ ist, so bleibt die Function:

$$f[x+h_i,\ t+\varepsilon(\tau-t)] = [x+h_i+t+\varepsilon(\tau-t)]^a$$

für $\varepsilon = 0$ nur dann stetig, wenn man hat:

$$\tau < x+t.$$

Alsdann findet man:

$$L[x+h_i+t+\varepsilon(\tau-t)]^a = [x+\tau+t+\varepsilon(\tau-t)]^a,$$

und wenn ε_m den Werth von ε bezeichnet, für welchen dieser letzte Ausdruck am größten wird; so hat man $\varepsilon_m = 1$ und:

$$L\frac{[x+h_i+t+\varepsilon_m(\tau-t)]^a}{h_i} = \frac{(x+\tau+\tau)^a}{\tau}.$$

Der kleinste Werth, welchen dieser letzte Ausdruck unter der Bedingung $\tau < x+t$ annehmen kann, ist der, welcher $\tau = x+t$ entspricht, nämlich:

$$\frac{(2x+t+\tau)^a}{x+t},$$

oder der, welcher $\tau = \frac{x+\tau}{a-1}$ entspricht, nämlich:

$$\frac{a^a}{(a-1)^{a-1}}(x+\tau)^{a-1},$$

jenachdem $x+t$ kleiner, oder größer als $\frac{x+\tau}{a-1}$ ist, d. h. jenachdem die Zahl a kleiner, oder größer als:

$$1 + \frac{x+\tau}{x+t} = 2 + \frac{\tau-t}{x+t}$$

ist. Wenn man, um die Begriffe zu fixiren, die Zahl $a < 2$ setzt, so ist sie um so mehr kleiner, als der Ausdruck $2 + \frac{\tau-t}{x+t}$, und wenn man in der Formel:

$$(\tau-t)\,L\frac{f[x+h_i,\ t+\varepsilon_m(\tau-t)]}{h_i} = \tfrac{1}{2}$$

für den Coefficienten von $\tau-t$ den Bruch $\frac{(2x+t+\tau)^a}{x+t}$ setzt; so reducirt sie sich auf folgende:

$$(\tau-t)(2x+t+\tau)^a=\tfrac{1}{2}(x+t).$$

Dieſe Gleichung wird offenbar durch einen zwiſchen den Grenzen $\tau=t$, $\tau=\infty$ liegenden poſitiven Werth von τ verificirt, welche den erſten Theil derſelben ſucceſſive $=0$ und $=\infty$ machen. Da man aber allgemein hat:

$$\frac{(2x+t+\tau)^{a+1}-(2x+2t)^{a+1}}{a+1}$$
$$=\int_t^{\tau}(2x+t+\tau)^a d\tau<(\tau-t)(2x+t+\tau)^a,$$

ſo iſt klar, daß der Werth von τ, welcher der Gleichung:

$$(\tau-t)(2x+t+\tau)^a=\tfrac{1}{2}(x+t)$$

genügt, kleiner iſt als der, welcher der Bedingung:

$$\frac{(2x+t+\tau)^{a+1}-(2x+2t)^{a+1}}{a+1}=\tfrac{1}{2}(x+t),$$

genügt, d. h. kleiner als die Grenze:

$$\tau=2(x+t)\left[1+\frac{a+1}{4}2^{-a}(x+t)^{-a}\right]^{\frac{1}{a+1}}-(2x+t),$$

und derſelbe liegt folglich zwiſchen t und dieſer letzten Grenze, ſo daß man denſelben leicht für jedes den Veränderlichen x und t beigelegte Syſtem von Werthen berechnen kann. Nun wird aber für den ſo beſtimmten Werth von τ die Reihe, welche den Werth von ξ oder das geſuchte Integral giebt, convergent, und der Reſt derſelben iſt, abgeſehen vom Zeichen, kleiner als der Ausdruck $[E'_t{}^{(x)}]$ oder als:

$$\frac{\left[\frac{2(\tau-t)\ (2x+t+\tau)^a}{x+t}\right]^n}{1-\frac{2(\tau-t)(2x+t+\tau)^a}{x+t}}(2x+t).$$

Dieſe Reihe giebt folglich das allgemeine Integral der Differenzialgleichung $dx=(x+t)^a\,dt$, und man kann beſtimmen, wie viele Glieder man im zweiten Theile dieſer Gleichung beibehalten muß, um den Werth von ξ mit einem gegebenen Grade von Annäherung zu erhalten. Dieſe Schlüſſe finden ſtatt, was für einen Werth die Zahl a auch haben mag; aber wenn dieſe Zahl ſehr groß wird, ſo iſt es vortheilhaft, in dem Ausdrucke:

$$(\tau-t)\,L\,\frac{f[x+h_i,\ t+\varepsilon_m(\tau-t)]}{h_i}$$

für den Coefficienten von $\tau-t$ nicht die Größe:

$$\frac{(2x+t+\tau)^a}{x+t},$$

sondern das Product:

$$\frac{a^a}{(a-1)^{a-1}}(x+\tau)^{a-1}$$

zu substituiren, und wenn man auf diese Weise verfährt; so erhält man die Gleichung:

$$(\tau-t)(x+\tau)^{a-1}=\tfrac{1}{2}\frac{(a-1)^{a-1}}{a^a},$$

welche für τ einen Werth giebt, welcher kleiner ist, als der der Gleichung:

$$\frac{(x+\tau)^a-(x+t)^a}{a}=\tfrac{1}{2}\frac{(a-t)^{a-1}}{a^a}$$

genügende, und folglich kleiner als die Grenze:

$$\tau=(x+t)\left[1+\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{a-1}(x+t)^{-a}\right]^{\frac{1}{a}}-x.$$

Wenn die Zahl a sehr beträchtlich wird, so ist der in Rede stehende Werth von τ viel größer, als der, welcher der Gleichung:

$$(\tau-t)(2x+t+\tau)^a=\tfrac{1}{2}(x+t)$$

genügt, und ein Werth, welcher kleiner ist, aber größer als t, macht die Reihe, welche den Werth von ξ giebt, convergent, und der Rest dieser Reihe ist, abgesehen vom Zeichen, kleiner als das Product:

$$\frac{\left[2\frac{a^a}{(a-1)^{a-1}}(\tau-t)(x+\tau)^{a-1}\right]^n}{1-2\frac{a^a}{(a-1)^{a-1}}(\tau-t)(x+\tau)^{a-1}}\left(x+\frac{x+\tau}{x-1}\right).$$

§. 294. Diese Bestimmung der Bedingungen der Convergenz und der Grenzen der Reihe, welche das gesuchte Integral ausdrückt, läßt sich leicht auf ein beliebiges System von Differenzialgleichungen zwischen einer unabhängigen Veränderlichen t und den Functionen $x, y, z, \ldots$ derselben erstrecken. Denn es sei $f(x, y, z, \ldots)$ irgend eine Function der reellen, oder imaginären Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ und $x_i, y_i, z_i, \ldots$ seien imaginäre Veränderliche, deren Moduli resp. $r', r'', r''', \ldots$ sind, so daß man hat:

$$x_i=r'e^{\vartheta'\sqrt{-1}},\ y_i=r''e^{\vartheta''\sqrt{-1}},\ z_i=r'''e^{\vartheta'''\sqrt{-1}},\ldots$$

wo $\vartheta', \vartheta'', \vartheta''', \ldots$ reelle Bogen sind, und wir wollen annehmen,

daß die Moduli r', r'', r''', ... so gewählt sind, daß die Function:

$$f(x+x_i,\ y+y_i,\ z+z_i,\ldots)$$

endlich und stetig bleibt, was für Werthe die Bogen ϑ', ϑ'', ϑ''',.... für die Werthe dieser Moduli, oder für kleinere Werthe, auch haben mögen; so ergiebt sich aus der Gleichung:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+re^{\vartheta\sqrt{-1}})d\vartheta$$

successive:

$$f(x,y,z,\ldots)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+x_i,\ y,z,\ldots)d\vartheta,$$

$$f(x+x_i,\ y,\ z,\ldots)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+x_i,\ y+y_i,\ z,\ldots)\,d\vartheta,$$

$$f(x+x_i,\ y+y_i,\ z,\ldots)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+x_i,\ y+y_i,\ z+z_i,\ldots)\,d\vartheta,$$

und folglich:

$$f(x,\ y,\ z,\ldots)=$$
$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\ldots f(x+x_i,y+y_i,z+z_i,\ldots)\frac{d\vartheta'}{2\pi}\frac{d\vartheta''}{2\pi}\frac{d\vartheta'''}{2\pi}\ldots$$

Wenn m', m'', m''', ... beliebige ganze Zahlen sind, so ergiebt sich ebenso aus der Gleichung:

$$f^{(n)}(x)=\frac{1.2.3\ldots n}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} r^{-n}e^{-n\vartheta\sqrt{-1}}f(x+re^{\vartheta\sqrt{-1}})d\vartheta,$$

wenn man:

$$\frac{1.2\ldots m'}{r^{m'}}\cdot\frac{1.2\ldots m''}{r^{m''}}\cdot\frac{1.2\ldots m'''}{r^{m'''}}=\mathfrak{K}$$

setzt:

$$D_{xyz\ldots}^{m'+m''+\ldots}f(x,y,\ldots)=$$
$$\mathfrak{K}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\ldots e^{-(m'\vartheta'+m''\vartheta''+\ldots)\sqrt{-1}}f(x+x_i,y+y_i,\ldots)\frac{d\vartheta'}{2\pi}\frac{d\vartheta''}{2\pi}\ldots$$

und wenn man alsdann mit L_r den größten Werth bezeichnet, welchen der Modulus der imaginären Function f annehmen kann, wenn man in x_i, y_i, z_i, ... die Winkel ϑ', ϑ'', ϑ''',.... sich ändern läßt, ohne die Moduli r', r'', r''', ... zu ändern; so erhält man:

$$M.D_{xyz\ldots}^{m'+m''+m'''+\ldots}f(x,y,z,\ldots)<\frac{1.2\ldots m'}{r'^{m'}}\cdot\frac{1.2\ldots m''}{r''^{m''}}\cdot\frac{1.2\ldots m'''}{r'''^{m'''}}\ldots L_r,$$

oder was daſſelbe iſt:

$$M.D_{xyz\ldots}^{m'+m''+m'''+\ldots} f(x, y, z, \ldots)$$
$$< (-1)^{m'+m''+m'''+\ldots} r'r''r'''\ldots D_{r'r''r'''\ldots}^{m'+m''+m'''+\ldots} (r'r''r'''\ldots)^{-1} L_r.$$

Dieſe letzte Formel findet ſelbſt dann noch ſtatt, wenn die Zahlen m', m'', m''', ..., oder einige derſelben, ſich auf Null reduciren. Es iſt übrigens wohl zu bemerken, daß man, um den zweiten Theil der letzten Ungleichheit, abgeſehen vom Zeichen, zu erhalten, nur:

$$f(x, y, z, \ldots) = \frac{r'r''r'''\ldots}{xyz\ldots} R$$

zu ſetzen, und dann die durch:

$$D_{xyz\ldots}^{m'+m''+m'''+\ldots} f(x, y, z, \ldots)$$

angezeigten Differenzirungen zu verrichten, d. h. die Function $f(x, y, z, \ldots)$ ſucceſſive m' mal in Beziehnng auf x, m'' mal in Beziehung auf y, m''' mal in Beziehung auf z, ... zu differenziren braucht, indem man R blos als eine Conſtante, oder als eine von dieſen Veränderlichen unabhängige Größe betrachtet; aber nach verrichteten Differenzirungen $R = L_r$ und außerhalb der Function R, $x = r'$, $y = r''$, $z = r'''$, ... ſetzt.

§. 295. Wir wollen nun ein Syſtem von Differenzialgleichungen von der Form:

$$dx = F_1 dt, \quad dy = F_2 dt, \quad dz = F_3 dt, \ldots$$

betrachten. Wenn F_1, F_2, F_3, ... blos Functionen der Veränderlichen x, y, z, ... ſind, ſo daß man hat:

$$F_1 = \varphi_1(x, y, z, \ldots), \quad F_2 = \varphi_2(x, y, z, \ldots),$$
$$F_3 = \varphi_3(x, y, z, \ldots), \ldots$$

und $u = f(x, y, z, \ldots)$ iſt eine neue Function derſelben Veränderlichen; ſo wird ein Integral der gegebenen Differenzialgleichungen durch die Gleichung:

$$f(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = f(x, y, z, \ldots) + (\tau - t) F_D f(x, y, z, \ldots)$$
$$+ \frac{(\tau - t)^2}{1.2} F_D^2 f(x, y, z, \ldots) + \ldots$$

beſtimmt, worin:

$$F_D f(x, y, z, \ldots) = \varphi_1 D_x f + \varphi_2 D_y f + \varphi_3 D_z f + \ldots$$

iſt. Hiernach iſt einleuchtend, daß in dem durch $F_D^n f(x, y, z, \ldots)$ ausgedrückten Polynome irgend ein Glied das Product aus mehreren gleichen, oder ungleichen Factoren iſt, wovon jeder mit einer der Functionen f, φ_1, φ_2, φ_3, ... oder mit einer ihrer Ableitungen

der verſchiedenen Ordnungen in Beziehung auf eine, oder mehrere der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ übereinſtimmt, und um eine obere Grenze des Modulus von $F_D^{(n)} f(x, y, z, \ldots)$ zu erhalten, braucht man offenbar nur für jeden der erwähnten Factoren eine obere Grenze ſeines Modulus zu ſetzen, deren Beſtimmung wir vorhin gelehrt haben. Wenn man auf dieſe Weiſe verfährt, ſo erhält man für die obere Grenze des durch $F_D^{(n)} f(x, y, z, \ldots)$ bezeichneten Polynomes ein zweites Polynom, welches wir mit A bezeichnen wollen und ſich nach der vorhergehenden Bemerkung leicht aus dem erſten ableiten läßt. Denn um den Werth von A, abgeſehen vom Zeichen, zu erhalten, braucht man nur den Werth von $F_D^{(n)} f(x, y, z, \ldots)$ zu ſuchen, wenn man darin vor den Differenzirungen in Beziehung auf $x, y, z, \ldots$ ſetzt:

$$f = \frac{r' r'' r''' \ldots}{xyz\ldots} A, \quad \varphi_1 = \frac{r' r'' r''' \ldots}{xyz\ldots} A_1,$$
$$\varphi_2 = \frac{r' r'' r''' \ldots}{xyz\ldots} A_2, \quad \varphi_3 = \frac{r' r'' r''' \ldots}{xyz\ldots} A_3 \ldots$$

und nach den Differenzirungen:

$$x = r', \quad y = r'', \quad z = r''', \ldots,$$
$$A = L_f, \quad A_1 = L_{\varphi_1}, \quad A_2 = L_{\varphi_2}, \quad A_3 = L_{\varphi_3}, \ldots$$

Da man ferner findet, daß das Polynom:

$$F_D^n f(x, y, z, \ldots)$$

aus lauter poſitiven, oder aus lauter negativen Gliedern beſteht, jenachdem n eine gerade, oder ungerade Zahl iſt; ſo iſt klar, daß man den gefundenen Werth von $F_D^{(n)} f(x, y, z, \ldots)$ nur mit $(-1)^n$ zu multipliciren braucht, um daraus den Werth von A abzuleiten. Wenn man der Kürze wegen ſetzt:

$$\rho = \frac{r' r'' r''' \ldots}{xyz\ldots},$$

ſo hat man:

$$f(x, y, z, \ldots) = A\rho,$$
$$F_D f(x, y, z, \ldots) = \rho (A_1 D_x f + A_2 D_y f + A_3 D_z f + \ldots), \ldots$$
$$F_D^n f(x, y, z, \ldots) = A F_D^{(n)} \rho = L_f F_D^{(n)} \rho,$$

und folglich:

$$A = P_n L_f,$$

wenn P_n den Werth des Ausdruckes $(-1)^n F_D^n \rho$ in Beziehung auf die vorhergehenden Bemerkungen bezeichnet. Es iſt nun noch die Größe P_n zu beſtimmen. Wenn aber $u, v, w, \ldots$ beliebige Fun-

ctionen von $u, y, z, \ldots$ bezeichnen, so hat man offenbar vermöge der Gleichungen, welche den Werth von $F_D f(x, y, z, \ldots)$ bestimmen, und der Gleichung:

$$F_D f(x, y, z, \ldots) = \rho (A_1 D_x f + A_2 D_y f + A_3 D_z f + \ldots),$$

$$F_D(u + v + w + \ldots) = F_D u + F_D v + F_D w + \ldots,$$

$$F_D . uv = u F_D v + v F_D u,$$

$$F_D \rho^n = -n\rho^{n+1}\left(\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{y} + \frac{A_3}{z} + \ldots\right),$$

$$F_D\left(\frac{A_1^n}{x^n} + \frac{A_2^n}{y^n} + \frac{A_3^n}{z^n} + \ldots\right) = -n\rho\left(\frac{A_1^{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{A_2^{n+1}}{y^{n+1}} + \frac{A_3^{n+1}}{z^{n+1}} + \ldots\right),$$

und folglich:

$$-F_D\rho = \rho^2\left(\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{y} + \frac{A_3}{z} + \ldots\right),$$

$$F_D^2\rho = 2\rho^3\left(\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{y} + \frac{A_3}{z} + \ldots\right)^2 + \rho^3\left(\frac{A_1^2}{x^2} + \frac{A_2^2}{y^2} + \frac{A_3^2}{z^2} + \ldots\right),$$

$$-F_D^3\rho = 6\rho^4\left(\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{y} + \frac{A_3}{z} + \ldots\right)^3$$
$$+ 7\rho^4\left(\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{y} + \frac{A_3}{z} + \ldots\right)\left(\frac{A_1^2}{x^2} + \frac{A_2^2}{y^2} + \frac{A_3^2}{z^2} + \ldots\right)$$
$$+ 2\rho^4\left(\frac{A_1^3}{x^3} + \frac{A_2^3}{y^3} + \frac{A_3^3}{z^3} + \ldots\right)$$

. . . . . .

und hieraus ergiebt sich, wenn man außerhalb der Functionen $A_1, A_2, A_3, \ldots$, resp. $x = r'$, $y = r''$, $z = r'''$, ... und folglich $\rho = 1$ setzt:

$$P_1 = \left(\frac{A_1}{r'} + \frac{A_2}{r''} + \frac{A_3}{r'''} + \ldots\right),$$

$$P_2 = 2\left(\frac{A_1}{r'} + \frac{A_2}{r''} + \frac{A_3}{r'''} + \ldots\right)^2 + \left(\frac{A_1^2}{r'^2} + \frac{A_2^2}{r''^2} + \frac{A_3^2}{r'''^2} + \ldots\right),$$

$$P_3 = 6\left(\frac{A_1}{r'} + \frac{A_2}{r''} + \frac{A_3}{r'''} + \ldots\right)^3$$
$$+ 7\left(\frac{A_1}{r'} + \frac{A_2}{r''} + \frac{A_3}{r'''} + \ldots\right)\left(\frac{A_1^2}{r'^2} + \frac{A_2^2}{r''^2} + \frac{A_3^2}{r'''^2} + \ldots\right)$$
$$+ 2\left(\frac{A_1^3}{r'^3} + \frac{A_2^3}{r''^3} + \frac{A_3^3}{r'''^3} + \ldots\right),$$

. . . . . .

wo die Werthe von $A_1, A_2, A_3, \ldots$ auf die angegebene Weise bestimmt werden.

Da man andererseits offenbar hat:

$$\frac{A_1^n}{r'^n}+\frac{A_2^n}{r''^n}+\frac{A_3^n}{r'''^n}+\ldots<\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+\ldots\right)^n,$$

so ergiebt sich daraus:

$$P_1=\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+\ldots,\quad P_2<3\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+\ldots\right)^2,$$

$$P_3<15\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+\ldots\right)^3$$

und allgemein:

$$P_n<N\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+\ldots\right)^n,$$

wo N das n^{te} letzte Glied der Reihe:

$$1,\ 2+1=3,\ 6+7+2=15,\ldots$$

d. h. die Summe der Zahlencoefficienten im zweiten Theile der Gleichung, welche $F_n^n\rho$ giebt, bezeichnet. Da aber dieſe Coefficienten dieſelben Werthe behalten, wie groß die Anzahl der Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ auch ſein mag, ſo braucht man nur, um die Zahl N zu erhalten, den ſehr einfachen Fall zu betrachten, wo man hat:

$$\rho=\frac{r'}{x},\ F_D f(x)=A_1\rho D_x f(x),$$

woraus ſich ergiebt:

$$(-1)^n F_D^n\rho=N\rho^{n+1}\left(\frac{A_1}{x}\right)^n,$$

und da ſich aus den Gleichungen:

$$\rho=\frac{r'}{x},\ F_D f(x)=A_1\rho D_x f(x)$$

direct ergiebt:

$$(-1)^n F_D^n\rho=1.3.5\ldots(2n-1)\rho^{n+1}\left(\frac{A_1}{x}\right)^n;$$

ſo hat man:

$$N=1.3.5\ldots(2n-1),$$

und folglich:

$$P_n<1.3.5\ldots(2n-1)\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+\ldots\right)^n,$$

$$\Lambda<1.3.5\ldots(2n-1)\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+\ldots\right)L_\rho$$

Die Größe Λ, welche eine obere Grenze des Modulus von $F_n^n f(x, y, z, \ldots)$ bezeichnet, kann alſo den zweiten Theil der vor-

hergehendn Ungleichheit nicht überschreiten, woraus folgt, daß der Zahlenwerth des allgemeinen Gliedes:

$$\frac{(\tau-t)^n}{1.2.3...n} D_D^n f(x, y, z, ...)$$

der Reihe, welche das gesuchte Integral giebt, kleiner ist, als der des Productes:

$$\frac{1.3.5...(2n-1)}{1.2.3...n}\left[(\tau-t)\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+...\right)\right]^n L_f$$

und folglich auch kleiner, als der des Productes:

$$\left[2(\tau-t)\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+...\right)\right]^n L_f.$$

Die Zahlenwerthe der verschiedenen Glieder der in Rede stehenden Reihe sind also kleiner, als die Zahlenwerthe der correspondirenden Glieder der geometrischen Progression, deren allgemeines Glied dieses letzte Product ist. Nun ist aber diese Progression convergent, wenn man hat:

$$M\left[2(\tau-t)\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+...\right)\right]<1,$$

oder wenn man für A_1, A_2, A_3, ... ihre Werthe substituirt:

$$(C_n)\quad M.(\tau-t)<\frac{\frac{1}{2}}{L\frac{\varphi_1(x+x_i, y+y_i, ...)}{x_i}+L\frac{\varphi_2(...)}{y_i}+L\frac{\varphi_3(...)}{z_i}+...},$$

und wenn man die Summe der n ersten Glieder der Reihe für ihre ganze Summe nimmt; so ist der begangene Fehler oder der Rest der Reihe, abgesehen vom Zeichen, kleiner als der Rest der geometrischen Progression, d. h. als:

$$(E_n)\quad \frac{\left|M.\left[2(\tau-t)\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+...\right)\right]\right|^n}{1-M.\left[2(\tau-t)\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+...\right)\right]} L_f.$$

Wenn man z. B. $f(x, y, z, ...) = x$ setzt, so wird die Reihe, welche das Integral giebt:

$$[I_n^{(x)}]\quad \xi = x+\frac{(\tau-t)}{1}F_D x+\frac{(\tau-t)^2}{1.2}F_D^2 x+\frac{(\tau-t)^3}{1.2.3}F_D^3 x+...,$$

und wenn man bei dem n^{ten} Gliede derselben stehen bleibt; so ist der Modulus des Restes kleiner als:

$$[E_n^{(x)}]\quad \frac{\left|M.\left[2(\tau-t)\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+...\right)\right]\right|^n}{1-M.\left[2(\tau-t)\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+...\right)\right]} L(x+h_i).$$

Man kann also folgenden Lehrsatz aufstellen:

§. 296. **Lehrsatz 3.** Wenn die Veränderliche t und die Functionen $x, y, z, \ldots$ derselben durch die Differenzialgleichungen:

$$dx = \varphi_1(x, y, z, \ldots)\,dt, \quad dy = \varphi_2(x, y, z, \ldots)\,dt,$$
$$dz = \varphi_3(x, y, z, \ldots)\,dt, \ldots$$

mit einander verbunden sind und $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ sind neue Werthe von $x, y, z, \ldots$, welche einem neuen Werthe τ von t entsprechen; so lassen sich $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ durch die Formel $[\mathrm{L}_n^{(x)}]$ in convergente Reihen entwickeln welche nach den steigenden Potenzen der Differenz $\tau - t$ fortschreiten, wenn der Zahlenwerth der Differenz $\tau - t$ kleiner ist, als der durch die Gleichung:

$$\tau - t = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{L\frac{\varphi_1(x+x_i,\ y+y_i,\ \ldots)}{x_i} + L\frac{\varphi_2(\ldots)}{y_i} + L\frac{\varphi_3(\ldots)}{z_i} + \ldots}$$

bestimmte, wo die Moduli r', r'', r''', der imaginären Ausdrücke:

$$x_i = r' e^{\vartheta' \sqrt{-1}}, \quad y_i = r'' e^{\vartheta'' \sqrt{-1}}, \quad z_i = r''' e^{\vartheta''' \sqrt{-1}}, \ldots$$

so gewählt sind, daß die Functionen:

$$\varphi_1(x+x_i,\ y+y_i,\ z+z_i+\ldots), \quad \varphi_2(\ldots), \quad \varphi_3(\ldots), \ldots$$

endlich und stetig bleiben, was für Werthe die Winkel $\vartheta', \vartheta'', \vartheta''', \ldots$ für die diesen Moduli beigelegten Werthe und für kleinere Werthe auch haben mögen. Alsdann ist der Rest jeder auf ihre n ersten Glieder reducirten Reihe, abgesehen vom Zeichen, kleiner als das Product $[\mathrm{E}_n^{(x)}]$ oder als das Product, welches sich daraus ergiebt, wenn man für $L(x+x_i)$ eine der Größen $L(y+y_i), L(z+z_i), \ldots$ setzt. Auch kann man alsdann eine beliebige Function $f(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$ von $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ in eine nach den steigenden Potenzen der Differenz $\tau - t$ fortlaufende convergente Reihe entwickeln und der Rest dieser Reihe ist, abgesehen vom Zeichen, kleiner als das Product (E_n), wenn die Function:

$$f(x+x_i,\ y+y_i,\ z+z_i+\ldots)$$

für die den Moduln $r', r'', r''', \ldots$ beigelegten Werthe, oder für kleinere Werthe, so wie die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ endlich und stetig bleiben, welche Werthe übrigens die Winkel $\vartheta', \vartheta'', \vartheta''', \ldots$ auch haben mögen.

§. 297. Wenn die Functionen $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3, \ldots$ in den gegebenen Gleichungen die Veränderliche t explicite enthalten, so

ergiebt sich durch ähnliche Betrachtungen, wie die, durch welche der Lehrsatz 2 erhalten ist, statt des Lehrsatzes 3 der folgende:

Lehrsatz 4. Wenn die Veränderliche t und die Functionen $x, y, z, \ldots$ derselben durch die Differenzialgleichungen:

$$dx = \varphi_1(x, y, z, \ldots, t)\,dt, \quad dy = \varphi_2 dt, \quad dz = \varphi_3 dt, \ldots$$

mit einander verbunden sind, und $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ sind neue Werthe von $x, y, z, \ldots$, welche einem neuen Werthe τ von t entsprechen; so wollen wir annehmen, daß $u = f(x, y, z, \ldots)$ eine beliebige Function von $x, y, z, \ldots$ ist, der Kürze wegen setzen:

$$\mathrm{F}_{\mathrm{D}} u = \varphi_1 \mathrm{D}_x u + \varphi_2 \mathrm{D}_y u + \varphi_3 \mathrm{D}_z u + \ldots$$

und mit $\mathrm{F}'_{\mathrm{D}} u$, $\mathrm{F}''_{\mathrm{D}} u$, $\mathrm{F}'''_{\mathrm{D}} u$, ... die Werthe von $\mathrm{F}_{\mathrm{D}} u$ bezeichnen, wenn man für die Veränderliche t andere Veränderliche t', t'', t''', ... substituirt. Ferner seien $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \ldots$ kleinere Zahlen als die Einheit und die Moduli $r', r'', r''', \ldots$ der imaginären Ausdrücke:

$$x_i = r' e^{\vartheta' \sqrt{-1}}, \quad y_i = r'' e^{\vartheta'' \sqrt{-1}}, \quad z_i = r''' e^{\vartheta''' \sqrt{-1}}, \ldots$$

so gewählt, daß jede der Functionen:

$$\varphi_1[x + x_i, y + y_i, z + z_i, \ldots, t + \varepsilon'(\tau - t)], \quad \varphi_2(\ldots), \quad \varphi_3(\ldots), \ldots$$

endlich und stetig bleibt, welche Werthe die Winkel $\vartheta', \vartheta'', \vartheta''', \ldots$ für die diesen Moduln beigelegten Werthe und für kleinere Werthe auch haben mögen. Endlich wollen wir setzen:

$$\mathrm{A}_1 = L_{\varphi_1}^{\varepsilon_m} = L\varphi_1[x + x_i, \; y + y_i, \; z + z_i, \; t + \varepsilon_m(\tau - t)],$$

$$\mathrm{A}_2 = L_{\varphi_2}^{\varepsilon'_m}, \quad \mathrm{A}_3 = L_{\varphi_3}^{\varepsilon''_m}, \ldots,$$

wo L den größten Modulus bezeichnet, welchen jede Function bekommen kann, wenn man die Winkel $\vartheta', \vartheta'', \vartheta''', \ldots$ variiren läßt, ohne $r', r'', r''', \ldots$ zu ändern und $\varepsilon'_m, \varepsilon''_m, \varepsilon'''_m, \ldots$ die Werthe sind, welche man $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \ldots$ beilegen muß, damit jeder Modulus den größten Werth bekommt. Alsdann lassen sich die Functionen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ durch die Formel:

$$\xi = x - \int_\tau^t \mathrm{D}'_{\mathrm{D}}\, x\, dt' + \int_\tau^t \int_\tau^{t'} \mathrm{F}'_{\mathrm{D}} \mathrm{F}''_{\mathrm{D}}\, x\, dt''\, dt'$$
$$- \int_\tau^t \int_\tau^{t'} \int_\tau^{t''} \mathrm{F}'_{\mathrm{D}} \mathrm{F}''_{\mathrm{D}} \mathrm{F}'''_{\mathrm{D}} x\, dt'''\, dt''\, dt' + \ldots$$

und durch andere ähnliche Formeln in convergente

Reihen entwickeln, wenn der Zahlenwerth von $\tau - t$ kleiner ist, als der durch die Gleichung:

$$(\tau - t)\left(\frac{A_1}{r'} + \frac{A_2}{r''} + \frac{A_3}{r'''} + \ldots\right) = \tfrac{1}{2}$$

bestimmte, und der Rest jeder auf ihre n ersten Glieder reducirten Reihe ist, abgesehen vom Zeichen, kleiner als das Product $[E_n^{(x)}]$, oder als das, welches man erhält, wenn man für $L(x+x_i)$ eine der Größen $L(y+y_i)$, $L(z+z_i)$, ... setzt, wo die Werthe von $A_1, A_2, A_3, \ldots$ immer durch dieselben Gleichungen bestimmt werden. Auch die Function $f(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$ läßt sich durch die Formel:

$$f(\xi,\eta,\zeta,\ldots) = f(x,y,z,\ldots) - \int_\tau^t F'_D f(x,y,z,\ldots)\,dt' + \int_\tau^t \int_\tau^{t'} F'_D F''_D f(x,y,z,\ldots)\,dt''dt' - \ldots$$

in eine convergente Reihe entwickeln, und der absolute Werth des Restes dieser Reihe ist kleiner, als der des Productes (E_n), wenn die Function:

$$f(x+x_i, y+y_i, z+z_i, \ldots)$$

für die den Größen $r', r'', r''', \ldots$ beigelegten Werthe, oder für kleinere Werthe, endlich und stetig bleibt, sowohl als die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, welche Werthe die Winkel $\vartheta', \vartheta'', \vartheta''', \ldots$ auch haben mögen.

Bei der Anwendung der Lehrsätze 3 und 4 ist es vortheilhaft, die Moduli $r', r'', r''', \ldots$ so zu wählen, daß die Grenze des Modulus von $\tau - t$ so groß als möglich wird.

§. 298. Note. In dem Vorhergehenden haben wir gesehen, daß man zur Bestimmung des Restes der Reihen, welche die Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen ausdrücken, den Werth ε_m von ε bestimmen muß, für welchen ein von ϑ abhängiger Ausdruck den größten Werth annimmt, welcher bereits in Beziehung auf ϑ sein Maximum erreicht hatte. Dieser größte Werth, welcher auf den Ausdruck des Restes der Reihe führt, gehört zu denjenigen, welche man absolute Maxima (maxima maximorum) nennt und welche Cauchy in einer ganz neuerlich herausgegebenen Note bestimmen lehrt, deren wesentlichen Inhalt wir hier noch mittheilen wollen.

Es sei x eine reelle Veränderliche und $u = f(x)$ eine reelle Function von x, welche nebst ihrer zweiten Ableitung $f''(x)$ wenigstens zwischen gewissen Grenzen stetig bleibt; so sind die zwischen diesen Grenzen liegenden Werthe von x, welche den größten und kleinsten Werthen der Function u entsprechen, bekanntlich die Wurzeln der Gleichung:

$$f'(x) = 0 \text{ oder } D_x u = 0$$

und zwar giebt eine solche Wurzel ein Maximum, oder Minimum von u, jenachdem die Ableitung der zweiten Ordnung eine negative, oder positive Größe ist.

Bei gewissen Untersuchungen kommt es nicht sowohl darauf an, alle Maxima, oder Minima einer gegebenen Function zu bestimmen, sondern blos das größte aller Maxima, oder das kleinste aller Minima, d. h. das absolute Maximum (maximum maximorum), oder das absolute Minimum (minimum minimorum), welchen Zweck man in sehr vielen Fällen durch folgende Betrachtungen erreichen kann.

Wir wollen annehmen, daß die Function u außer der Veränderlichen x noch einen gewissen Parameter α enthalte, so läßt sich für einen besondern Werth dieses Parameters sehr oft die Wurzel der Gleichung $D_x u = 0$ leicht finden, welche das absolute Maximum von u giebt. Es sei X diese Wurzel und U der entsprechende Werth von u oder das absolute Maximum von u, so hat man:

$$U = f(X),$$

wo X eine Wurzel der Gleichung:

$$D_x u = f'(x) = 0$$

ist. Nun wollen wir annehmen, daß sich der Parameter α stetig ändert, so ändert sich die dem absoluten Maximum der Function u entsprechende Wurzel X im Allgemeinen auch stetig, bis zu dem Augenblicke, wo $u = u_1$ wird, indem u_1 ein anderes Maximum von u bezeichnet, welches einer andern Wurzel X_1 der Gleichung:

$$f'(x) = 0$$

entspricht, und folglich bis zu dem Augenblicke, wo die Gleichung mit u, welche sich durch die Elimination von x zwischen den Gleichungen:

$$u = 0, \quad D_x u = 0$$

ergiebt, gleiche Wurzeln bekommt. Es sei $U = 0$ diese Gleichung mit u, so befinden sich die Werthe von u, welche gleiche Wurzeln ausdrücken, unter denen, welche gleichen Wurzeln der Gleichung:

$$D_x u = 0,$$

d. h. Werthen von x entsprechen, welche den beiden Gleichungen:

$$D_x u = 0 \text{ und } D_x^2 u = 0$$

zu gleicher Zeit genügen.

Durch ganz ähnliche Schlüsse, wie die eben angewandten, kommt man auf dieselben Gleichungen:

$$U = 0, \quad D_x^2 u = 0,$$

wenn man statt des absoluten Maximums der Function u ihr absolutes Minimum bestimmen will, und man kann daher folgenden Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz 1. Es sei x eine reelle Veränderliche und $u = f(x)$ eine Function von x, welche wenigstens für die zwischen gewissen Grenzen liegenden Werthe von x stetig bleibt, und X sei eine Wurzel der Gleichung:

$$D_x u = 0,$$

welche zwischen diesen Grenzen liegt und das **absolute Maximum**, oder **Minimum** der Function u giebt. Wenn sich nun der in der Function u vorkommende Parameter α ändert, so entspricht die Wurzel X dem **absoluten Maximum**, oder **Minimum** der Function u bis zu dem Augenblicke, wo der Parameter α einen solchen Werth annimmt, daß die durch Elimination von x zwischen den Gleichungen:

$$u = f(x) = 0, \quad D_x u = 0$$

erhaltene Gleichung $U = 0$ gleiche Wurzeln bekommt, welche folglich bekanntlich der Gleichung $D_x U = 0$ genügen, und diese letzte Gleichung wird für die Werthe von u erfüllt, die den Werthen von x entsprechen, welche nicht nur der Gleichung $D_x u = 0$, sondern auch der Gleichung $D_x^2 u = 0$ Genüge leisten.

Durch dieselbe Schlußweise erhält man den folgenden allgemeinen Lehrsatz:

Lehrsatz 2. Es seien $x, y, z, \ldots$ reelle Veränderliche und $u = f(x, y, z, \ldots)$ sei eine reelle Function von $x, y, z, \ldots$, welche wenigstens für die zwischen gewissen Grenzen liegenden Werthe von $x, y, z, \ldots$ stetig bleiben. Ferner sei x, y, z, ... ein System von Werthen von $x, y, z, \ldots$ welche zwischen diesen Grenzen liegen, den Gleichungen:

$$D_x u = 0, \quad D_y u = 0, \quad D_z u = 0$$

genügen und für gewisse besondere Werthe eines, oder mehrerer in u vorkommender Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ das **absolute Maximum**, oder **Minimum** der Function u geben. Wenn sich diese Parameter ändern, so entspricht das System der Werthe $x = x$, $y = y$, $z = z$, ... fortwährend dem **absoluten Maxi-**

mum, oder Minimum der Function u, bis zu dem Augenblicke, wo die Parameter solche Werthe annehmen, daß die sich aus der Elimination von $x, y, z, \ldots$, zwischen der Gleichung:

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

und den Gleichungen:

$$D_x u = 0, \quad D_y u = 0, \quad D_z u = 0, \ldots$$

ergebende Gleichung $U = 0$ gleiche Wurzeln bekommt, welche folglich auch der Bedingungsgleichung $D_u U = 0$ genügen. Uebrigens wird diese Bedingung durch die Werthe von u erfüllt, die Werthen von $x, y, z, \ldots$ entsprechen, welche nicht blos die Gleichungen:

$$D_x u = 0, \quad D_y u = 0, \quad D_z u = 0, \ldots,$$

sondern auch die Gleichung $v = 0$ verificiren, wo v die alternirende Function bezeichnet, welche man aus den Größen:

$$\begin{array}{lll} D_x^2 u, & D_x^2 u, & D_{xz}^2 u, \\ D_{xy}^2 u, & D_y^2 u, & D_{yz}^2 u, \\ D_{xz}^2 u, & D_{yz}^3 u, & D_z^2 u \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \end{array}$$

bilden kann, so daß man z. B. hat, wenn sich die Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ auf zwei x, y reduciren:

$$v = D_x^2 u D_y^2 u - (D_x u D_y u)^2.$$

Zusatz.

Jacobi hat in der letzten Zeit die Aufmerksamkeit der Geometer auf einen sehr merkwürdigen Lehrsatz von Poisson geleitet, mit dessen Hülfe man für gewisse Systeme von Differenzialgleichungen die Integrale gegenseitig aus einander ableiten kann, ohne Quadraturen anzuwenden, so daß man in gewissen Fällen nur zwei Integrale zu kennen braucht, um alle übrigen daraus abzuleiten. Es ist nicht möglich, diese von Jacobi verallgemeinerte schöne Theorie Poisson's hier vollständig auseinander zu setzen; aber wir wollen wenigstens nach einer Note von Liouville zum Schlusse dessen, was wir über die Integration der gewöhnlichen Differenzialgleichungen zu sagen haben, einen Begriff von dieser Art von Untersuchungen zu geben suchen.

Wir wollen annehmen, daß die vier Differenzialgleichungen:

$$(D) \quad \begin{cases} D_t x = F_1 = \varphi D_u F, & D_t u = F_2 = -\varphi D_x F, \\ D_t y = F_3 = \varphi D_v F, & D_t v = F_4 = -\varphi D_y F, \end{cases}$$

worin φ eine gegebene Function der fünf Veränderlichen x, u, y, v, t und F blos eine Function der abhängigen Veränderlichen x, u, y, v bezeichnet, zur Integration vorgelegt seien; so ist der Ausdruck $F = C$, wo C eine Constante bezeichnet, offenbar eins der Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen; denn diese Gleichung verificirt offenbar die partielle Differenzialgleichung:

$$D_t F + F_1 D_x F + F_2 D_u F + F_3 D_y F + F_4 D_v F = 0.$$

Ferner wollen wir annehmen, daß $f = c$, wo f blos eine Function der abhängigen Veränderlichen x, u, y, v bezeichnet, ein zweites Integral derselben Differenzialgleichungen sei, so daß man identisch hat:

$$(C) \quad D_u F D_x f - D_x F D_u f + D_v F D_y f - D_y F D_v f = 0,$$

und die beiden andern Integrale zu bestimmen suchen, welche man mit den vorhergehenden $F = C$, $f = c$ verbinden muß, um x, u, y, v vollständig als Functionen der unabhängigen Veränderlichen t zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke bemerken wir zunächst, daß man aus den beiden Gleichungen $F = C$, $f = c$ die Werthe zweier Unbekannten, z. B. die von u und v, als Functionen der beiden andern und der willkührlichen Constanten C, c ableiten kann. Setzt man diese Werthe in die Gleichungen:

$$D_t x = \varphi D_u F, \quad D_t y = \varphi D_v F,$$

so erhält man zwei Gleichungen mit zwei Veränderlichen, und wenn $f = c$ ein Integral derselben sein soll; so braucht man nur zu haben:

$$D_t f + \varphi (D_u F D_x f + D_v F D_y f) = 0,$$

oder blos:

$$D_u F D_x f + D_v F D_y f = 0,$$

wenn f die unabhängige Veränderliche t nicht enthält.

Nehmen wir nun an, was wir sogleich beweisen werden, daß $u dx + v dy$ das Differenzial einer gewissen Function χ der beiden Veränderlichen x, y sei; so hat man:

$$\int (u dx + v dy) = \chi, \quad u = D_x \chi, \quad v = D_y \chi.$$

Aber wenn man die Gleichung $F = C$ in Beziehung auf c, wovon u und v abhängen, differenzirt; so findet man:

$$D_u F D_c u + D_v F D_c v = 0,$$

oder:

$$D_u F D_x . D_c \chi + D_v F D_y . D_c \chi = 0;$$

folglich wird die Gleichung:

$$D_u F D_x f + D_v F D_y f = 0$$

verificirt, und $f = c$ ist das gesuchte Integral, wenn man $f = D_c \chi$ setzt. Folglich ist die Gleichung $D_c \chi = c$ ein drittes Integral der Gleichungen (D).

Wenn φ blos eine Function von t ist, so findet man leicht ein viertes Integral; denn differenzirt man die Gleichung $F = C$ in Beziehung auf C und multiplicirt dann mit φ; so kommt:

$$-\varphi + \varphi (D_u F D_C u + D_v F D_C v) = 0,$$

oder:

$$-\varphi + \varphi (D_u F D_x . D_C \chi + D_v F D_y . D_C \chi) = 0,$$

woraus folgt, daß die Gleichung:

$$D_t f + \varphi (D_u F D_x f + D_v F D_y f) = 0$$

durch $f = D_C \chi - \int \varphi dt$ verificirt wird, und daß folglich, wenn c eine willkührliche Constante bezeichnet, das letzte gesuchte Integral der gegebenen Differenzialgleichungen (D) folgendes ist:

$$D_C \chi = \int \varphi dt + c.$$

Aber wenn φ nicht blos eine Function von t ist, so muß man aus den drei bekannten Integralen nur die Werthe von drei abhängigen Veränderlichen, z. B. von u, y, v, ableiten und sie in die erste der gegebenen Differenzialgleichungen substituiren, welche alsdann blos noch zwei Veränderliche enthält, und deren vollständiges Integral noch zu bestimmen ist.

Es ist nun noch zu beweisen, daß $udx + vdy$ ein genaues Differenzial oder daß $D_y u = D_x v$ ist. Aus den beiden Gleichungen $F = C$, $f = c$ ergiebt sich aber, wenn man sie successive in Beziehung auf x und y differenzirt und u, v als Functionen von x, y betrachtet:

$$D_x F + D_u F D_x u + D_v F D_x v = 0, \quad D_x f + D_u f D_x u + D_v f D_x v = 0,$$
$$D_y F + D_u F D_y u + D_v F D_y v = 0, \quad D_y f + D_u f D_y u + D_v f D_y v = 0,$$
$$D_x v = \frac{D_x f D_u F - D_u f D_x F}{D_u f D_v F - D_v f D_u F}, \quad D_y u = \frac{D_v f D_y F - D_y f D_v F}{D_u f D_v F - D_v f D_u F},$$

und diese beiden Werthe sind vermöge der Gleichung (C), nämlich:

$$D_u F D_x f - D_x F D_u f + D_v F D_y f - D_y F D_v f = 0$$

offenbar einander gleich.

Ebenſo beweiſt man, daß das Binom $xdu+ydv$ ein genaues Differenzial $d\psi$ iſt, und die Function ψ dient alsdann, wie die Function χ, zur Beſtimmung der beiden letzten Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen.

Jacobi bemerkt, daß dieſe Integrationsmethode unmittelbar auf die beiden Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung:

$$D_t^2 x = -D_x R - D_x R, \quad D_t^2 y = -D_y R - D_y R$$

anwendbar iſt, wofür man die vier folgenden:

$$D_t x = u, \quad D_t u = -D_x (R+R),$$
$$D_t y = v, \quad D_t v = -D_y (R+R)$$

ſetzen kann, welche die Bewegung eines materiellen Punctes in einer Ebene beſtimmen, auf welchen die Kräfte $D_r R$, $D_r R$ wirken, welche Functionen der Entfernungen r, r dieſes materiellen Punctes von zwei in dieſer Ebene liegenden feſten Mittelpuncten ſind, worin dieſe Kräfte wirken. Um dieſe Gleichungen mit den Gleichungen (D) übereinſtimmend zu machen, braucht man nur zu ſetzen:

$$\varphi = 1, \quad F = \tfrac{1}{2}(u^2+v^2)+R+R.$$

Beim Verleger dieses Werkes sind außer mehreren andern nachstehende wissenschaftlich verwandte Werke erschienen und durch alle guten Buchhandlungen zu erhalten:

Biot, J. B., Elementarlehrbuch der Statik. Zum Gebrauch für Gewerbschulen, höhere Bürgerschulen und Gymnasien. Deutsch herausgegeben von Dr. C. H. Schnuse. 1846.

Cauchy, A. L., Vorlesungen über die Differenzialrechnung, mit Fourier's Auflösungsmethode der bestimmten Gleichungen verbunden. Aus dem Franz. übersetzt von Dr. C. H. Schnuse. Mit 1 Steindrucktafel (in gr. 4) Lexikon-8. 1836. geh. 2 Thlr.

— — Vorlesungen über die Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie. Deutsch bearb. von Dr. C. H. Schnuse. Lexikon-8. 1840. geh. 2⅔ Thlr.

— — Vorlesungen über die Integralrechnung. Bearbeitet von Moigno. Deutsch herausgegeben von Dr. C. H. Schnuse. 1846. n. 3⅓ Thlr.

Coriolis, G., Lehrbuch der Mechanik fester Körper und der Berechnung des Effektes der Maschinen. Deutsch herausgeg. von Dr. C. H. Schnuse. Mit 2 Figurentafeln. 1846.

Duchemin, Colonel, Experimentaluntersuchungen über die Gesetze des Widerstandes der Flüssigkeiten. Deutsch herausgegeben von Dr. C. H. Schnuse. Mit 4 Figurentafeln. 1844. gr. 8. geh. 1½ Thlr.

Jacob's Professor, Dr., ausführliches Lehr- und Uebungsbuch der Anfangsgründe der ebenen analytischen Geometrie oder der Anwendung der Algebra auf die Geometrie in der Ebene. Für Gymnasien, höhere Bürger- und Gewerbschulen bearbeitet. Mit 7 Figurentafeln. 1846. n. 1⅔ Thlr.

Lahmeyer, J. W., Erfahrungsresultate über die Bewegung des Wassers in Flußbetten und Kanälen. 1845. 1⅓ Thlr.

Migout und Bergery, theoretisch-praktische Anleitung zur Berechnung der gebräuchlichsten Maschinen. Für Berg- und Hüttenleute, Architekten, Artilleristen, Maschinenbauer und Techniker überhaupt. Deutsch herausgegeben von Dr. C. H. Schnuse und W. Kornhardt. Mit 6 Figurentafeln. 1845. n. 2⅔ Thlr.

Pambour, Graf, P. M. G. de, theoretisch-praktisches Handbuch über Dampfwagen, enthaltend die Construction der Locomotiven und ihre Anwendungsart zur Fortschaffung der Lasten, die Berechnungsart der Geschwindigkeiten, mit welchen sie bestimmte Ladungen fortbewegen, und der Vortheile, welche sie unter allen Umständen gewähren können, die Angabe der Bedingen, welche bei ihrer Construction zur Erlangung bestimmter Effekte erfüllt werden müssen, Untersuchungen, welche sich auf eine große Anzahl in England angestellter Versuche stützen. Nach der 2ten, sehr vermehrten und verbesserten Original-Auflage deutsch bearbeitet von Dr. C. H. Schnuse. Mit 5 Figurentafeln in qu. ½ Fol. Lex.-8. 1841. geh. 2¾ Thlr.

— — neue Theorie der Dampfmaschine, oder vollständige Anleitung zur Berechnung des Effektes und der Dimensionen aller Arten von Dampfmaschinen, worin zugleich die Unrichtigkeit der bisher gebräuchlichen Berechnungsmethoden nachgewiesen und eine Reihe neuer Formeln mitgetheilt wird, welche die Geschwindigkeit einer Dampfmaschine bei einer gegebenen Ladung, ihre Ladung für eine bestimmte Geschwindigkeit, ihre Verdampfungskraft für bestimmte Effekte, ihre Nutzkraft in Pferdekräften, ihre

Nutzkraft für eine gegebene Quantität consumirten Wassers und Brennmaterials, ihre Ladung oder ihre Expansion, welche den größten Nutzeffekt giebt ꝛc. ausdrücken. Nebst einem Anhange, welcher eine kurze Anweisung zum richtigen Verständniß und zum leichten Gebrauche der in diesem Werke vorkommenden mathematischen Formeln für diejenigen enthält, welche mit den Regeln der Algebra noch nicht vertraut sind. Deutsch bearbeitet von Dr. C. H. Schnuse. Lexicon-8. 1839. geh. 1⅔ ℛ.

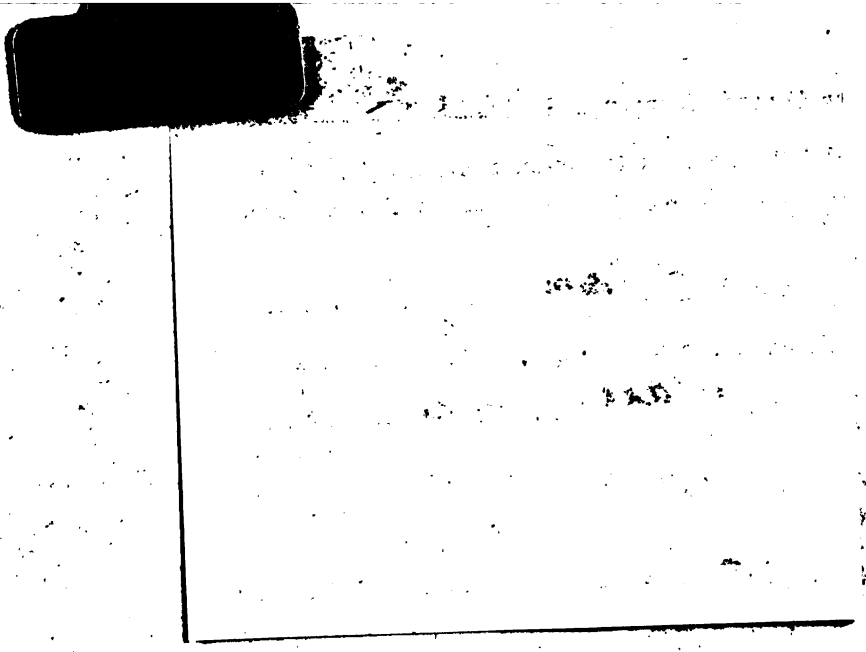
Poisson, S. D., Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren wichtigsten Anwendungen. Deutsch bearbeitet und mit den nöthigen Zusätzen versehen von Dr. C. H. Schnuse. gr. 8. 1841. geh. 2¾ ℛ.

Poncelet, (Ingenieur,) über die Stabilität der Erdbekleidungen und deren Fundamente. Aus dem Franz. übersetzt und mit einem Anhange vermehrt, von J. W. Lahmeyer. Mit 6 Figurentafeln. gr. 8. geh. 1844. 1⅚ ℛ.

Schnuse, Dr., C. H., Sammlung ausgewählter allgemeiner Formeln, Beispiele und Aufgaben aus der Differenzialrechnung und deren Anwendung auf Geometrie. Ein Hülfsbuch für Lehrer und Schüler an höheren Unterrichtsanstalten. 1844. 1⅓ ℛ.

Whewell, W., Elementar-Lehrbuch der Mechanik zum Gebrauch für technische Lehranstalten und zugleich als ein Supplement zu den Lehrbüchern der Physik. Nach der 5ten sehr verbesserten und vermehrten Original-Auflage aus dem Englischen übersetzt von Dr. C. H. Schnuse. Mit 8 Figurentafeln. Lex.-8. 1841. geh. 1⅔ ℛ.

— — über die Grundsätze der englischen Universitätsbildung, nebst allgemeinen Bemerkungen über das Studium der Mathematik. Nach der 2ten Original-Ausgabe deutsch bearb. von Dr. C. H. Schnuse. 1842.



Math 3008.46.6
Vorlesungen uber die Integralrechn
Cabot Science
0032833
3 2044 091 886 14

integralrechn
003283229
886 143